

# Αριθμητική Ανάλυση

Σταύρος Παπαϊωάννου  
Χρήστος Βοζίκης



Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά  
Συγγράμματα και Βοηθήματα  
[www.kallipos.gr](http://www.kallipos.gr)

**HEALLINK**  
Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών



Ευρωπαϊκή Ένωση  
European Union



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ  
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

ΣΤΑΥΡΟΣ ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ  
Μαθηματικός – Διδάκτωρ Αστροφυσικής

ΧΡΗΣΤΟΣ ΒΟΖΙΚΗΣ  
Φυσικός – Διδάκτωρ Αστροφυσικής

# *Αριθμητική Ανάλυση*



Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά  
Συγγράμματα και Βοηθήματα  
[www.kallipos.gr](http://www.kallipos.gr)

# Αριθμητική Ανάλυση

## Συγγραφή

Σταύρος Παπαϊωάννου

Χρήστος Βοζίκης

## Κριτικός αναγνώστης

Βασίλειος Κουκουλογιάννης

## Συντελεστές έκδοσης

ΓΛΩΣΣΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: : Σ. Παπαϊωάννου, Χ. Βοζίκης

ΓΡΑΦΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Σ. Παπαϊωάννου, Χ. Βοζίκης

ΤΕΧΝΙΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ: Χ. Βοζίκης

Copyright © ΣΕΑΒ, 2015



Το παρόν έργο αδειοδοτείται υπό τους όρους της άδειας Creative Commons Αναφορά Δημιουργού – Μη Εμπορική Χρήση – Παρόμοια Διανομή 3.0.

Για να δείτε ένα αντίγραφο της άδειας αυτής επισκεφτείτε τον ιστότοπο <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/gr/>

ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΩΝ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780, Ζωγράφου

[www.kallipos.gr](http://www.kallipos.gr)

ISBN: 978–960–603–379–7

## Πίνακας περιεχομένων

Πίνακας περιεχομένων.....	3
Πίνακας συμβόλων– συντομεύσεων – ακρωνύμιων.....	8
Ευρετήριο Αντιστοίχισης Ελληνόγλωσσων και Ξενόγλωσσων Επιστημονικών Όρων .....	9
Πρόλογος.....	11
<b>Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή, ακρίβεια και σφάλματα υπολογισμών.....</b>	<b>13</b>
1.1. Γενικά.....	13
1.2. Δεδομένα και ζητούμενα του προβλήματος. Αλγόριθμος λύσης .....	14
1.3. Το πρόβλημα της ακρίβειας ή ακριβέστερα το πρόβλημα των σφαλμάτων.....	15
1.4. Απόλυτο και σχετικό σφάλμα.....	16
1.5. Αποκοπή και στρογγυλοποίηση.....	17
1.6. Μέγιστο απόλυτο και σχετικό σφάλμα αποκοπής .....	18
1.7. Σημαντικά ψηφία.....	19
<b>Κριτήρια αξιολόγησης.....</b>	<b>21</b>
Κριτήριο αξιολόγησης 1.....	21
Κριτήριο αξιολόγησης 2.....	21
Κριτήριο αξιολόγησης 3.....	21
<b>Κεφάλαιο 2. Πραγματικές ρίζες μη γραμμικών συναρτήσεων .....</b>	<b>22</b>
2.1. Γενικά.....	22
2.2. Μέθοδος Διχοτόμησης .....	23
2.2.1. Η διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου διχοτόμησης.....	24
2.2.2. Παράδειγμα .....	25
2.2.3. Εφαρμογή στο Excel.....	26
2.2.4. Υλοποίηση της μεθόδου σε MATLAB.....	28
2.3. Μέθοδος γραμμικής παρεμβολής (regula falsi). .....	29
2.3.1. Παράδειγμα .....	31
2.3.2 Υλοποίηση της μεθόδου σε MATLAB.....	31
2.4. Μέθοδος Newton (Newton–Raphson) .....	33
2.4.1. Το πρόβλημα και η γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου .....	33
2.4.2. Απόδειξη του τύπου του Newton.....	34
2.4.3. Ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου Newton – Raphson. ....	34
2.4.4. Περιπτώσεις αποτυχίας της μεθόδου Newton – Raphson.....	36
2.4.5. Παραδείγματα.....	40
2.4.6. Διαχείριση του τύπου του Newton, με το Excel.....	42

2.4.7. Υλοποίηση της μεθόδου σε MATLAB.....	46
2.5 Λυμένες Ασκήσεις Κεφαλαίου .....	48
Άσκηση 2.1 .....	48
Άσκηση 2.2 .....	49
<b>Κριτήρια αξιολόγησης.....</b>	<b>53</b>
Κριτήριο αξιολόγησης 1.....	53
Κριτήριο αξιολόγησης 2.....	53
Κριτήριο αξιολόγησης 3.....	53
Κριτήριο αξιολόγησης 4.....	53
Κριτήριο αξιολόγησης 5.....	53
Κριτήριο αξιολόγησης 6.....	54
Κριτήριο αξιολόγησης 7.....	54
<b>Κεφάλαιο 3. Τα αναπτύγματα Taylor – Mac Laurin στην Αριθμητική Ανάλυση.....</b>	<b>55</b>
3.1. Το πολυώνυμο του Taylor .....	55
3.2. Το πρόβλημα .....	56
3.3. Υπολογισμός του πολυωνύμου $p(x)$ .....	57
3.4. Το σφάλμα αποκοπής.....	58
3.5. Ανάπτυγμα κατά Mac–Laurin.....	59
3.5.1 Γενικός τρόπος χρήσης του αναπτύγματος Mac Laurin. ....	61
3.6. Επίλυση ορισμένων ολοκληρωμάτων με τη βοήθεια των αναπτυγμάτων. ....	62
3.6.1. Παραδείγματα .....	62
3.7 Το πρόβλημα της σύγκλισης του Αναπτύγματος Taylor.....	67
<b>Κριτήρια αξιολόγησης.....</b>	<b>68</b>
Κριτήριο αξιολόγησης 1.....	68
Κριτήριο αξιολόγησης 2.....	68
Κριτήριο αξιολόγησης 3.....	68
Κριτήριο αξιολόγησης 4.....	68
Κριτήριο αξιολόγησης 5.....	69
Κριτήριο αξιολόγησης 5.....	69
Κριτήριο αξιολόγησης 6.....	69
Κριτήριο αξιολόγησης 7.....	69
<b>Κεφάλαιο 4. Επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων.....</b>	<b>71</b>
4.1. Γραμμικά συστήματα. ....	71
4.1.1. Ορισμός ενός γραμμικού συστήματος. ....	71
4.1.2. Επίλυση των γραμμικών συστημάτων με τη βοήθεια οριζουσών .....	72
4.1.3. Οι ορίζουσες και τα γραμμικά συστήματα στο Excel .....	73
4.1.4. Επίλυση γραμμικού συστήματος μέσω του αντίστροφου πίνακα.....	76
4.1.5. Η μέθοδος Gauss–Cholevsky .....	76
4.1.6. Αντιστροφή πίνακα. ....	77

4.1.7. Αντιστροφή πίνακα με το Excel .....	78
4.1.8. Λύση γραμμικών συστημάτων με το Excel. ....	80
4.1.9. Επίλυση γραμμικών συστημάτων με έτοιμες συναρτήσεις του Excel. ....	82
4.1.10 Υλοποίηση μεθόδων στο MATLAB.....	84
4.2. Μη γραμμικά συστήματα εξισώσεων 2 μεταβλητών. ....	89
4.2.1. Μαθηματική ανάλυση.....	89
4.2.2.Γραφική μέθοδος.....	89
4.2.2. Η μέθοδος του Newton. ....	89
4.2.3.Παράδειγμα .....	91
4.2.4. Υλοποίηση στο MATLAB.....	94
<b>Κριτήρια αξιολόγησης.....</b>	<b>98</b>
Κριτήριο αξιολόγησης 1.....	98
Κριτήριο αξιολόγησης 2.....	98
Κριτήριο αξιολόγησης 3.....	98
Κριτήριο αξιολόγησης 4.....	98
Κριτήριο αξιολόγησης 5.....	99
<b>Κεφάλαιο 5. Το Συμπτωτικό Πολυώνυμο .....</b>	<b>100</b>
5.1. Γενικά για τα πολυώνυμα. ....	100
5.2. Ιδιότητες των πολυωνύμων. ....	100
5.3. Το συμπτωτικό πολυώνυμο. ....	106
<b>Κριτήρια αξιολόγησης.....</b>	<b>110</b>
Κριτήριο αξιολόγησης 1.....	110
Κριτήριο αξιολόγησης 2.....	110
Κριτήριο αξιολόγησης 3.....	110
<b>Κεφάλαιο 6. Αριθμητική παρεμβολή .....</b>	<b>112</b>
6.1. Η έννοια της παρεμβολής .....	112
6.2. Εκλογή του συμπτωτικού πολυωνύμου .....	113
6.2.1. Παράδειγμα .....	113
6.3. Οι πεπερασμένες διαφορές .....	116
6.3.1. Ιδιότητες των πεπερασμένων διαφορών.....	117
6.4. Το συμπτωτικό πολυώνυμο του Newton.....	120
6.4.1. Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του συμπτωτικού πολυωνύμου του Newton .....	121
6.4.2. Παρεμβολή με το συμπτωτικό πολυώνυμο του Newton.....	122
6.5. Γραμμική παρεμβολή .....	123
6.6. Η παρεμβολή στο Excel. ....	126
6.7. Διπλή γραμμική παρεμβολή .....	127
6.8. Παρεμβολή σε πίνακα μη ισαπεχόντων ορισμάτων. ....	130
6.8.1 Μέθοδος Lagrange .....	130
6.8.2 Μέθοδος Newton με διαιρεμένες διαφορές.....	135

6.8.3 Υλοποίηση μεθόδων με το MATLAB.....	136
<b>Κριτήρια αξιολόγησης.....</b>	<b>139</b>
Κριτήριο αξιολόγησης 1.....	139
Κριτήριο αξιολόγησης 2.....	140
Κριτήριο αξιολόγησης 3.....	140
Κριτήριο αξιολόγησης 4.....	140
Κριτήριο αξιολόγησης 5.....	140
<b>Κεφάλαιο 7. Αριθμητική παραγωγή.....</b>	<b>141</b>
7.1. Γενικά.....	141
7.2. Γραμμικός υπολογισμός της παραγώγου. ....	143
7.3. Πλήρης αριθμητική παραγωγή.....	144
7.4. Αριθμητική παραγωγή με τη βοήθεια των πεπερασμένων διαφορών. ....	146
<b>Κριτήρια αξιολόγησης.....</b>	<b>150</b>
Κριτήριο αξιολόγησης 1.....	150
<b>Κεφάλαιο 8. Αριθμητικός υπολογισμός ορισμένου ολοκληρώματος .....</b>	<b>151</b>
8.1. Γενικά.....	151
8.2 Η αριθμητική ολοκλήρωση.....	153
8.3. Ολοκλήρωση με τη μέθοδο του τραπεζίου (μέθοδος Simpson).....	154
8.4. Οι τύποι του Cotes.....	155
8.5. Εφαρμογή στο Excel.....	161
8.6. Υλοποίηση μεθόδου Cotes στο MATLAB .....	167
<b>Κριτήρια αξιολόγησης.....</b>	<b>169</b>
Κριτήριο αξιολόγησης 1.....	169
Κριτήριο αξιολόγησης 2.....	169
Κριτήριο αξιολόγησης 3.....	169
Κριτήριο αξιολόγησης 4.....	170
Κριτήριο αξιολόγησης 5.....	170
<b>Κεφάλαιο 9. Αριθμητική επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων .....</b>	<b>171</b>
9.1 Γενικές γνώσεις για τις Διαφορικές Εξισώσεις.....	171
9.1.1 Το πρόβλημα και οι πρώτοι ορισμοί.....	171
9.1.2 Γεωμετρική ερμηνεία των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης .....	176
9.1.3 Το πεδίο των εφαπτόμενων ευθειών .....	177
9.2 Αριθμητικές Μέθοδοι Επίλυσης Διαφορικών Εξισώσεων Πρώτης Τάξης .....	178
9.2.1 Η μέθοδος του Euler.....	179
9.2.2 Η μέθοδος του Taylor.....	184
9.2.3 Η μέθοδος των Runge–Kutta.....	193
9.2.4 Το θέμα της ακρίβειας των αποτελεσμάτων.....	202
9.3 Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων.....	207
9.3.1 Γενικά για τα Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων .....	207

9.3.2 Η μέθοδος του Euler.....	209
9.3.3 Η μέθοδος του Taylor.....	213
9.3.4 Η μέθοδος των Runge–Kutta.....	217
9.3.5 Άσκηση επανάληψης.....	220
9.4 Εφαρμογές σε ζητήματα Δυναμικής .....	224
9.4.1 Μια διαφορετική εφαρμογή της μεθόδου του Taylor.....	224
9.4.2 Ο μονοβάθμιος ταλαντωτής .....	227
9.4.3 Ο Διβάθμιος Ταλαντωτής .....	237
9.5 Υλοποίηση των μεθόδων σε MATLAB.....	243
<b>Κριτήρια αξιολόγησης.....</b>	<b>248</b>
Κριτήριο αξιολόγησης 1.....	248
Κριτήριο αξιολόγησης 2.....	248
Κριτήριο αξιολόγησης 2.....	248
Κριτήριο αξιολόγησης 3.....	248
Κριτήριο αξιολόγησης 4.....	249
Κριτήριο αξιολόγησης 5.....	249
Κριτήριο αξιολόγησης 6.....	249
Κριτήριο αξιολόγησης 7.....	250
<b>Βιντεοσκοπημένες διαλέξεις.....</b>	<b>251</b>
Εισαγωγή, πολυωνμικές συναρτήσεις .....	251
Συμπτωτικό πολυώνυμο .....	251
Μετρήσεις και σφάλματα .....	251
Αναπτύγματα Taylor και Mac Laurin.....	251
Πραγματικές ρίζες συναρτήσεων .....	251
Πεπερασμένες διαφορές.....	252
Επαναληπτική διάλεξη. Πολύωνμο Taylor, Πεπερασμένες διαφορές.....	252
Αριθμητική παρεμβολή.....	252
Αριθμητική παραγωγή.....	252
Αριθμητικός υπολογισμός ορισμένου ολοκληρώματος.....	252
Αριθμητική επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων .....	252
<b>Προτεινόμενη Βιβλιογραφία για Περαιτέρω Μελέτη.....</b>	<b>254</b>



## Πίνακας συμβόλων– συντομεύσεων – ακρωνύμιων

►	Σύμβολο τέλους απόδειξης, παραδείγματος, ορισμού
π.σ.	Πολυωνυμική συνάρτηση
δ.ε.	Διαφορική εξίσωση
κ.ο.κ.	και ούτω καθεξής
π.ο.	Πεδίο ορισμού (της συνάρτησης)
α.σ.	Αρχικές συνθήκες
β.ε.	Βαθμός ελευθερίας
$\in$	Ανήκει (σε ένα σύνολο, ένα διάστημα)
$\notin$	Δεν ανήκει (σε ένα σύνολο, ένα διάστημα)
$\forall$	Για κάθε
$\exists$	Υπάρχει
$\sin(x)$	ημ(x) – ημίτονο του x
$\cos(x)$	συν(x) – συνημίτονο του x
$\tan(x)$	εφ(x) – εφαπτομένη του x
$\arcsin(x)$	τοξημ(x) – τόξο ημιτόνου του x
$\arccos(x)$	τοξσυν(x) – τόξο συνημιτόνου του x
$\arctan(x)$	τοξεφ(x) – τόξο εφαπτομένης του x

## Ευρετήριο Αντιστοίχισης Ελληνόγλωσσων και Ξενόγλωσσων Επιστημονικών Όρων

<i>Ελληνικά</i>	<i>Αγγλικά</i>	<i>Γαλλικά</i>
ημίτονο	sine	sinus
συνημίτονο	cosine	cosinus
εφαπτομένη	tangent	tangente
εξίσωση	equation	équation
συνάρτηση	function	fonction
ακρίβεια	accuracy	précision
σφάλμα	error	Erreur
απόλυτο σφάλμα	absolute error	erreur absolue
σχετικό σφάλμα	relative error	erreur relative
σημαντικά ψηφία	significant figures	chiffres significatifs
γραμμικό σύστημα	linear system	système linéaire
γραμμική συνάρτηση	linear function	fonction linéaire
ρίζα συνάρτησης	root of the function	racine de la fonction
πολυνώνυμο	polynomial	polynôme
πίνακας	matrix – array	matrice – tableau
ορίζουσα πίνακα	determinant of matrix	déterminant de la matrice
αντίστροφος πίνακας	inverse matrix	matrice inverse
παρεμβολή	interpolation	interpolation
γραμμική παρεμβολή	linear interpolation	interpolation linéaire

<i>Ελληνικά</i>	<i>Αγγλικά</i>	<i>Γαλλικά</i>
πολυώνυμο παρεμβολής	interpolating polynomial	polynôme d'interpolation
παραγωγός	derivative	dérivé
παραγωγή	differentiation	différenciation
ολοκλήρωμα	integral	intégral
ολοκλήρωση	integration	intégration
αριθμητική ολοκλήρωση	numerical integration	intégration numérique
διαφορική εξίσωση	differential equation	équation différentielle
ταλαντωτής	oscillator	oscillateur
επαναλήψεις	iterations	itérations

## Πρόλογος

Η εποχή μας χαρακτηρίζεται από ένα κατακλυσμό πληροφόρησης, στον οποίο συμμετέχει ένας ικανός αριθμός αξιόλογων συγγραμμάτων Μαθηματικών, που καλύπτουν κάθε τομέα και κάθε επίπεδο. Αυθόρμητα, λοιπόν, αναφύεται το ερώτημα για τον λόγο ύπαρξης «ενός ακόμη από αυτά».

Ο πρώτος λόγος έχει να κάνει με την ύπαρξη ενός προγράμματος σαν τον Κάλλιππο, που αποτελεί πρόκληση για έναν διδάσκοντα να προσπαθήσει να αποτυπώσει, με τη μορφή ενός συγγράμματος, την εμπειρία την οποία αποκόμισε στα χρόνια που διδάσκει το μάθημα.

Ο δεύτερος και σημαντικότερος, έχει να κάνει με την πρόθεση των συγγραφέων να δημιουργήσουν ένα σύγγραμμα κομμένο και ραμμένο στις ανάγκες των φοιτητών των τμημάτων Πολιτικών Μηχανικών των ΤΕΙ. Ένα σύγγραμμα δηλαδή στο οποίο θα πρέπει:

- Τα Μαθηματικά να διατυπώνονται με έναν τρόπο που να είναι φιλικός σε άτομα, τα οποία δεν τα συμπάθησαν ιδιαίτερα στη μαθητική ζωή τους.
- Η χρήση της λέξης «θεώρημα», μίας έννοιας ταυτισμένης με μία ελάχιστα κατανοητή μαθηματική διατύπωση, να χρησιμοποιηθεί στον ελάχιστο δυνατό βαθμό.
- Η διαδικασία αποδείξεων να απαλλαγεί από την αυστηρότητα που απαιτούν τα Μαθηματικά και να μετατραπεί στην ερμηνεία των μαθηματικών προτάσεων.

Όλα αυτά αντιμετωπίζονται με ιδιαίτερη επιφύλαξη από όλους εμάς τους μαθηματικούς, που μεγαλώσαμε εμποτισμένοι από τη λιτή και ακριβέστατη διατύπωση των μαθηματικών εννοιών. Όμως, μετά από πολλά χρόνια διδασκαλίας των Μαθηματικών σε διάφορα τμήματα των ΤΕΙ, έχουμε αντιληφθεί πως πρέπει να επιλέξουμε ανάμεσα σε δύο διαφορετικές διδακτικές λογικές:

1. Διδάσκουμε τα Μαθηματικά με τον κλασσικό τρόπο, ο οποίος θα βοηθήσει ένα 5% των φοιτητών να τα κατανοήσουν σε βάθος και να τα χρησιμοποιήσουν ως βασικά εργαλεία στην Επιστήμη που επέλεξαν, ενώ θα οδηγήσει του υπόλοιπους στη γνωστή λογική της αποστήθισης και στην αναζήτηση «μεθοδολογίας λύσης ασκήσεων». Το αποτέλεσμα αυτής της λογικής είναι δραματικό κι απογοητευτικό. Η συντριπτική πλειοψηφία των φοιτητών δεν έχει καμιά δυνατότητα να χρησιμοποιήσει τα Μαθηματικά στην ανάπτυξη της Επιστήμης τους. Οι ίδιοι φοιτητές λειτουργούν με παρόμοιο τρόπο και στα μαθήματα ειδικότητας, στα οποία χρειάζονται τα «Ανώτερα Μαθηματικά»: Αποστήθιση και «μεθοδολογία»!
2. Προσπαθούμε να προσαρμόσουμε τη διδασκαλία των Μαθηματικών στις δυνατότητες των ακροατών μας, να την αποσυνδέσουμε από τη λογική της αποστήθισης και να τη συνδέσουμε με τις ιδιαίτερες ανάγκες της Επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού. Αντί να παρουσιάσουμε αξιωματικά ένα αντικείμενο, με βάση τη δομή: «Θεώρημα – Απόδειξη – Πόρισμα – Φυσική ερμηνεία – Ασκήσεις εμπέδωσης», να λειτουργήσουμε αντίστροφα. Ξεκινούμε, δηλαδή, από το πρόβλημα, εκφράζουμε τη βασική ιδέα πάνω στην οποία στηρίζεται η λύση και στο τέλος παρουσιάζουμε τη λύση με περισσότερο πρακτικό τρόπο.

Οι συγγραφείς ακολούθησαν, εδώ και αρκετά χρόνια, τη δεύτερη λογική αντιμετώπισης. Και αυτό γιατί θεωρήσαμε πως λειτουργώντας με την πρώτη λογική, πρακτικά θα αναιρούσαμε την ίδια μας την παρουσία, όντας άχρηστοι στην ουσία της διαδικασίας μόρφωσης των φοιτητών μας. Η άποψή μας αυτή ενισχύθηκε και από στατιστικές που κάναμε μεταξύ των φοιτητών, οι οποίες μας έδειξαν κάτι συγκλονιστικό. Οκτώ στους δέκα φοιτητές δεν αφιερώνουν ούτε μία ώρα στην ανάγνωση θεωρίας, επικεντρώνοντας όλη την προσπάθειά τους στην ανάγνωση λυμένων ασκήσεων και παλιών θεμάτων!

Βέβαια, η ερώτηση που έρχεται αυθόρμητα στα χείλη όποιου διαβάζει αυτές τις γραμμές, αφορά στο κατά πόσο η επιλογή μας αυτή, έχει δώσει καλύτερα αποτελέσματα, ποιοτικά και ποσοτικά.

Δυστυχώς, στην ερώτηση αυτή δεν μπορούμε να απαντήσουμε με τρόπο εμπειριστατωμένο. Το μεγαλύτερο πρόβλημα στην εκτίμηση της αποτελεσματικότητας μιας τέτοιας μεθοδολογικής προσέγγισης, αφορά στις τεράστιες μεταβολές της ελληνικής κοινωνίας την τελευταία επταετία. Η οικονομική και κοινωνική κρίση έχει μεταβάλει ριζικά τη διάθεση για μόρφωση των φοιτητών μας, τα ψυχικά τους αποθέματα, έχει γιγαντώσει την αδιαφορία, ενώ η πίεση από τη μεριά της οικογένειας τους οδηγεί στη λογική της αποστήθισης, της αντιγραφής ή της εγκατάλειψης των σπουδών. Επομένως, κάθε σύγκριση με αποτελέσματα προηγούμενων ετών, θα οδηγήσει, με βεβαιότητα, σε λανθασμένα συμπεράσματα.

Προσπαθώντας να αντιδράσουν στην πλημμυρίδα προβλημάτων που απειλούν την εκπαιδευτική διαδικασία, οι συγγραφείς του συγγράμματος αυτού, αποφάσισαν να προβούν σε κάθε δυνατή ενέργεια που θα βοηθούσε στην περεταίρω βελτίωση των συνθηκών διδασκαλίας, προς όφελος των φοιτητών, στοχεύοντας παράλληλα στη βελτίωση της κριτικής σκέψης τους. Για τον λόγο αυτό πήραν ενεργό μέρος στο πρόγραμμα «Ανοικτά Μαθήματα». Ο πρώτος συγγραφέας βιντεοσκόπησε όλα τα μαθήματά του, συνοδεύοντας παράλληλα την κάθε μαγνητοσκόπηση με σημειώσεις, γραμμένες στο ίδιο πνεύμα. Ο δεύτερος συγγραφέας συμμετείχε στην οργάνωση του προγράμματος αυτού, με τη συνεχή συνδρομή του προς κάθε εκπαιδευτικό του ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας που πήρε μέρος στα «Ανοικτά Μαθήματα».

Δυστυχώς, το σύγγραμμα αυτό γράφηκε κάτω από την ασφυκτική πίεση των χρονικών περιορισμών, σε μία περίοδο γεμάτη από εξίσου ασφυκτικές υποχρεώσεις των συγγραφέων. Για τον λόγο αυτό δεν έχει τη μορφή, την ποιότητα, αλλά και την ωριμότητα γραφής που θα θέλαμε. Πιστεύουμε όμως πως ο Κάλλιππος, αυτός ο σημαντικός θεσμός, θα μας επιτρέψει να βελτιώσουμε το έργο αυτό με νέες εκδόσεις, έτσι ώστε η τελική μορφή να μην αδικεί, ούτε τους συγγραφείς αλλά ούτε και τη θεωρητική άποψη που προσπαθούν να υπερασπισθούν.

Σταύρος Παπαϊωάννου

Χρήστος Βοζίκης

# Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή, ακρίβεια και σφάλματα υπολογισμών

## Σύνοψη

Στο πρώτο αυτό κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στο αντικείμενο της Αριθμητικής Ανάλυσης και εξετάζεται το θέμα της ακρίβειας και των σφαλμάτων των υπολογισμών.

## Προαπαιτούμενη γνώση

Το κεφάλαιο προϋποθέτει ότι ο αναγνώστης έχει γνώσεις Μαθηματικών Γ' λυκείου και Μαθηματικών Ι του Α' Εξαμήνου σπουδών.

## 1.1. Γενικά

Στο μάθημα αυτό θα γνωρίσουμε κάποιες βασικές έννοιες της Μαθηματικής Επιστήμης που λέγεται Αριθμητική Ανάλυση. Το μάθημα απευθύνεται σε σπουδαστές που έχουν ήδη γνωρίσει σε γενικές γραμμές τον Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό της Μαθηματικής Ανάλυσης. Η Αριθμητική Ανάλυση ασχολείται με τα ίδια προβλήματα που ασχολείται και η Ανάλυση, μόνο που προσπαθεί να επιλύσει αυτά τα προβλήματα στα οποία η Ανάλυση δεν μπορεί να δώσει συγκεκριμένη λύση. Στην περίπτωση αυτή, θα επιχειρήσουμε να περιγράψουμε μεθόδους που επιτρέπουν να υπολογίσουμε τη λύση του προβλήματος που μας τίθεται, με τρόπο προσεγγιστικό, αλλά με την επιδιωκόμενη ακρίβεια.

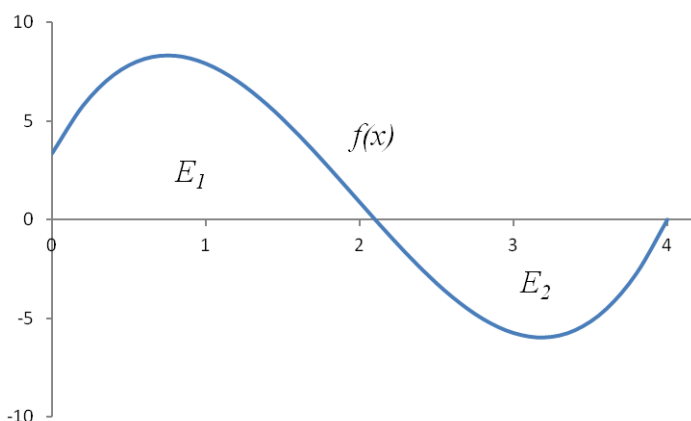
Ενδεικτικά ως αναφέρουμε κάποια παραδείγματα προβλημάτων που στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να λύσουμε:

α) Να υπολογισθεί το ορισμένο Ολοκλήρωμα:

$$A = \int_a^{\beta} f(x) dx$$

όταν η συνάρτηση  $y = f(x)$  είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , ενώ δεν μπορεί να υπολογισθεί αναλυτικά το αόριστο ολοκλήρωμα της  $f(x)$ . Θα πρέπει επομένως να υπολογίσουμε προσεγγιστικά την τιμή  $A$  του ορισμένου ολοκληρώματος.

Παρόμοιο θα ήταν το πρόβλημα, εάν η συνάρτηση  $f(x)$ , που ολοκληρώνεται, ορίζεται με τη βοήθεια πειραματικών δεδομένων, τα οποία περιέχονται σε έναν πίνακα τιμών, που ξεκινάει από το σημείο  $\alpha$  και τελειώνει στο σημείο  $\beta$ .



Σχήμα 1.1 Η συνάρτηση  $f(x)$ .

Στην περίπτωση αυτή πρέπει να υπολογίσουμε τα εμβαδά  $E_1$  και  $E_2$ , τα οποία «γράφει» η συνάρτηση πάνω και κάτω από τον οριζόντιο άξονα των  $x$ , αντίστοιχα, οπότε θα έχουμε:

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = E_1 - E_2$$

β) Στον υπολογισμό του ολοκληρώματος του προηγούμενου παραδείγματος θα μπορούσε να αναδειχθεί ακόμη ένα δυσεπίλυτο πρόβλημα: Η εύρεση της πραγματικής ρίζας της συνάρτησης του ολοκληρώματος ( $f(x)$ ) στην περιοχή του σημείου 1.1! Εάν συμβεί ο υπολογισμός αυτός να είναι αδύνατος με τη βοήθεια των αναλυτικών μεθόδων της Ανάλυσης, τότε είμαστε υποχρεωμένοι να υπολογίσουμε την πραγματική αυτή ρίζα με μία προσεγγιστική μέθοδο και μάλιστα με ιδιαίτερα μεγάλη ακρίβεια, αν θέλουμε ο υπολογισμός του ολοκληρώματος  $A$  να είναι ακριβής...

γ) Να βρεθεί μία απλή και «γρήγορη» μέθοδος, που να επιλύει το παρακάτω σύστημα  $n$  γραμμικών εξισώσεων με  $n$  αγνώστους:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1k}x_k = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2k}x_k = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3k}x_k = b_3$$

$$\dots\dots\dots = \dots$$

$$a_{v1}x_1 + a_{v2}x_2 + a_{v3}x_3 + \dots + a_{vk}x_k = b_v$$

Να υπογραμμίσουμε εδώ πως η διάδοση των προσωπικών υπολογιστών αναγκάζει τις μεθόδους της Αριθμητικής Ανάλυσης να είναι προσανατολισμένες στη δυνατότητα προγραμματισμού τους.

Θα ήταν όμως λανθασμένο να αντιμετωπισθεί η Αριθμητική Ανάλυση σαν μια παραφυάδα της Μαθηματικής Επιστήμης! Πρόκειται για μία ολοκληρωμένη Επιστήμη, τα πορίσματα της οποίας, συνεργαζόμενα με τη στατιστική και την Πληροφορική, δίνουν αποτελέσματα που αγγίζουν τα όρια του αδύνατου.

Με δεδομένη την εκρηκτική ανάπτυξη της Τεχνολογίας και την είσοδό της στην καθημερινή ζωή, είναι πιθανό στην καριέρα του ένας τεχνολόγος να βρεθεί μπροστά σε δύσκολα υπολογιστικά προβλήματα. Αυτό μάλιστα είναι ακόμη πιθανότερο να συμβεί, εάν κάποιος απόφοιτος ενός τμήματος Πολιτικών Μηχανικών θελήσει να παρακολουθήσει ένα Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών. Θα είναι επιτυχία για το μάθημα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, αλλά και για τον νέο επιστήμονα, εάν θυμηθεί πως ανατρέχοντας σε ένα βιβλίο Αριθμητικής Ανάλυσης, κερδίζει σίγουρα και χρόνο και ακρίβεια. Για τον λόγο αυτό συνήθως τα βιβλία Αριθμητικής Ανάλυσης είναι γραμμένα έτσι ώστε το κάθε τους κεφάλαιο να μπορεί να μελετηθεί ανεξάρτητα από το υπόλοιπο βιβλίο, προϋποθέτοντας βέβαια κάποιες στοιχειώδεις γνώσεις Αριθμητικής Ανάλυσης και, φυσικά, Γενικών Μαθηματικών.

Οι περισσότερες από τις μεθόδους που θα αναφερθούν στα πλαίσια αυτών των σημειώσεων, μπορούν να προσαρμοσθούν με ιδιαίτερη ευκολία σε έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή. Μάλιστα, στις τελευταίες σελίδες μερικών κεφαλαίων, αναφερόμαστε στον προγραμματισμό των αντίστοιχων μεθόδων με τη βοήθεια του πλέον διαδεδομένου προγράμματος, του Excel, αλλά και του επίσης διαδεδομένου προγραμματιστικού περιβάλλοντος, του MatLab.

Για να εφαρμόσει κανείς τις υποδείξεις αυτές στον υπολογιστή του, θα πρέπει να έχει μια εντελώς στοιχειώδη γνώση του Excel. Πιστεύουμε πως αξίζει τον κόπο να τα δουλέψει ο αναγνώστης στον υπολογιστή του, μια και θα εξασκηθεί στο χειρισμό των διαδεδομένων αυτών προγραμμάτων, αλλά, το πιο σημαντικό, θα βοηθηθεί και στην καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

## 1.2. Δεδομένα και ζητούμενα του προβλήματος. Αλγόριθμος λύσης

Σε ένα υπολογιστικό πρόβλημα, συνήθως έχουμε κάποια στοιχεία που μας δίνονται και κάποια που μας ζητούνται. Το δικό μας μέλημα είναι να βρούμε μία μέθοδο λύσης η οποία, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα, να

υπολογίζει τα ζητούμενα. Η μέθοδος αυτή, που συνήθως δεν είναι μοναδική για το εν λόγω πρόβλημα, ονομάζεται **αλγόριθμος λύσης**.

Η επιλογή ανάμεσα στις διάφορες μεθόδους λύσης γίνεται για διάφορους, κάθε φορά, λόγους. Θα προσπαθήσουμε για παράδειγμα να υπολογίσουμε τις τιμές των  $a$  και  $b$  όταν γνωρίζουμε ότι:

$$3a + b = 6$$

$$2a + 2b = 8$$

Ένας τρόπος είναι να λύσουμε την πρώτη ως προς  $b$  και να αντικαταστήσουμε, με τη λύση αυτή, το  $b$  στη δεύτερη. Έτσι η δεύτερη θα γίνει μια εξίσωση που θα περιέχει μόνο το  $a$ . Βρίσκουμε λοιπόν την τιμή του  $a$  και αντικαθιστώντας την στην πρώτη, βρίσκουμε και την τιμή του  $b$ .

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} 3a + b = 6 \\ 2a + 2b = 8 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = 6 - 3a \\ 2a + 2b = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = 6 - 3a \\ 2a + 2(6 - 3a) = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \left. \begin{array}{l} b = 6 - 3a \\ 2a + 12 - 6a = 8 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = 6 - 3a \\ -4a = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = 6 - 3a \\ a = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = 3 \\ a = 1 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Ένας άλλος τρόπος είναι να πολλαπλασιάσουμε την πρώτη επί τον συντελεστή του  $a$  της δεύτερης και τη δεύτερη με τον συντελεστή του  $a$  της πρώτης

$$\left. \begin{array}{l} 3a + b = 6 \\ 2a + 2b = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6a + 2b = 12 \\ 6a + 6b = 24 \end{array} \right\}$$

Κατόπιν αφαιρώντας κατά μέλη καταλήγουμε σε μία εξίσωση με μόνο το  $b$ , από την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του.

$$4b = 12 \Rightarrow b = 3$$

και αντικαθιστώντας την τιμή του  $b$  σε μία από τις δύο εξισώσεις, βρίσκουμε και την τιμή του  $a$ .

$$3a + b = 6 \Rightarrow 3a + 3 = 6 \Rightarrow 3a = 3 \Rightarrow a = 1$$

### 1.3. Το πρόβλημα της ακρίβειας ή ακριβέστερα το πρόβλημα των σφαλμάτων

Οι περισσότεροι φοιτητές των πρώτων εξαμήνων, όταν ακούν την έκφραση: «Μετρήσαμε το μέγεθος  $x$  και το βρήκαμε ίσο με 1.35m», θεωρούν πως η μέτρηση αυτή είναι απόλυτα σωστή. Τους είναι αδύνατο να φανταστούν πως **κάθε μέτρηση ενός μεγέθους, που περιγράφεται με πραγματικό αριθμό, εμπεριέχει ένα μικρό ή μεγαλύτερο σφάλμα!**

Βέβαια, το να περιμένουμε σε μία στάση λεωφορείου και να καταγράφουμε τους επιβάτες που κατεβαίνουν από το κάθε όχημα που σταματάει, μπορεί να είναι μια απόλυτα ακριβής μέτρηση, διότι δίνεται με έναν Φυσικό Αριθμό. Εάν όμως θέλουμε να μετρήσουμε το μήκος ενός τραπεζιού, τότε η οποιαδήποτε μέτρηση θα έχει ένα σφάλμα, το μέγεθος του οποίου εξαρτάται από τη μέθοδο μέτρησης.

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, πως προσπαθούμε να μετρήσουμε το μήκος ενός τραπεζιού και το βρίσκουμε ίσο με:

1. 1.35 m, μετρώντας το με το μήκος της παλάμης μας,
2. 1.374 m, με τη βοήθεια ενός μέτρου και
3. 1.37412852 με τη βοήθεια ενός μηχανήματος Laser.



Παρατηρούμε πως και οι τρεις μετρήσεις (ιδιαίτερα οι δύο πρώτες) έχουν ένα σφάλμα που εξαρτάται από τη μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε. Μάλιστα, κανείς δεν πρόκειται να μας κατηγορήσει για την «ανακρίβεια» της πρώτης μέτρησης. Αντίθετα, θα θεωρήσουμε πως η ακρίβεια της πρώτης είναι ιδιαίτερα εντυπωσιακή, με βάση τον πρωτόγονο τρόπο με τον οποίο πραγματοποιήθηκε.

Παρόλα αυτά, συχνά ξεχνούμε ακριβώς αυτό τον παράγοντα!

Για παράδειγμα ας πάρουμε έναν επόπτη γραμμών σε έναν ποδοσφαιρικό αγώνα, ο οποίος θα πρέπει διαρκώς να ακολουθεί τρέχοντας πάνω κάτω, στα όρια της πλάγιας γραμμής του γηπέδου, σε μία διαδρομή 50 περίπου μέτρων, ακολουθώντας τον τελευταίο αμυντικό μιας ομάδας Α, κοιτάζοντας ταυτόχρονα σε δύο κατευθύνσεις: Προς την ευθεία του τελευταίου αμυντικού και προς τον παίκτη της επιτιθέμενης ομάδας Β, που έχει στην κατοχή του την μπάλα. Τη στιγμή που κάτοχος της μπάλας τροφοδοτεί έναν προωθημένο συμπαίκτη του, ο επόπτης θα πρέπει να κάνει μία μέτρηση για το εάν ο προωθημένος επιθετικός βρίσκεται πριν ή μετά τον τελευταίο αμυντικό της ομάδας Α (με την προϋπόθεση πως πιο πίσω βρίσκεται ο τερματοφύλακας της ομάδας). Αλήθεια, εάν σκεφτούμε τις ταχύτητες που αναπτύσσουν οι σύγχρονοι ποδοσφαιριστές, πόσο σφάλμα μπορούμε να δικαιολογήσουμε στη μέτρηση του επόπτη; Δυστυχώς, λησμονούμε αυτή την προφανή αλήθεια και χρησιμοποιούμε ιδιαίτερα προηγμένα μέσα (πάγωμα της τηλεοπτικής εικόνας, νοητές ευθείες κλπ) για να αποφανθούμε πως ο επόπτης έκανε μια λανθασμένη υπόδειξη, κατά 0.2 μέτρα! Πρόκειται για μία διαδικασία που εξοργίζει (απολύτως δικαιολογημένα) κάθε έναν ο οποίος έχει ασχοληθεί με μετρήσεις και τον οδηγεί σε σκέψεις για την υστεροβουλία τέτοιων ενεργειών!

Το πρόβλημα των σφαλμάτων κυριαρχεί στην Αριθμητική Ανάλυση. Από τον απλούστερο υπολογισμό μέχρι τα πιο σύνθετα προβλήματα, η ακρίβεια του τελικού αποτελέσματος αποτελεί κεντρικό ερώτημα, στο οποίο η Επιστήμη της Αριθμητικής Ανάλυσης πρέπει να δίνει απάντηση.

## 1.4. Απόλυτο και σχετικό σφάλμα

Γίνεται λοιπόν φανερό πως η επίλυση άλλων πολυπλοκότερων προβλημάτων, προκαλεί τη δημιουργία σημαντικών σφαλμάτων τα οποία συχνά είναι δύσκολο να εκτιμηθούν.

Ας υποθέσουμε λοιπόν πως μετρούμε μία απόσταση με τη βοήθεια μιας μετροταινίας και ενός μηχανήματος που χρησιμοποιεί ακτίνες Laser. Θεωρώντας, στην πράξη, τη μέτρηση με Laser ως ακριβή, καταλήγουμε σε δύο μετρήσεις:

- $x'$ : μέτρηση με μετροταινία (προσεγγιστική μέτρηση)
- $x$ : μέτρηση με Laser (ακριβής μέτρηση)

### Ορισμός:

Ονομάζουμε **απόλυτο σφάλμα** ( $\sigma_a$ ) της μέτρησης  $x'$  τη διαφορά τιμών ανάμεσα στην ακριβή ( $x$ ) και στην προσεγγιστική ( $x'$ ) μέτρηση:

$$\sigma_a = x' - x$$



Όμως, το απόλυτο σφάλμα δεν μας επιτρέπει να αξιολογήσουμε την ποιότητα της ακρίβειας με την οποία έγινε μια μέτρηση. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι μία ομάδα σπουδαστών μετρά, με μία μετροταινία, το πλάτος μιας αίθουσας διδασκαλίας και η μέτρησή της έχει απόλυτο σφάλμα 30 cm, ενώ μία άλλη ομάδα μετρά (με μετροταινία και πάλι) την περίμετρο του κτιρίου της Διοίκησης του ΤΕΙ, με το ίδιο απόλυτο σφάλμα. Είναι προφανές πως η πρώτη ομάδα έκανε μια απρόσεκτη μέτρηση, ενώ η δεύτερη έδωσε ένα ικανοποιητικότατο αποτέλεσμα (για τη μέθοδο που χρησιμοποίησε). Για τον λόγο αυτό αξιολογούμε την ακρίβεια μιας μέτρησης, με τη βοήθεια του σχετικού σφάλματος, το οποίο συγκρίνει το απόλυτο σφάλμα της μέτρησης με το μέγεθος που μετριέται.

### Ορισμός:

Ονομάζουμε **σχετικό σφάλμα** ( $\sigma_{sx}$ ) της μέτρησης  $x'$ , τον λόγο του απόλυτου σφάλματος  $\sigma_a$ , προς την ακριβή τιμή του μεγέθους  $x$ . Το κλάσμα του σχετικού σφάλματος, πολλαπλασιασμένο επί 100, δίνει την επί τοις εκατό έκφραση του σχετικού σφάλματος.

$$\sigma_{sx} = \frac{x' - x}{x}$$

και

$$\sigma_{sx}(\%) = 100 \frac{(x' - x)}{x}$$



Βέβαια, είναι πολύ σπάνιες οι φορές που γνωρίζουμε ταυτόχρονα την προσεγγιστική μέτρηση μιας ποσότητας και την ακριβή τιμή της. Συνήθως όμως γνωρίζουμε το μέγιστο σφάλμα, που μπορεί να δημιουργηθεί, κατά τη διαδικασία μιας μέτρησης. Έτσι, για παράδειγμα, το φυλλάδιο οδηγιών ενός τοπογραφικού μηχανήματος αναφέρει πως το μηχάνημα μπορεί να μετρήσει αποστάσεις μέχρι των τριών χιλιομέτρων, ενώ το μέγιστο σχετικό του σφάλμα (εφόσον τηρηθούν οι τεχνικές προδιαγραφές) είναι 0,1%. Αυτό σημαίνει πως σε μία απόσταση των 1000 μέτρων θα πέσουμε έξω κατά ένα μέτρο, το πολύ.

### Ορισμός:

Ονομάζουμε μέγιστο απόλυτο σφάλμα ( $E_a$ ) το μεγαλύτερο σφάλμα που είναι δυνατό να περιέχεται σε μία μέτρηση. Το μέγιστο σχετικό σφάλμα ( $E_{sx}$ ) ορίζεται όπως προηγουμένως. Ισχύουν λοιπόν οι σχέσεις:

$$E_a = \max(x' - x)$$

$$E_{sx} = \frac{\max(x' - x)}{x}$$



### Παρατήρηση:

Όταν δεν γνωρίζουμε την ακριβή τιμή  $x$ , ενώ έχουμε μια αξιόπιστη εκτίμηση για το μέγιστο απόλυτο σφάλμα της μεθόδου μας, αντικαθιστούμε την ακριβή τιμή  $x$ , στον παρονομαστή των προηγουμένων σχέσεων, με την προσεγγιστική τιμή  $x'$ .

## 1.5. Αποκοπή και στρογγυλοποίηση

Η γραφή ενός αριθμού, ενώ είναι ένα απλό ζήτημα, δημιουργεί ήδη προβλήματα ακρίβειας. Παρ' όλο που στα Μαθηματικά η κλασματική και η δεκαδική μορφή ενός ρητού είναι οι δύο όψεις του ίδιου νομίσματος, η Αριθμητική Ανάλυση, προσανατολισμένη προς τις ανάγκες της Πληροφορικής η οποία θέλει αριθμούς σε δεκαδική μορφή, χρησιμοποιεί κατά βάση τη δεκαδική μορφή γραφής. Η γραφή για παράδειγμα ενός ρητού αριθμού με δεκαδική μορφή δεν εισάγει σφάλμα, μόνον όταν ο αριθμός αυτός έχει πεπερασμένο αριθμό δεκαδικών ψηφίων:

$$3/4 = 0.75 \text{ ή } 2/5 = 0.4$$

Να θυμίσουμε πως κάθε ρητός αριθμός στη δεκαδική του μορφή ή θα έχει πεπερασμένο αριθμό ψηφίων ή θα είναι περιοδικός. Π.χ.:

$$\frac{7}{8} = 0.875 \quad \text{ή} \quad \frac{9}{11} = 0.818181818\dots$$

Αντίστροφα, κάθε περιοδικός δεκαδικός είναι ρητός. Ένας αντιπρόσωπος του ρητού αυτού δίνεται από το κλάσμα που έχει αριθμητή την περίοδο του περιοδικού (σε ακέραια μορφή) και παρονομαστή έναν ακέραιο με τόσα εννέα, όσα και τα ψηφία της περιόδου:

$$0.8181818\dots = \frac{81}{99} = \frac{9}{11} \quad \text{ή} \quad 0.714285714285714\dots = \frac{714285}{999999} = \frac{5}{7}$$

Αντίθετα, ένας άρρητος αριθμός (όπως είναι οι ρίζες κάθε τάξης, ο αριθμός  $\pi$ , ο αριθμός  $e$  κλπ) είναι ένας δεκαδικός με άπειρα δεκαδικά ψηφία και χωρίς κανενός είδους περιοδικότητα (π.χ.  $\pi = 3,14159265358979323846\dots$ ). Ως γνωστόν, η ένωση του συνόλου των ρητών και των άρρητων αποτελεί το σύνολο των Πραγματικών αριθμών ( $\mathbb{R}$ ).

Έστω ένας ρητός αριθμός, ο οποίος στη δεκαδική γραφή είναι περιοδικός. Τότε, η γραφή του στη μορφή αυτή εισάγει ένα σφάλμα που εξαρτάται από τον αριθμό των ψηφίων που θα κρατήσουμε και που είναι το γνωστό **σφάλμα στρογγυλοποίησης**:

$$3/7 = 0.27272727\dots \sim 0.272727 \quad (\text{με σφάλμα} = 0.0000002727\dots < 0.0000003)$$

Επομένως, ακόμη και μια απλούστατη διαδικασία, όπως είναι η γραφή (υπό τη δεκαδική μορφή) ενός τυχαίου ρητού αριθμού, του οποίου θεωρητικά γνωρίζουμε όλα τα ψηφία (μια και πρόκειται για περιοδικό αριθμό), εισάγει το σφάλμα που ονομάζεται σφάλμα στρογγυλοποίησης. Όπως ήδη είπαμε, η συντριπτική πλειοψηφία των πραγματικών αριθμών έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία. Από αυτά μόνον ένα μικρό πλήθος τους μπορεί να γραφεί.

## Ορισμός:

Λέμε πως αποκόπτουμε από έναν πραγματικό δεκαδικό αριθμό  $x$ , τα ψηφία πέραν του  $v$ -οστού δεκαδικού ψηφίου του, όταν το τελευταίο δεκαδικό ψηφίο που κρατούμε είναι το  $v$ -οστό, αποκόπτοντας όλα τα επόμενα (από το  $v+1$  και πέρα).

Όταν στρογγυλεύουμε έναν δεκαδικό αριθμό στο  $v$ -οστό δεκαδικό ψηφίο, ελέγχουμε πάντα το  $v+1$  δεκαδικό ψηφίο. Αν το ψηφίο αυτό (το  $v+1$ ) είναι κάποιο από τα 0,1,2,3,4, τότε το  $v$ -οστό παραμένει ως έχει, ενώ αν το  $v+1$  ψηφίο είναι κάποιο από τα 5,6,7,8,9, τότε αυξάνουμε κατά μία μονάδα την τιμή του  $v$ -οστού δεκαδικού ψηφίου. Π.χ.:

$$0.93746875 \sim 0.937 \quad (\text{στρογγυλοποίηση στο 3ο δεκαδικό ψηφίο})$$

$$0.93746875 \sim 0.93747 \quad (\text{στρογγυλοποίηση στο 5ο δεκαδικό ψηφίο})$$



## 1.6. Μέγιστο απόλυτο και σχετικό σφάλμα αποκοπής

Έστω ο πραγματικός αριθμός  $x$ , από τον οποίο δίνονται μόνον τα τρία πρώτα δεκαδικά ψηφία του:

$$x = 2.345$$

Θεωρώντας πως η στρογγυλοποίηση έχει γίνει σωστά, συμπεραίνουμε πως η πραγματική τιμή του  $x$  μπορεί να ανήκει στο διάστημα:

$$(2.344500\dots, 2.3454999\dots) = (2.3445, 2.3455)$$

του οποίου το μήκος είναι ίσο με το 0.001.

Εφόσον η τιμή που επιλέγουμε για τον  $x$  (το 2.345), είναι το μέσον του πιο πάνω διαστήματος, το μέγιστο απόλυτο σφάλμα που θα προκύπτει από την αποκοπή και τη στρογγυλοποίηση θα είναι ίσο με το ήμισυ του πλάτους του διαστήματος αυτού:

$$\text{Μέγιστο απόλυτο σφάλμα: } E_a = 0.0005$$

### Τελικό συμπέρασμα:

Όταν από ένα πραγματικό αριθμό αποκόπτουμε τα ψηφία που βρίσκονται πέρα του  $n$ -οστού δεκαδικού ψηφίου, στρογγυλεύοντας το  $n$ -οστό, το μέγιστο απόλυτο σφάλμα που θα κάνουμε ισούται με 5 μονάδες του  $n+1$  δεκαδικού ψηφίου.

## 1.7. Σημαντικά ψηφία

Έστω οι πραγματικοί  $x$  και  $y$ :

$$x = 1234.56789 \text{ και } y = 0.000123456789$$

τους οποίους θα γράψουμε διατηρώντας ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων:

$$x = 1234.5679 \text{ και } y = 0.0001$$

Παρατηρούμε πως ενώ το μέγιστο απόλυτο σφάλμα αποκοπής είναι κοινό (0,00005), το μέγιστο σχετικό σφάλμα (που είναι και το σημαντικότερο) είναι εντελώς διαφορετικό:

$$E_{\sigma\chi.}(x) = 100 \frac{0.00005}{1234.56789} = 0.000004 \%$$

$$E_{\sigma\chi.}(y) = 100 \frac{0.00005}{0.000123456789} = 40.5 \%$$

Στην προσπάθεια να διατηρούμε το σχετικό σφάλμα αποκοπής στο ίδιο επίπεδο, είτε πρόκειται για αριθμούς με πολύ μεγάλη απόλυτη τιμή, είτε πρόκειται για αριθμούς πολύ κοντά στο μηδέν, φθάνουμε στον επόμενο ορισμό για τα σημαντικά ψηφία ενός πραγματικού δεκαδικού αριθμού:

### Ορισμός:

Παρατηρώντας έναν δεκαδικό αριθμό από αριστερά προς τα δεξιά, ονομάζουμε **πρώτο σημαντικό ψηφίο** το αριθμού, το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο που συναντούμε. Το επόμενο δεκαδικό ψηφίο είναι το 2ο σημαντικό κ.λ.π.



### Παρατηρήσεις:

1. Όταν θέλουμε, το σχετικό σφάλμα που προκύπτει από την αποκοπή και στρογγύλευση πραγματικών αριθμών να είναι της ίδιας τάξης, κρατούμε για τον κάθε αριθμό το ίδιο πλήθος σημαντικών ψηφίων.
2. Σε κάθε περίπτωση, όταν εργαζόμαστε με αριθμητική σημαντικών ψηφίων, είναι ιδιαίτερα βολική η εκθετική γραφή των δεκαδικών.

### Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>

Εάν χρησιμοποιήσουμε αριθμητική 6 σημαντικών ψηφίων για τους αριθμούς  $x$  και  $y$ :

$$x = 1234.57 = 1.23457 \times 10^3 = 1.23457\text{E}+3$$

$$y = 0.0000123457 = 1.23457 \times 10^{-5} = 1.23457\text{E}-5$$

παρατηρούμε πως το μέγιστο σχετικό σφάλμα αποκοπής:

$$E_{\sigma\chi.}(x) = 100 \frac{0.5 \times 10^{-2}}{1.23456789 \times 10^3} = \frac{50}{1.23456789 \times 10^5} \%$$

$$E_{\sigma\chi.}(y) = 100 \frac{0.5 \times 10^{-10}}{1.23456789 \times 10^{-5}} = \frac{50}{1.23456789 \times 10^5} \%$$

είναι ακριβώς το ίδιο. Βέβαια, αυτό δεν θα συνέβαινε εάν οι αριθμοί δεν είχαν ακριβώς το ίδιο 1<sup>ο</sup> αντίστοιχο σημαντικό ψηφίο. Έτσι, οι αριθμοί:  $x = 0.0098725$  και  $y = 1125.6$  δεν θα έχουν το ίδιο σχετικό σφάλμα αποκοπής, μια και το σφάλμα του  $y$  θα είναι περίπου 9 φορές μεγαλύτερο. Για τον λόγο αυτό λέμε πως: **Η αριθμητική σημαντικών ψηφίων μας βοηθάει κατά την αποκοπή και στρογγυλοποίηση ενός δεκαδικού αριθμού να διατηρούμε στην ίδια τάξη μεγέθους το μέγιστο σχετικό σφάλμα αποκοπής, είτε αυτός έχει μεγάλη απόλυτη τιμή, είτε είναι πολύ κοντά στο μηδέν.**



## Παράδειγμα 2<sup>ο</sup>

Είναι φανερό, πως οι υπολογιστές τσέπης, όπως επίσης και οι μεγάλοι υπολογιστές, δεν δουλεύουν με ακρίβεια δεκαδικών ψηφίων αλλά με ακρίβεια σημαντικών ψηφίων. Αυτή η σκέψη μας κάνει να αναρωτηθούμε για το κατά πόσο είναι ακριβές το τελευταίο ψηφίο που μας δίνεται από τον υπολογιστή τσέπης. Συνήθως είναι πράγματι ακριβές γιατί οι περισσότεροι απ' αυτούς κρατούν στην εσωτερική τους μνήμη δύο ψηφία περισσότερα από αυτά που εμφανίζουν στην οθόνη τους. Ακόμη και όταν τους ζητούμε να εμφανίζουν μικρότερο αριθμό ψηφίων, αυτοί συνεχίζουν να κρατούν στην εσωτερική τους μνήμη τη μέγιστη δυνατή ακρίβεια.

Με το κομπιουτεράκι υπολογίζουμε:  $\sqrt{133} = 11.53256260$

Στον αριθμό αυτόν προσθέτουμε τον 0.000000002 ο οποίος μπορεί να γραφεί στις 10 θέσεις της οθόνης. Το αποτέλεσμα είναι ο αριθμός: 11.532562602 με 11 ψηφία (χωρίς το τελευταίο ψηφίο να εμφανίζεται στην οθόνη). Υψώνω στο τετράγωνο και έχω:

$$(11.532562602)^2 = 133.00000001$$

που σημαίνει πως το συγκεκριμένο κομπιούτερ κρατάει στη μνήμη του ένα τουλάχιστον σημαντικό ψηφίο περισσότερο από αυτά που εμφανίζει στην οθόνη του (το ενδέκατο ψηφίο πήρε μέρος στην πράξη).



## Κριτήρια αξιολόγησης

### Κριτήριο αξιολόγησης 1

Δύο μεταβλητές  $x$  και  $y$  παίρνουν τις τιμές:  $x=1.2$  και  $y=1.200$ . Θεωρείτε πως οι δύο μεταβλητές είναι ίσες ή όχι. Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

### Κριτήριο αξιολόγησης 2

Γνωρίζετε δύο πραγματικούς αριθμούς με ακρίβεια 6 σημαντικών ψηφίων. Το μέγιστο σχετικό σφάλμα αποκοπής και στρογγυλοποίησης είναι ακριβώς ίδιο στους δύο αυτούς αριθμούς; Αν όχι, από τι εξαρτάται;

### Κριτήριο αξιολόγησης 3

Έχουμε τους πραγματικούς  $x=2.758$  και  $y=3.426$ , γνωστούς με ακρίβεια (4 σημαντικών) 3 δεκαδικών ψηφίων. Το άθροισμα  $x+y$  και το γινόμενο  $xy$ , έχουν ακρίβεια πόσων (σημαντικών) δεκαδικών ψηφίων; (Υπόδειξη: Απαντήστε με τη βοήθεια παραδειγμάτων).

## Κεφάλαιο 2. Πραγματικές ρίζες μη γραμμικών συναρτήσεων

### Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται μερικές από τις πιο συνήθως χρησιμοποιούμενες αριθμητικές μεθόδους για την εύρεση πραγματικών ριζών μη γραμμικών συναρτήσεων. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται η μέθοδος της διχοτόμησης, η μέθοδος Regula – Falsi και η μέθοδος Newton – Raphson ,

### Προαπαιτούμενη γνώση

Το κεφάλαιο προϋποθέτει ότι ο αναγνώστης έχει γνώσεις Μαθηματικών Γ' λυκείου και Μαθηματικών Ι του Α' Εξαμήνου σπουδών. Επίσης, απαραίτητη είναι η βασική γνώση χρήσης του προγράμματος Excel. Για την κατανόηση της υλοποίησης των μεθόδων σε MATLAB απαιτούνται βασικές γνώσεις προγραμματισμού και χρήσης του προγράμματος MATLAB.

### 2.1. Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια απάντηση στο πρόβλημα του προσδιορισμού της ή των **πραγματικών** ριζών μιας εξίσωσης  $f(x)=0$ . Για την επίλυση του παλαιού αυτού προβλήματος, υπάρχουν πολλές μέθοδοι ανάμεσα από τις οποίες διαλέγουμε κάθε φορά αυτήν που μας επιβάλλει η φύση του προβλήματος αλλά και τα υλικοτεχνικά μέσα που διαθέτουμε. Για παράδειγμα, κάποιοι παράγοντες που μπορούν να καθορίσουν τον αλγόριθμο λύσης είναι:

- Αν είναι εύκολος ο αναλυτικός υπολογισμός της παραγώγου  $f'(x)$ .
- Αν είναι εύκολο να υπολογίζεται η τιμή της συνάρτησης  $f(x)$  στα σημεία του πεδίου ορισμού.
- Αν έστω και χοντρικά είναι γνωστή η περιοχή μέσα στην οποία υπάρχει η ρίζα της συνάρτησης  $f$  που ψάχνουμε.
- Αν η τιμή της κλίσης της  $f$  (δηλαδή η τιμή της  $f'$ ) είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη κατ' απόλυτη τιμή του 1.
- Αν η ρίζα που αναζητούμε είναι περιττής ή άρτιας τάξης.
- Αν έχουμε στη διάθεσή μας υπολογιστή, κ.λ.π.

Ένας, όμως, από τους παράγοντες που μπορεί να βοηθήσει σε μεγάλο βαθμό τη δουλειά αυτή είναι η εμπειρία μας πάνω στη συμπεριφορά των συναρτήσεων. Αν, για παράδειγμα, ζητούμε όλες τις ρίζες της συνάρτησης:  $f(x)=x^2-x\ln x-5$  πρέπει να θυμόμαστε πως:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = 0$$

(δοκιμάστε με τον κανόνα του De l' Hospital)

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)] = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} [x^2] = \infty$$

Όπου η τελευταία σχέση δείχνει πως όταν το  $x$  τείνει στο άπειρο, η ποσότητα  $x^2$  είναι σαφώς ισχυρότερη από την  $x \ln x$ . Αυτό μπορεί εύκολα κάποιος να το διαπιστώσει εάν δει πόσο πιο μεγάλο γίνεται το  $x^2$  σε σχέση με το  $x \ln x$  υπολογίζοντας το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x \ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{\ln x} \right) = \frac{\infty}{\infty}$$

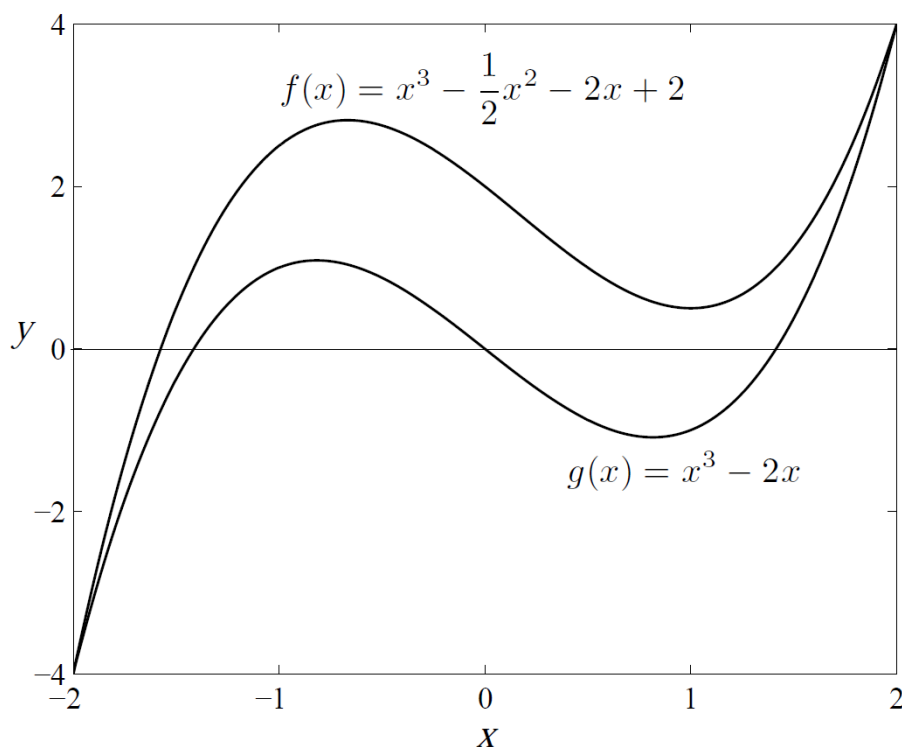
και εφαρμόζοντας τον κανόνα του De l'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1/x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x) = \infty$$

Με τα δεδομένα αυτά μπορούμε να αποκτήσουμε μια ιδέα για το υποδιάστημα στο οποίο θα περιέχεται μία πραγματική ρίζα της συνάρτησης (ή τρεις σε ειδικές περιπτώσεις), μια και πρέπει, υποχρεωτικά, η συνάρτηση  $f(x)$  με τρόπο συνεχή (είναι συνεχής για  $x > 0$ ), να περάσει από τις αρνητικές τιμές που παίρνει στην περιοχή του μηδενός, σε θετικές.

## 2.2. Μέθοδος Διχοτόμησης

Η μέθοδος της διχοτόμησης (bisection) είναι η πρώτη και η ευκολότερη από μία σειρά προσεγγιστικών μεθόδων υπολογισμού των πραγματικών ριζών μιας συνάρτησης, που καλούνται **επαναληπτικές**. Το χαρακτηριστικό των μεθόδων αυτών είναι πως σε κάθε επανάληψη της μεθόδου έχουμε μία νέα προσέγγιση της ρίζας, η οποία είναι, κατά κανόνα, καλύτερη από την προηγούμενη. Σε κάθε επανάληψη μιας επαναληπτικής μεθόδου χρησιμοποιείται, ως τιμή εκκίνησης, το αποτέλεσμα της προηγούμενης προσέγγισης, την οποία επιχειρεί να βελτιώσει.



**Σχήμα 2.1** Γραφική παράσταση δύο συναρτήσεων  $f(x)$  και  $g(x)$ . Οι συναρτήσεις έχουν, αντίστοιχα, τρεις και μία ρίζες στο διάστημα  $[-2, 2]$ .



Η μέθοδος διχοτόμησης, που υπολογίζει τις πραγματικές ρίζες μιας συνάρτησης  $f(x)$ , είναι ιδιαίτερα απλή. Αλλά, έχει τη δυνατότητα να υπολογίζει μόνον περιττής τάξης ρίζες. Το ξεκίνημά της προϋποθέτει την εύρεση ενός (κλειστού) διαστήματος  $[x_1, x_2]$  του πεδίου ορισμού της για το οποίο ισχύει:

- η συνάρτηση  $f(x)$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[x_1, x_2]$
- οι τιμές της  $f(x)$  στα σημεία  $x_1$  και  $x_2$  είναι ετερόσημες (δηλαδή  $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$  )

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, η  $f(x)$  έχει τουλάχιστον μία ρίζα περιττής τάξης ανάμεσα στα δύο σημεία  $x_1$  και  $x_2$ . Έστω, αυτή η ρίζα είναι η  $x = \xi$ .

Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε πως στο διάστημα  $[x_1, x_2]$  υπάρχει μόνο μία πραγματική ρίζα  $x = \xi$ , την οποία και θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε.

Αφού το διάστημα  $[x_1, x_2]$  περιέχει τη ρίζα  $\xi$ , υπολογίζουμε ένα μικρότερο διάστημα (ακριβώς το μισό σε μήκος), που να συνεχίσει να την περιέχει. Για τον λόγο αυτό ονομάζουμε  $x_3$  το μέσον του διαστήματος  $[x_1, x_2]$ :

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

και κάνουμε τον επόμενο έλεγχο που μας επιτρέπει να καθορίσουμε το υποδιάστημα, από τα δύο υποδιαστήματα του αρχικού διαστήματος, στο οποίο ανήκει η ρίζα  $\xi$ :

$$f(x_1)f(x_3) = \begin{cases} > 0 & \rightarrow \xi \in [x_3, x_2] \\ = 0 & \rightarrow \xi = x_3 \\ < 0 & \rightarrow \xi \in [x_1, x_3] \end{cases}$$

Επομένως, κάθε φορά που επαναλαμβάνουμε τη μέθοδο αυτή, περιορίζουμε στο μισό το διάστημα που περιέχει τη ρίζα  $\xi$ . Άρα, μετά από 10 επαναλήψεις το διάστημα θα είναι το  $1/2^{10} = 1/1024$  του αρχικού.

### 2.2.1. Η διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου διχοτόμησης

Αφού δοθεί η εξίσωση  $f(x)=0$  που πρέπει να επιλύσουμε, δημιουργούμε έναν πίνακα τιμών της συνάρτησης  $f$  (επομένως και τη γραφική της παράσταση) έτσι ώστε να βρούμε ένα (σχετικά μικρού μήκους) διάστημα  $[x_1, x_2]$  που περιέχει μία πραγματική ρίζα.

Στη συνέχεια, δημιουργούμε έναν πίνακα επαναληπτικής εφαρμογής της μεθόδου, της μορφής:

$\alpha$	$\beta$	$\mu=(\alpha+\beta)/2$	$f(\alpha)$	$f(\beta)$	$f(\mu)$	$f(\alpha) f(\mu)$
$x_1$	$x_2$	$x_3=(x_1+x_2)/2$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	έστω $>0$
$x_3$	$x_2$	$x_4=(x_3+x_2)/2$	$f(x_3)$	$f(x_2)$	$f(x_4)$	έστω $<0$
$x_3$	$x_4$	$x_5=(x_3+x_4)/2$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$	έστω $>0$
$x_5$	$x_4$	κ.λ.π.				

και σταματάμε όταν φθάσουμε σε ένα διάστημα το οποίο να έχει μικρότερο μήκος από το διπλάσιο της ζητούμενης ακρίβειας υπολογισμού της ρίζας της  $f$ , επιλέγοντας ως τιμή της ρίζας το κέντρο (το  $\mu$ ) του τελευταίου διαστήματος.

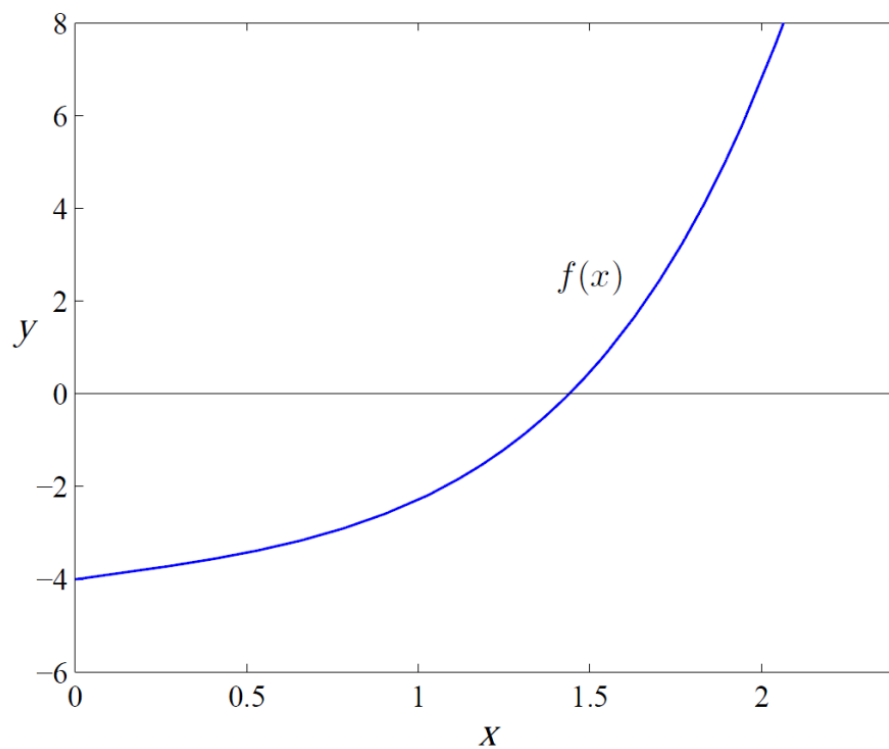
### 2.2.2. Παράδειγμα

Ζητείται η πραγματική ρίζα της συνάρτησης:  $f(x) = xe^x - x^2 - 4$

Δημιουργούμε τον επόμενο πίνακα τιμών :

$x$	$f(x)$
0.0	-4.000
0.2	-3.796
0.4	-3.563
0.6	-3.267
0.8	-2.860
1.0	-2.282
1.2	-1.456
1.4	-0.283
1.6	1.365
1.8	3.649
2.0	6.778

και το αντίστοιχο γράφημα της  $f$ :



**Σχήμα 2.2** Γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x)$ .

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αλλάζει πρόσημο μεταξύ των τιμών  $x=1.4$  και  $x=1.6$ . Στη συνέχεια δημιουργούμε τον επόμενο πίνακα, με τον οποίο διαιρούμε διαδοχικά τα διαστήματα που περιέχουν τη ρίζα της  $f(x)$ .

$x_1$	$x_2$	$\mu$	$f(x_1)$	$f(\mu)$
1.4	1.6	1.5	-0.28272	0.472534
1.4	1.5	1.45	-0.28272	0.079016
1.4	1.45	1.425	-0.28272	-0.10568
1.425	1.45	1.4375	-0.10568	-0.01431
1.4375	1.45	1.44375	-0.01431	0.03211
1.4375	1.44375	1.440625	-0.01431	0.008841
1.4375	1.440625	1.439063	-0.01431	-0.00275
1.439063	1.440625	1.439844	-0.00275	0.003043
1.439063	1.439844	1.439453	-0.00275	0.000147
1.439063	1.439453	1.439258	-0.00275	-0.0013

Εάν, λοιπόν, αναζητούμε την τιμή της ρίζας με ακρίβεια  $\varepsilon=0.0005$  σταματούμε τις επαναλήψεις στο σημείο αυτό, υιοθετώντας ως τιμή της ρίζας, το μέσον του τελευταίου διαστήματος:  $\xi = 1.4393$ . Να παρατηρήσουμε πως συχνά, κατά την υλοποίηση της μεθόδου της διχοτόμησης, σε αρκετές επαναλήψεις το ένα άκρο του διαστήματος (που περιέχει τη ρίζα) παραμένει σταθερό.

### 2.2.3. Εφαρμογή στο Excel.

Αρχικά, για να εξηγήσουμε τον τρόπο επίλυσης του προβλήματος αυτού με το Excel θα πρέπει να πούμε δύο λόγια για την εντολή IF.

#### i) Η απλή εντολή IF.

Στην απλή μορφή της η εντολή αυτή περιέχει τρία πεδία:

=IF (Λογική πρόταση ; Πράξη 1 ; Πράξη 2)

όπου η «Λογική πρόταση» μπορεί να περιέχει:

- ένα κελί ή πράξη με κελιά και
- μία σύγκριση του αποτελέσματος της πράξης με μία τιμή, χρησιμοποιώντας (συνήθως) τα σύμβολα  $>$ ,  $=$  και  $<$ .

Εάν η «Λογική πρόταση» είναι αληθής, τότε εκτελείται η Πράξη 1. Αντίθετα, εάν η «Λογική πρόταση» είναι ψευδής, τότε εκτελείται η Πράξη 2.

## ii) Η σύνθετη εντολή IF.

Η χρησιμότητα της σύνθετης εντολής IF είναι προφανής για τον καθένα που έχει ασχοληθεί έστω και ελάχιστα με τον προγραμματισμό. Στο Excel η σύνταξη της εντολής είναι η επόμενη:

=IF(Πρόταση 1; Πράξη 1; IF(Πρόταση 2; Πράξη 2; IF(Πρόταση 3; Πράξη 3; Πράξη 4)))

όπου:

- οι προτάσεις δημιουργούνται με τη βοήθεια των συμβόλων (<, >, =), όπως για παράδειγμα η:  $B12 < 100$  ή η:  $F7 >= 5$  κ.λ.π.
- οι πράξεις είναι όπως κάθε πράξη που γνωρίζουμε στο Excel, όπως για παράδειγμα η:  $E6 * H8 * \cos(F5)$ .
- οι προτάσεις δεν μπορούν να συναληθεύουν.
- η τιμή του κελιού δίνεται από την πράξη της οποίας η αντίστοιχη πρόταση αληθεύει.
- το πλήθος των προτάσεων είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 2.
- εάν καμία από τις 3 προτάσεις δεν αληθεύει τότε στο κελί θα τοποθετηθεί η πράξη 4.

## iii) Εφαρμογή στο Excel.

Επομένως, για να καταλήξουμε σε ένα διάστημα που να περιέχει την αναζητούμενη ρίζα, δημιουργούμε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x)$ , με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών. Στη συνέχεια, δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα, όπου ονομάζουμε (ως επικεφαλίδες των στηλών) τα όρια του αρχικού διαστήματος  $\alpha$  και  $\beta$  και  $\mu$  τη μέση του. Τα **A**, **B**, **C** κ.λ.π., στην πρώτη γραμμή και τα **1**, **2**, **3** κ.λ.π., στην πρώτη στήλη, είναι η αρίθμηση των στηλών και των γραμμών του Excel.

Γράφουμε λοιπόν τις εντολές:

	A	B	C	D	E
1	$\alpha$	$\beta$	$\mu = (\alpha + \beta)/2$	$f(\alpha)$	$f(\mu)$
2	$x_1$	$x_2$	$= (A2 + B2)/2$	$= f(A2)$	$f(C2)$
3	$= \text{if}(D2 * E2 < 0; A2; C2)$	$= \text{if}(D2 * E2 < 0; C2; B2)$			
4					

Παρατηρούμε πως, στα κελιά A2 και B2 γράφουμε το αρχικό διάστημα που περιέχει τη ρίζα  $\xi$  και στο κελί C2 υπολογίζουμε το κέντρο του διαστήματος. Στα κελιά D2 και E2 υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης  $f$  στα σημεία  $x_1$  και  $x_3$ . Τώρα, στο κελί A3 θα κάνουμε έναν έλεγχο για να διαπιστώσουμε εάν το αριστερό άκρο του νέου διαστήματος (που έχει μήκος το μισό του αρχικού) θα είναι το  $x_1$ , εάν οι τιμές  $f(x_1)$  και  $f(x_3)$  είναι ετερόσημες, ή θα είναι το  $x_3$ , εάν οι τιμές  $f(x_1)$  και  $f(x_3)$  είναι ομόσημες. Αντίστοιχα, αποφασίζουμε και για την τιμή του κελιού B3.

Στη συνέχεια σέρνουμε προς τα κάτω τις πράξεις των κελιών C2, D2 και E2, έτσι ώστε να επαναληφθούν οι πράξεις αυτές για το νέο διάστημα της σειράς 3. Τέλος, σέρνουμε ολόκληρη τη σειρά 3 για να υπολογίσουμε τον πίνακα προσεγγιστικής εκτίμησης της ρίζας. Η αντιγραφή της σειράς 3 συνεχίζεται μέχρι να επιτευχθεί η επιθυμητή ακρίβεια.

#### 2.2.4. Υλοποίηση της μεθόδου σε MATLAB.

Η συνάρτηση rf\_bisection, που ακολουθεί, έχει παραμέτρους

- fs = ένα string με τη συνάρτηση π.χ. '3\*x^2+2\*sin(x)-5'
- a = την αρχή του διαστήματος αναζήτησης της ρίζας
- b = το τέλος του διαστήματος αναζήτησης της ρίζας
- eps = την επιθυμητή ακρίβεια

Ενώ οι έξοδοι της είναι

- root = η ρίζα που βρέθηκε
- res = ένα string που μας πληροφορεί αν όλα πήγαν καλά και βρέθηκε σωστά η ρίζα ή αν κάτι δεν πήγε καλά.

```
function[root,res]=rf_bisection(fs,a,b,eps)
f=inline(fs);
f=vectorize(f);

fa=f(a);
fb=f(b);

if (fa*fb>0)
    res='Το θεώρημα του Bolzano δεν ικανοποιείται!';
    root=NaN;
else

    m=(a+b)/2;
    fm=f(m);

    max_steps=(log(b-a)-log(eps))/log(2);

    step=1;
    while (fm~=0) && (b-a>eps) && (step<max_steps)
        if (fa*fm>0)
            a=m;
        else
            b=m;
        end
        m=(a+b)/2;
```

```

        fm=f (m) ;
        step=step+1;
    end

    res='Όλα ok';

    root=m;

end

```

### 2.3. Μέθοδος γραμμικής παρεμβολής (regula falsi).

Η μέθοδος αυτή είναι παρόμοια με τη μέθοδο της διχοτόμησης και μπορεί να προσεγγίσει μόνον, μία περιττής τάξης, ρίζα. Οι προϋποθέσεις εκκίνησής της είναι όμοιες μ' αυτές της προηγούμενης παραγράφου:

- η συνάρτηση  $f(x)$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[x_1, x_2] \in \Pi.O.$
- οι τιμές της  $f(x)$  στα σημεία  $x_1$  και  $x_2$  είναι ετερόσημες (δηλαδή  $f(x_1)f(x_2) < 0$ )

Αφού το διάστημα  $[x_1, x_2]$  περιέχει τη ρίζα  $\zeta$ , υπολογίζουμε ένα μικρότερο διάστημα που να συνεχίσει να την περιέχει.

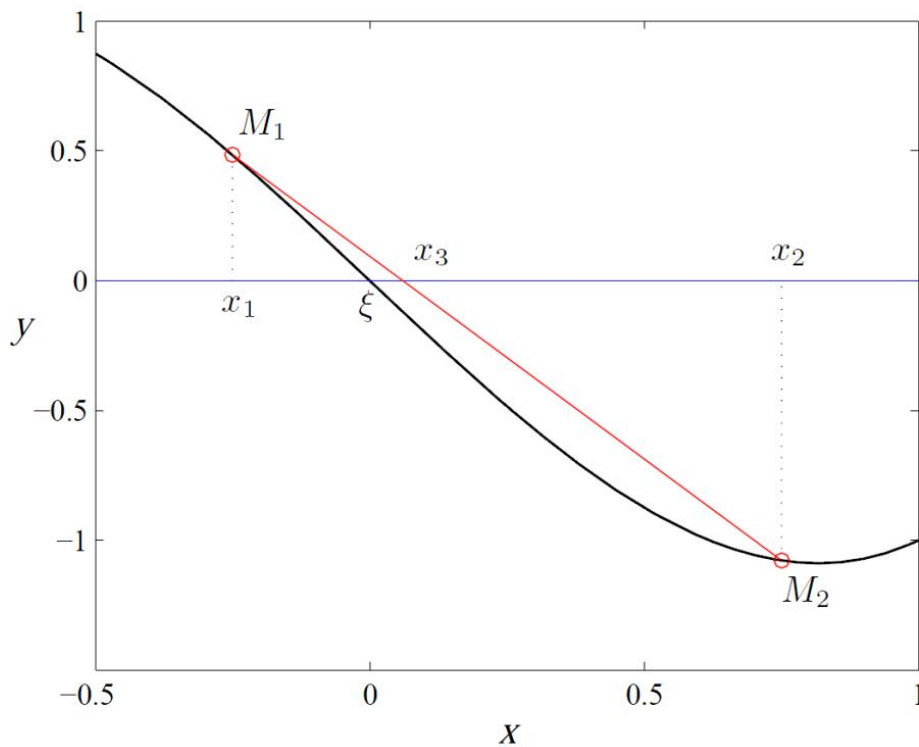
Η μέθοδος του υπολογισμού της ρίζας της συνάρτησης  $f$  με γραμμική παρεμβολή, προσπαθεί να μειώσει με διαδοχικά βήματα το διάστημα που την περιέχει. Ξεκινώντας από τα σημεία  $x_1$  και  $x_2$ , υπολογίζει το σημείο  $x_3$ , που είναι το σημείο τομής του ευθύγραμμου τμήματος  $M_1M_2$  με τον άξονα των  $x$  (βλέπε και Σχήμα 2.3) με τη βοήθεια της σχέσης:

$$x_3 = x_1 + \frac{(x_2 - x_1)f(x_1)}{f(x_1) - f(x_2)}$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί εύκολα να αποδειχτεί από την ομοιότητα των τριγώνων που δημιουργούνται (σχήμα 2.3):

$$\begin{aligned} \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} &= \frac{f(x_1)}{-f(x_2)} \Rightarrow \\ \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} &= \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_2)} \Rightarrow \\ x_3 - x_1 &= (x_2 - x_1) \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_2)} \Rightarrow \\ x_3 &= x_1 + \frac{(x_2 - x_1)f(x_1)}{f(x_1) - f(x_2)} \end{aligned}$$

όπου στην πρώτη ισότητα θέσαμε στον παρονομαστή το β' μέλος την τιμή  $-f(x_2)$ , διότι υποθέσαμε πως  $f(x_2) < 0$  και στην αναλογία των πλευρών των τριγώνων επιβάλλεται να θέσουμε θετικές ποσότητες.



**Σχήμα 2.3** Γραφικά, η μέθοδος γραμμικής παρεμβολής.

Στη συνέχεια, κάνουμε τον επόμενο έλεγχο που μας επιτρέπει να καθορίσουμε το υποδιάστημα, από τα δύο υποδιαστήματα του αρχικού διαστήματος, στο οποίο ανήκει η ρίζα  $\xi$ :

$$f(x_1)f(x_3) = \begin{cases} > 0 & \rightarrow \xi \in [x_3, x_2] \\ = 0 & \rightarrow \xi = x_3 \\ < 0 & \rightarrow \xi \in [x_1, x_3] \end{cases}$$

Θα προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε τη σχετική θέση της ρίζας  $x = \xi$  της συνάρτησης  $f$  ως προς το σημείο  $x_3$ . Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

	Αν συμβαίνει...	...ή ισοδύναμα	Θέση της ρίζας $\xi$
1η	$f(x_3)f(x_1) > 0$	$f(x_3)f(x_2) < 0$	$\xi \in (x_3, x_2)$
2η	$f(x_3)f(x_2) > 0$	$f(x_3)f(x_1) < 0$	$\xi \in (x_1, x_2)$
3η	$f(x_3)f(x_1) = 0$	$f(x_3)f(x_1) = 0$	$\xi = x_3$

Έτσι, λοιπόν, επαναλαμβάνουμε μερικές φορές την προηγούμενη διαδικασία καταλήγοντας σε μία ακολουθία  $x_3, x_4, x_5, \dots$  η οποία συγκλίνει στο  $\xi$ . Όμως στη μέθοδο αυτή, σε αντίθεση με τη μέθοδο

διχοτόμησης, είναι δυνατόν να μην ελαττώνεται το μήκος του διαστήματος που περιέχει τη ρίζα  $\xi$ . Συχνά είναι το ένα μόνο άκρο του διαστήματος που συγκλίνει προς τη ρίζα  $\xi$ . Στην περίπτωση αυτή η ένδειξη ικανοποιητικής προσέγγισης της ρίζας είναι το μέγεθος της μεταβολής ανάμεσα στο άκρο που αλλάζει και στην καινούρια του τιμή. Τέλος μια δευτερεύουσα ένδειξη είναι και η τιμή της συνάρτησης στο  $x_3$ , η οποία πρέπει να συγκλίνει προς το μηδέν.

### 2.3.1. Παράδειγμα

Επανερχόμαστε στο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου, αναζητώντας την πραγματική ρίζα της συνάρτησης :

$$f(x) = xe^x - x^2 - 4$$

#### Λύση:

Στην προηγούμενη παράγραφο, με τη βοήθεια του πίνακα τιμών και της γραφικής της παράστασης, επιλέχθηκε σαν διάστημα που περιέχει τη ρίζα το  $[1.4, 1.6]$ . Με τον τρόπο αυτό θα μπορέσουμε να συγκρίνουμε την ταχύτητα σύγκλισης των δύο μεθόδων:

a	b	$\mu$	$f(a)$	$f(b)$	$f(\mu)$
1.4	1.6	1.43432	-0.28272	1.364852	-0.03774
1.43432	1.6	1.438777	-0.03774	1.364852	-0.00486
1.438777	1.6	1.439349	-0.00486	1.364852	-0.00062
1.439349	1.6	1.439423	-0.00062	1.364852	-8E-05
1.439423	1.6	1.439432	-8E-05	1.364852	-1E-05
1.439432	1.6	1.439433	-1E-05	1.364852	-1.3E-06

Η σύγκριση των πινάκων των δύο λύσεων φανερώνει τη μεγαλύτερη ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου γραμμικής παρεμβολής, σε σχέση με τη μέθοδο διχοτόμησης. Ταυτόχρονα παρατηρούμε πως ενώ το μήκος του τελευταίου διαστήματος  $[1.439, 1.6]$  είναι πολύ μεγάλο, εντούτοις το αριστερό του όριο συνέκλινε στη ρίζα ήδη από τις πρώτες τρεις επαναλήψεις, φθάνοντας ήδη την ακρίβεια που πέτυχε η μέθοδος της διχοτόμησης μετά από 9 επαναλήψεις.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει, πως μια πιο έξυπνη μέθοδος μπορεί να επιτύχει πολύ μεγαλύτερη ακρίβεια, με πολύ λιγότερες πράξεις.



### 2.3.2 Υλοποίηση της μεθόδου σε MATLAB.

Η συνάρτηση `rf_regula_falsi`, που ακολουθεί, έχει παραμέτρους

- `fs` = ένα string με τη συνάρτηση π.χ. `'3*x^2+2*sin(x)-5'`
- `a` = την αρχή του διαστήματος αναζήτησης της ρίζας
- `b` = το τέλος του διαστήματος αναζήτησης της ρίζας



- `eps` = την επιθυμητή ακρίβεια
- `max_steps` = ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων της μεθόδου. Αν ο αριθμός αυτός ξεπεραστεί, η μέθοδος σταματά με ένα μήνυμα λάθους.

Ενώ οι έξοδοι της είναι

- `root` = η ρίζα που βρέθηκε
- `res` = ένα `string` που μας πληροφορεί αν όλα πήγαν καλά και βρέθηκε σωστά η ρίζα ή αν κάτι δεν πήγε καλά.

```
function[root,res]=rf_regula_falsi(fs,a,b,eps,max_steps)
f=inline(fs);
f=vectorize(f);
fa=f(a);
fb=f(b);
if (fa*fb>0)
    res='Το θεώρημα του Bolzano δεν ικανοποιείται!';
    root=NaN;
else
    m=a+(b-a)*fa/(fa-fb);
    fm=f(m);

    step=1;
    while (fm~=0) && (abs(a-m)>eps) && (abs(b-m)>eps)
        if (fa*fm>0)
            a=m;
            fa=fm;
        else
            b=m;
            fb=fm;
        end
        m=a+(b-a)*fa/(fa-fb);
        fm=f(m);
        step=step+1;
    end
    if (step<max_steps)
        res='Όλα ok';
        root=m;
    else
        res='Πάρα πολλά βήματα! Δεν συγκλίνει!';
```

```

        root=m;
    end
end

```

## 2.4. Μέθοδος Newton (Newton–Raphson)

### 2.4.1. Το πρόβλημα και η γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου

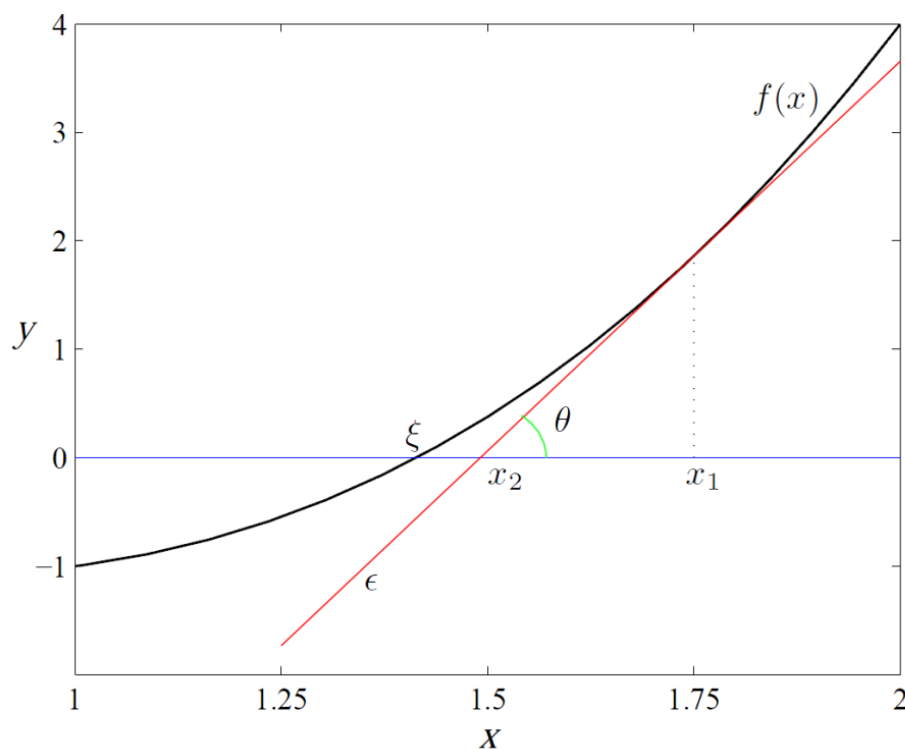
Για τον υπολογισμό, με τη μέθοδο του Newton, μιας πραγματικής ρίζας της συνάρτησης  $y = f(x)$ , θα πρέπει να ισχύουν οι εξής προϋποθέσεις:

- Η  $f(x)$  πρέπει να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, σε μία περιοχή ( $\pi_0$ ), γύρω από τη ρίζα  $\xi$ , που αναζητούμε.
- Γνωρίζουμε μια πρώτη προσέγγιση  $x_1$ , της ρίζας  $\xi$ , η οποία ανήκει στην  $\pi_0$ .

Τότε η τιμή  $x_2$ , που προκύπτει από τον επόμενο τύπο, είναι (κατά κανόνα) μια καλύτερη προσέγγιση της ρίζας  $\xi$ , απ' ότι ήταν η  $x_1$ .

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Η γεωμετρική ερμηνεία του τύπου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.4), όπου παρατηρούμε πως η νέα προσέγγιση της  $\xi$  (η  $x_2$ ) γίνεται με την ευθεία που εφάπτεται στην καμπύλη της  $f(x)$  στο σημείο:  $(x_1, f(x_1))$



**Σχήμα 2.4** Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου του Newton..

Στη συνέχεια, υιοθετώντας ως προσεγγιστική ρίζα το  $x_2$ , δηλαδή την τιμή του  $x$  στην οποία η εφαπτόμενη ευθεία τέμνει τον άξονα των  $x$ , επαναλαμβάνουμε τις πράξεις του τύπου, υπολογίζοντας μια νέα προσέγγιση  $x_3$  κ.ο.κ. Αυτή η διαδικασία σταματά όταν η απόλυτη τιμή της διαφοράς ανάμεσα στην προηγούμενη  $x_n$  και στην επόμενη  $x_{n+1}$  προσέγγιση είναι μικρότερη από την απαιτούμενη ακρίβεια ( $\varepsilon$ ).

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

## 2.4.2. Απόδειξη του τύπου του Newton.

Η ευθεία  $\varepsilon$  (στο Σχήμα 2.4) είναι εφαπτομένη της καμπύλης της  $f(x)$ , στο σημείο  $(x_1, f(x_1))$ . Επομένως ο συντελεστής κατεύθυνσής της (η κλίση της) θα είναι ίσος με την  $\tan(\theta)$ , αλλά και με την παράγωγο της συνάρτησης στο σημείο  $x_1$ . Από το μικρό τρίγωνο που σχηματίζεται προκύπτει η σχέση:

$$f'(x_1) = \tan \theta = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

## 2.4.3. Ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου Newton – Raphson.

Σε γενικές γραμμές, η ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου είναι μεγάλη. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι σε κάθε επανάληψη πλησιάζει στη ρίζα, βελτιώνοντας την ακρίβεια της προσέγγισης κατά δύο δεκαδικά. Βέβαια, το πόσο γρήγορα αρχίζει να συγκλίνει, εξαρτάται από την επιλογή της αρχικής τιμής  $x_1$ .

Ας πάρουμε για παράδειγμα τη συνάρτηση  $f(x) = x^5 - 1$ , που έχει την (προφανή) ρίζα  $x = 1$  και ας εφαρμόσουμε τη μέθοδο για να βρούμε αυτή τη ρίζα. Ας δοκιμάσουμε, αρχικά, να πάρουμε ως αρχική τιμή την  $x_1 = 1.3$ . Στην περίπτωση αυτή έχουμε την παρακάτω ακολουθία επαναλήψεων της μεθόδου.

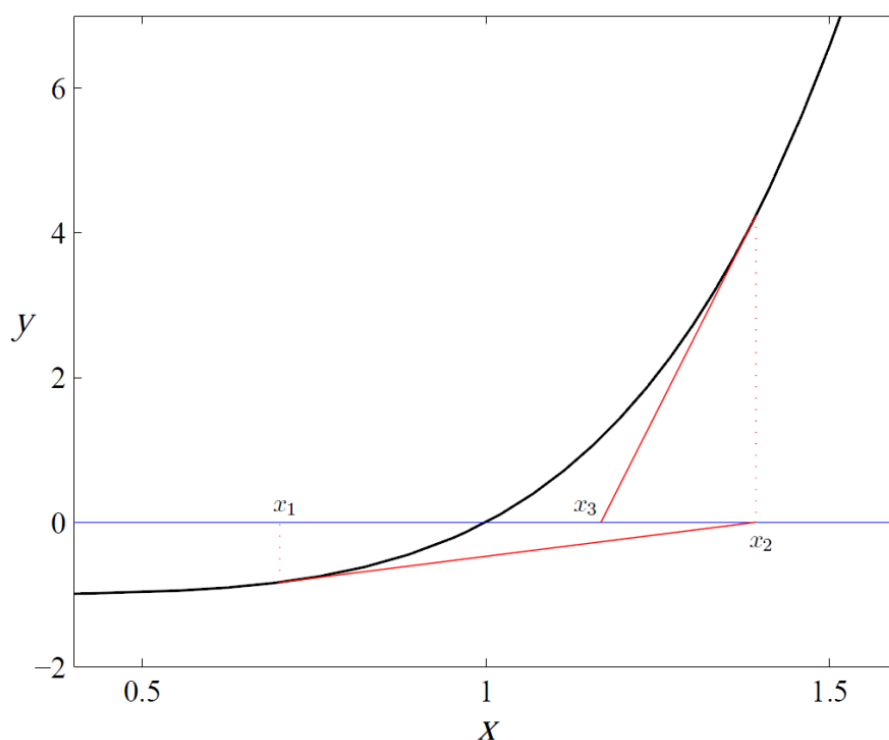
i	$x_i$	$f(x)$	$f'(x)$
1	1.30000000000000	2.71293000000000	14.28050000000000
2	1.1100255593292	0.685252168341106	7.591051188765370
3	1.0197545084166	0.102752802670365	5.406952328078820
4	1.0007506784518	0.003759031672218	5.015030483042310
5	1.0000011253464	0.000005626744727	5.000022506966240
6	1.00000000000025	0.000000000012664	5.000000000050660

Ας δοκιμάσουμε τώρα να πάρουμε ως αρχική τιμή την  $x_1 = 0.7$ , μια τιμή που απέχει από τη ρίζα ίδια απόσταση με την προηγούμενη αρχική τιμή, αλλά που βρίσκεται από την άλλη πλευρά της ρίζας. Στη δεύτερη αυτή περίπτωση έχουμε την παρακάτω ακολουθία επαναλήψεων της μεθόδου.

i	$x_i$	$f(x)$	$f'(x)$
1	0.70000000000000	-0.831930000000000	1.200500000000000
2	1.3929862557268	4.244863099628170	18.825968591096000
3	1.1675071214614	1.169190489143240	9.289838362733340
4	1.0416501965623	0.226336065632397	5.886506188352070

i	$x_i$	$f(x)$	$f'(x)$
5	1.0032002130933	0.016103807374954	5.064312158795830
6	1.0000203523600	0.000101765942046	5.000407059625830
7	1.0000000008284	0.000000004142017	5.000000016568070

Παρατηρούμε ότι η πρώτη προσέγγιση της ρίζας, δηλαδή η  $x_1 = 0.7$ , οδηγεί στην τιμή  $x_2 = 1.3929862557268$ , η οποία βρίσκεται από την άλλη πλευρά της ρίζας και μάλιστα πιο μακριά από την πρώτη προσέγγιση, όπως μπορούμε να δούμε και στο Σχήμα 2.5. Επίσης και η τιμή της  $f(x_2)$  είναι, κατ' απόλυτη τιμή, μεγαλύτερη της  $f(x_1)$ , απέχει δηλαδή περισσότερο από την επιθυμητή τιμή  $f(x) \equiv 0$ .



**Σχήμα 2.5** Ξεκινώντας τη μέθοδο Newton – Raphson με αρχική τιμή από την «λάθος» πλευρά της ρίζας.

Εάν τώρα θεωρήσουμε πως υπάρχει η λάθος και η σωστή πλευρά προσέγγισης, θα πούμε τα εξής:

- Όταν η καμπύλη της  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, βολεύει να ξεκινούμε από την πλευρά της ρίζας όπου η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.
- Όταν η καμπύλη της  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, βολεύει να ξεκινούμε από την πλευρά της ρίζας όπου η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές.

Τα προηγούμενα μπορούν να ειπωθούν και ως εξής: Η πρώτη προσέγγιση  $x_1$  βρίσκεται από τη «σωστή» πλευρά της ρίζας  $\xi$ , όταν ισχύει η σχέση:

$$f(x_1)f''(x_1) > 0$$

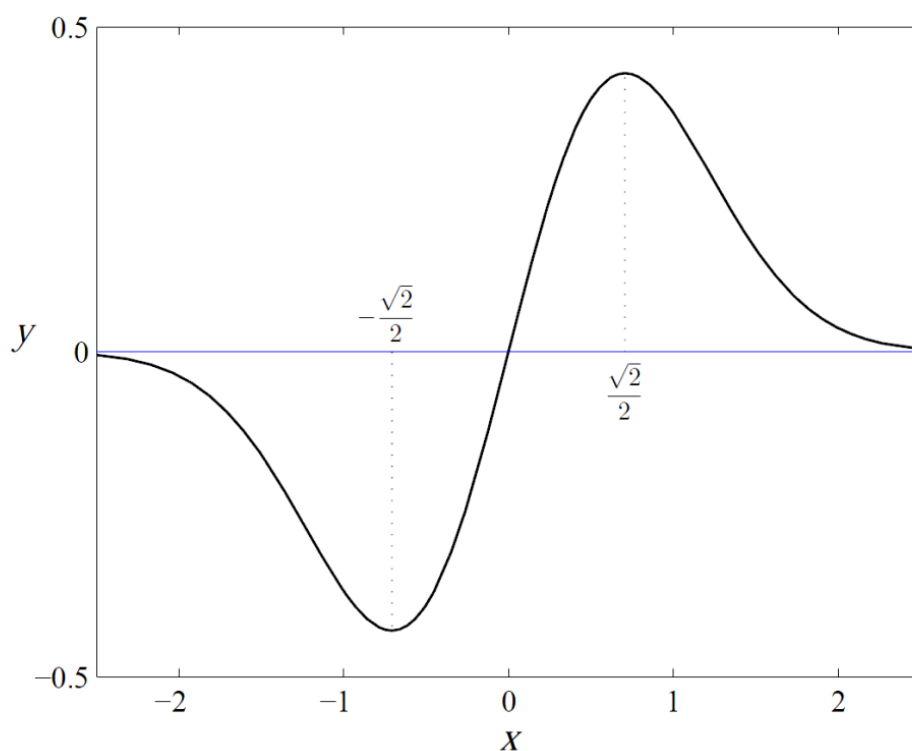
#### 2.4.4. Περιπτώσεις αποτυχίας της μεθόδου Newton – Raphson.

Η μέθοδος Newton – Raphson είναι μια πολύ ισχυρή αλλά και πολύ απλή μέθοδος. Η δύναμη της μεθόδου είναι ότι, γενικά, συγκλίνει πολύ γρήγορα στη ρίζα της εξίσωσης. Δυστυχώς, όπως σχεδόν όλα τα ισχυρά εργαλεία, η Newton – Raphson μπορεί να αποτύχει αν δεν χρησιμοποιηθεί κατάλληλα. Η επιτυχία εύρεσης της ρίζας εξαρτάται από τη μορφή της συνάρτησης και φυσικά την επιλογή της πρώτης προσεγγιστικής τιμής  $x_1$ .

Στην συνέχεια, θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις αποτυχίας της μεθόδου Newton – Raphson, χρησιμοποιώντας ως παράδειγμα τη συνάρτηση:

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 2.6



**Σχήμα 2.6** Γραφική παράσταση της  $f(x)$ .

Φυσικά, με μια απλή μόνο ματιά, μπορούμε να δούμε ότι η μοναδική ρίζα της παραπάνω συνάρτησης είναι η  $x=0$  (το  $e^a$ , όπου  $a$  ένας οποιοδήποτε αριθμός είναι πάντα μεγαλύτερο του 0). Παρόλο, λοιπόν, που κανείς δεν θα χρησιμοποιούσε κάποια υπολογιστική μέθοδο για να βρει τη ρίζα της παραπάνω συνάρτησης, εντούτοις αποτελεί ένα πολύ καλό παράδειγμα αποτυχίας της μεθόδου Newton – Raphson.

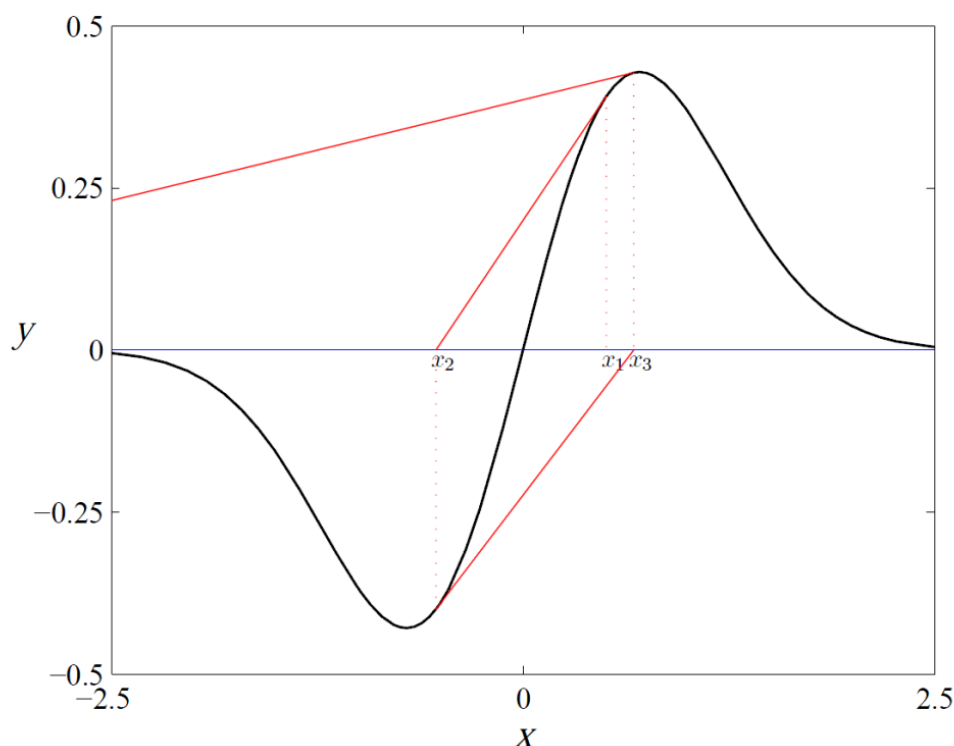
#### Περίπτωση 1<sup>η</sup>

Ο τύπος του Newton δεν μπορεί να λειτουργήσει όταν η παράγωγος της συνάρτησης  $f$ , στο  $x_1$ , ή σε κάποιο άλλο από τα  $x_j$ , είναι ίση με το μηδέν (ή, στην πράξη, πολύ κοντά στο μηδέν). Στην περίπτωση που είναι ίση με το μηδέν, έχουμε προφανώς στον επαναληπτικό τύπο διαίρεση με το μηδέν. Στην περίπτωση που είναι πολύ κοντά στο μηδέν, τότε η εφαπτομένη είναι σχεδόν οριζόντια και το επόμενο  $x_j$  θα είναι ένας πάρα πολύ μεγάλος αριθμός. Αν διαπιστωθεί πως κάτι τέτοιο συμβαίνει, τότε πρέπει να αλλαχθεί η πρώτη προσεγγιστική τιμή  $x_1$ .

Έστω λοιπόν ότι επιλέγουμε ως αρχική τιμή την  $x_1 = 0.5065$ . Η εφαρμογή του τύπου των Newton – Raphson μας δίνει την παρακάτω ακολουθία βημάτων, η οποία εμφανίζεται γραφικά στο Σχήμα 2.7.

i	$x_i$	$f(x)$	$f'(x)$
1	0.5065	0.391890347027432	0.376737382562755
2	-0.533721557949993	-0.401422935899464	0.323624370882431
3	0.706676174782243	0.428881783399895	0.000738942035565
4	-579.6930882965420	0	0

Βλέπουμε ότι στο τρίτο βήμα πλησιάζουμε πολύ κοντά στο τοπικό μέγιστο της συνάρτησης, όπου η παράγωγος είναι πολύ κοντά στο μηδέν και η μέθοδος μας στέλνει... στο φεγγάρι! Εκεί βέβαια η τιμή της συνάρτησης και της παραγώγου της είναι τόσο μικρές που ο Η/Υ δεν μπορεί να τις υπολογίσει (μικρότερες από το  $10^{-308}$ ) και τις θεωρεί μηδέν.

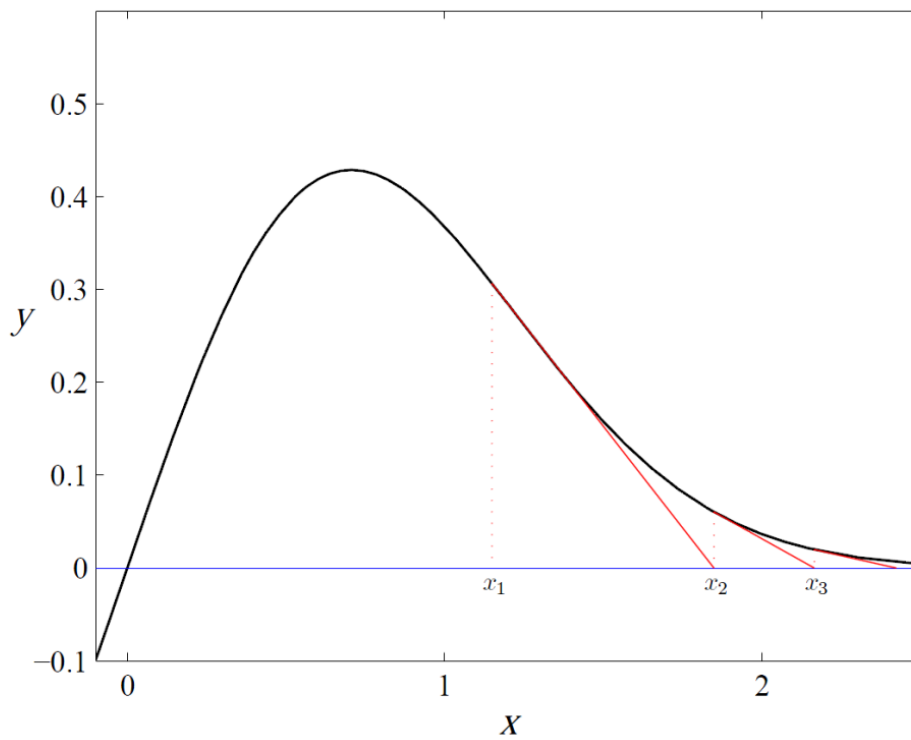


**Σχήμα 2.7** Περίπτωση αποτυχίας στην οποία η μέθοδος συναντά ένα σημείο στο οποίο η  $f'(x)$  είναι σχεδόν μηδέν.

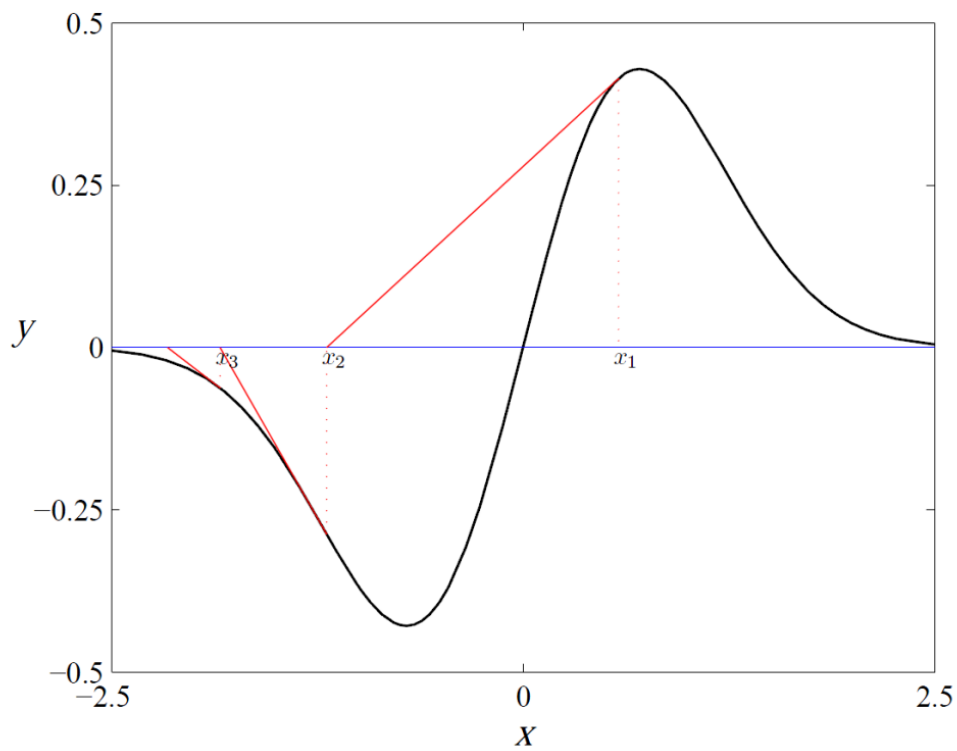
## Περίπτωση 2<sup>η</sup>

Η συνάρτηση να τείνει στο μηδέν όταν το  $x$  τείνει στο άπειρο (ή στο μείον άπειρο). Σε αυτή την περίπτωση μπορεί να παγιδευτεί η μέθοδος και να ακολουθήσει τη συνάρτηση προς το άπειρο νομίζοντας ότι θα βρει τη ρίζα. Αλλά ρίζα δεν υπάρχει. Η περίπτωση αυτή φαίνεται γραφικά στα Σχήματα 2.8 και 2.9.

Το ίδιο μπορεί να συμβεί όταν η συνάρτηση δεν τείνει στο μηδέν, αλλά σε έναν άλλο αριθμό  $a$  και, καθώς το  $x$  τείνει στο άπειρο, η συνάρτηση είναι κοίλη ( $f'' > 0$ ) αν  $a > 0$  ή κυρτή ( $f'' < 0$ ) αν  $a < 0$ , δηλαδή, συνδυάζοντας τις δύο περιπτώσεις, αν  $a \cdot f''(x) > 0$



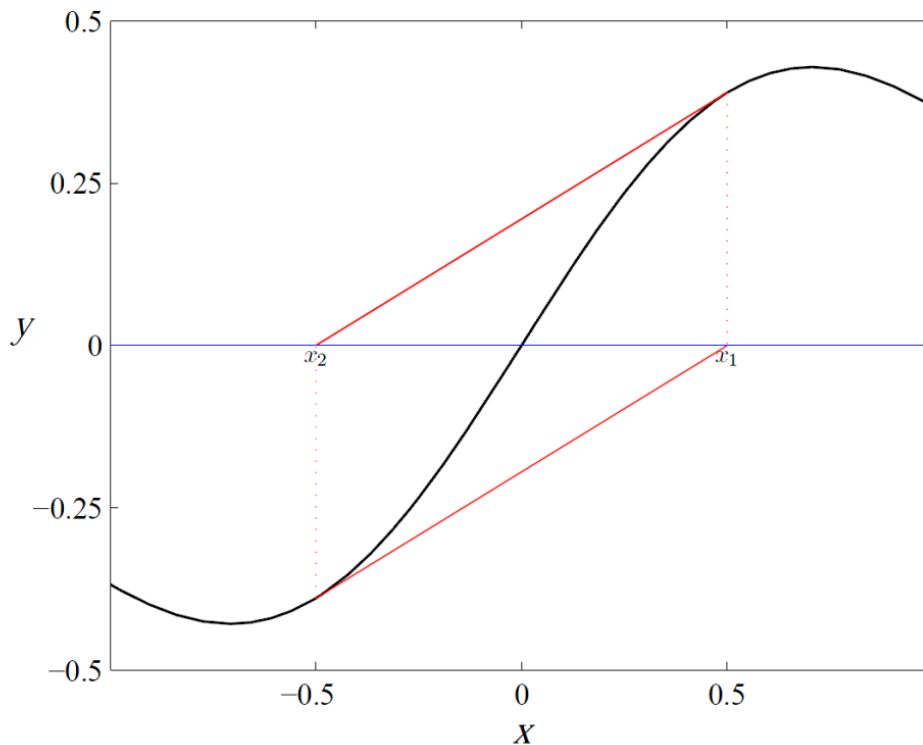
**Σχήμα 2.8** Περίπτωση αποτυχίας στην οποία η μέθοδος ακολουθεί τη συνάρτηση στο άπειρο.



**Σχήμα 2.9** Περίπτωση αποτυχίας στην οποία η μέθοδος, αφού πλησιάσει ένα τοπικό ακρότατο, στέλνεται σε σημείο τέτοιο ώστε στη συνέχεια να ακολουθεί τη συνάρτηση στο μείον άπειρο.

### Περίπτωση 3<sup>η</sup>

Τέλος, αν και πολύ σπάνια, υπάρχει περίπτωση, η μέθοδος να εγκλωβιστεί σε έναν «φαύλο» κύκλο, όπου μετά από κάποιες επαναλήψεις να επιστρέφει σε ένα από το προηγούμενα  $x_i$  και η ακολουθία των  $x_i$  να επαναλαμβάνεται περιοδικά. Στη συνάρτηση  $f(x) = xe^{-x^2}$ , που χρησιμοποιούμε ως παράδειγμα, αυτό μπορεί να συμβεί αν δώσουμε αρχική τιμή  $x_1 = 0.5$ , όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.10



**Σχήμα 2.10** Περίπτωση αποτυχίας στην οποία η μέθοδος εγκλωβίζεται σε έναν «φαύλο» κύκλο.

### Περίπτωση επιτυχίας!

Όπως είδαμε στα προηγούμενες περιπτώσεις, η μέθοδος Newton – Raphson αποτυγχάνει να βρει τη ρίζα της συνάρτησης  $f(x) = xe^{-x^2}$ , αν η αρχική τιμή είναι  $|x_1| \geq 0.5$ . Για την τιμή  $|x_1| = 0.5$  η μέθοδος εγκλωβίζεται σε φαύλο κύκλο, ενώ για τιμή  $|x_1| > 0.5$  η μέθοδος «ολισθαίνει» προς το άπειρο (μείον ή συν).

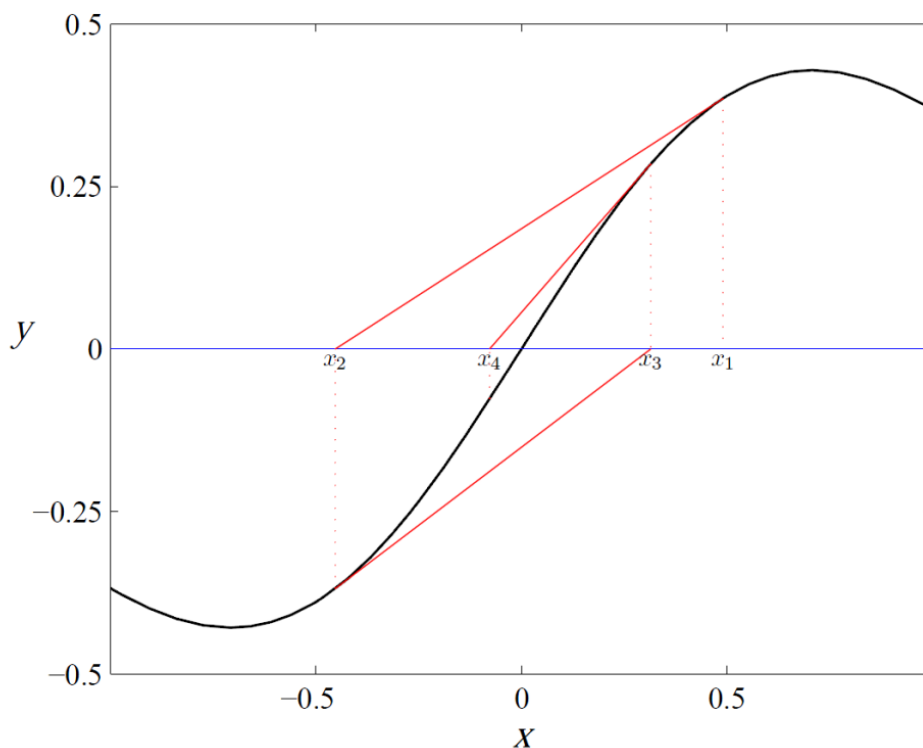
Αντιθέτως, αν η αρχική μας τιμή είναι  $|x_1| < 0.5$  η μέθοδος επιτυγχάνει να βρει τη ρίζα και μάλιστα πολύ γρήγορα, όπως μπορούμε να δούμε στον παρακάτω πίνακα επαναλήψεων.

i	$x_i$	$f(x)$	$f'(x)$
1	0.490000000000000	0.385409109084593	0.408848275310554
2	-0.452670257791458	-0.368799667605508	0.480831061588273
3	0.314334407812497	0.284761301945179	0.726897780073397
4	-0.077414349373728	-0.076951794038154	0.982110594467265



5	0.000939142047364	0.000939141219052	0.999997354038589
6	-0.000000001656627	-0.000000001656627	1.000000000000000
7	0.000000000000000	0.000000000000000	1.000000000000000

Στο Σχήμα 2.11 εμφανίζονται γραφικά οι πρώτες τέσσερις επαναλήψεις του παραπάνω πίνακα



**Σχήμα 2.11** Οι πρώτες 4 επαναλήψεις της μεθόδου για αρχική τιμή 0.49. Η μέθοδος συγκλίνει γρήγορα προς τη ρίζα..

## 2.4.5. Παραδείγματα

### Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>

Για τελευταία φορά, επανερχόμαστε στο παράδειγμα των προηγούμενων παραγράφων, αναζητώντας την πραγματική ρίζα της συνάρτησης

$$f(x) = xe^x - x^2 - 4$$

Ξεκινώντας από το σημείο  $x_1 = 1.6$ , που είναι το δεξί άκρο του αρχικού διαστήματος, το οποίο επιλέγουμε επειδή η συνάρτηση  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα άνω.

Θα δημιουργήσουμε λοιπόν έναν πίνακα όπου θα εμφανίζονται τα βασικά στοιχεία του τύπου:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{x_1 e^{x_1} - x_1^2 - 4}{e^{x_1} + x_1 e^{x_1} - 2x_1}$$

$x$	1.6	1.458972	1.439751	1.439433396	1.43943331
$f(x)$	1.364852	0.147221	0.002356	6.31775E-07	4.61853E-14
$f'(x)$	9.677884	7.659412	7.415383	7.41140737	7.411406304



## Παράδειγμα 2<sup>ο</sup>

Να υπολογισθεί μία ρίζα της συνάρτησης:

$$y = f(x) = x^3 - x \ln(x) - e^{-x} - 20 \quad (x > 0)$$

με ακρίβεια  $\varepsilon=0.00001$

Όπως και σε προηγούμενες περιπτώσεις, ξεκινούμε κάνοντας έναν μικρό πίνακα τιμών της συνάρτησης, αντικαθιστώντας την τιμή της συνάρτησης στο 0 με το όριο της  $f(x)$ , όταν το  $x$  τείνει στο 0 από μεγαλύτερες τιμές (και με τη βοήθεια του κανόνα του De l'Hôpital):

$x_k$	0	1	2	3
$y_k$	-21	-19.37	-13.52	3.65

από τον οποίο προκύπτει πως η ρίζα βρίσκεται στο διάστημα (2, 3), στα άκρα του οποίου η  $f$  παίρνει τιμές ετερόσημες.

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε τη συνάρτηση  $f$ :

$$f'(x) = \frac{d}{dx} [x^3 - x \ln(x) - e^{-x} - 20] = 3x^2 - \ln(x) + e^{-x} - 1$$

οπότε ο τύπος του Newton (που υπολογίζει το  $x_{v+1}$  από την προηγούμενη προσέγγιση  $x_v$ ) γίνεται:

$$x_{v+1} = x_v - \frac{x_v^3 - x_v \ln(x_v) - e^{-x_v} - 20}{3x_v^2 - \ln(x_v) + e^{-x_v} - 1}$$

Τέλος κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών, στον οποίο συμμετέχουν όλες οι ποσότητες που παίρνουν μέρος στον τύπο, ξεκινώντας από την τιμή  $x=3$  (βρίσκεται από τη σωστή πλευρά σύμφωνα με τα προηγούμενα):

$x$	3	2.853539	2.845262	2.845236
$f(x)$	3.654376	0.18572	0.000572	
$f'(x)$	24.95117	22.43713	22.299	

Θεωρούμε πως έχουμε υπολογίσει τη ρίζα με την απαιτούμενη ακρίβεια όταν η απόσταση ανάμεσα στην τελευταία προσέγγιση ( $x_v$ ) και στην προηγούμενη ( $x_{v-1}$ ) είναι, κατ' απόλυτη τιμή, μικρότερη από την απαιτούμενη ακρίβεια:

$$|x_v - x_{v-1}| < \varepsilon$$

Βέβαια, μια ισχυρή ένδειξη ακρίβειας είναι και η τιμή της συνάρτησης  $f(x_v)$  (δηλαδή πόσο κοντά είναι στο μηδέν), μόνο που δεν είναι απόλυτη ένδειξη για το πόσο κοντά είμαστε στη ρίζα που αναζητούμε.

Αξίζει επίσης να παρατηρήσουμε πως η ακρίβεια της κάθε επόμενης προσέγγισης βελτιώνεται κατά δύο επιπλέον δεκαδικά.

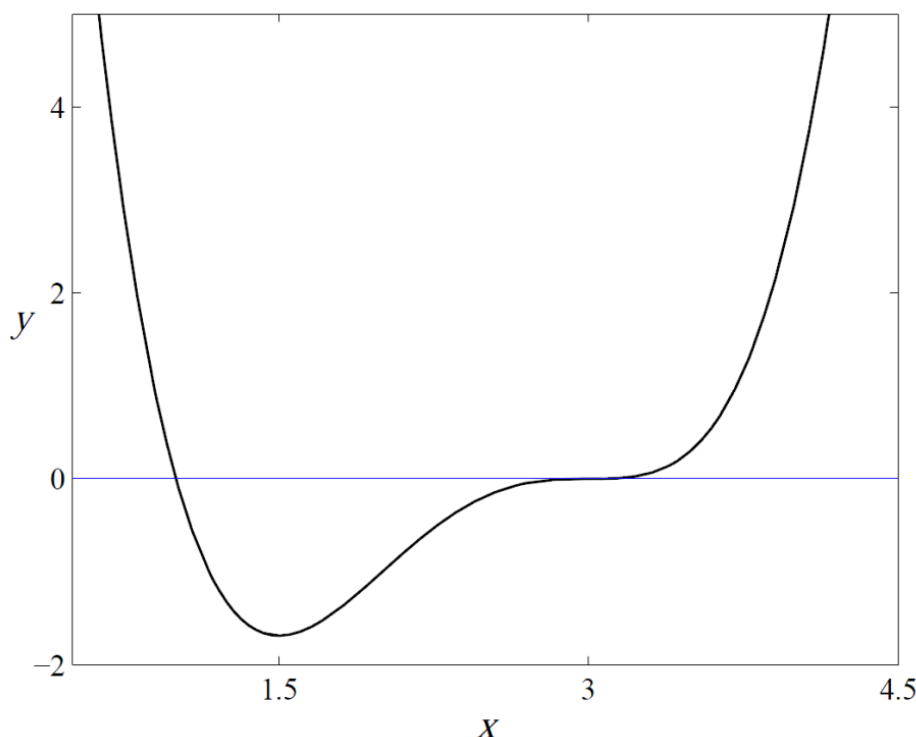


### Παράδειγμα 3<sup>ο</sup>

Αναφέραμε στο προηγούμενο παράδειγμα ότι, μια ισχυρή ένδειξη ακρίβειας της λύσης είναι και η τιμή της συνάρτησης  $f(x_v)$  (δηλαδή πόσο κοντά είναι στο μηδέν), μόνο που δεν είναι απόλυτη ένδειξη για το πόσο κοντά είμαστε στη ρίζα που αναζητούμε. Για παράδειγμα, στο πιο κάτω γράφημα (Σχήμα 2.11), η συνάρτηση

$$f(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 54x + 27 = (x-1)(x-3)^3$$

εμφανίζει 2 ρίζες, στο  $x=1$  και στο  $x=3$ . Και όσον αφορά στο  $x=1$ , η τιμή της  $f(x)$  είναι ικανοποιητικός δείκτης για την ακρίβεια υπολογισμού της ρίζας (όταν, δηλαδή, το  $f(x)$  πλησιάζει στο μηδέν, τότε και η προσέγγιση της ρίζας  $x_i$  πλησιάζει όμοια τη ρίζα. Αντίθετα, στην περιοχή του  $x=3$ , έχουμε την τιμή της  $f(x)$  να είναι πολύ κοντά στο μηδέν, ενώ η προσέγγιση της ρίζας να είναι ακόμη ιδιαίτερα μακριά απ' αυτήν.



**Σχήμα 2.12** Γραφική παράσταση της  $f(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 54x + 27$ .

#### 2.4.6. Διαχείριση του τύπου του Newton, με το Excel.

Αναζητούμε λοιπόν όλες τις πραγματικές ρίζες μιας συνάρτησης  $f(x)$ . Αρχικά, μια και το Excel μας δίνει τη δυνατότητα να κάνουμε εύκολα ακριβείς γραφικές παραστάσεις, αξίζει να κάνουμε τη γραφική παράσταση της  $f(x)$ . Προφανώς, δημιουργούμε έναν πίνακα τιμών της  $f(x)$ , στο πεδίο ορισμού που μας ενδιαφέρει, τον οποίο μετατρέπουμε σε γραφική παράσταση.

Το κύριο πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε κατά την αναζήτηση μιας πραγματικής ρίζας της  $f(x)$ , είναι να δημιουργήσουμε έναν πίνακα τιμών σαν τον παρακάτω, ο οποίος θα περιέχει τις διαδοχικές προσεγγίσεις της ρίζας  $\xi$ , καθώς και τις τιμές  $f(x)$  και  $f'(x)$ .

	B	C	D	E	F	G
1		x	=x <sub>1</sub>	(x <sub>2</sub> )= D1 –D2/D3	(x <sub>3</sub> )= E1 –E2/E3	(x <sub>4</sub> )= ....
2		f(x)	=f(x <sub>1</sub> )	=f(x <sub>2</sub> )	....	....
3		f'(x)	=f'(x <sub>1</sub> )	=f'(x <sub>2</sub> )	....	....
4						

Βέβαια, τα κελιά έχουν διαλεχτεί στην τύχη. Η διαδικασία που θα ακολουθηθεί είναι η εξής:

1. Τοποθετούμε την πρώτη προσεγγιστική τιμή  $x_1$ , στο κελί D1.
2. Τοποθετούμε τον τύπο της συνάρτησης  $f(x)$ , στο κελί D2, χρησιμοποιώντας ως μεταβλητή την τιμή του κελιού D1.
3. Τοποθετούμε τον τύπο της παραγώγου της συνάρτησης  $f'(x)$ , στο κελί D3, χρησιμοποιώντας και πάλι ως μεταβλητή την τιμή του κελιού D1.
4. Τοποθετούμε τέλος στο κελί E1, τον τύπο:  $= D1 - D2/D3$ .
5. Επιλέγουμε τα κελιά D2 – D3 και σύρουμε την κάτω δεξιά γωνία, μία στήλη πιο δεξιά, έτσι ώστε να υπολογισθούν οι τιμές  $f(x_2)$  και  $f'(x_2)$ .
6. Τελειώνουμε τη δημιουργία του πίνακα, επιλέγοντας την περιοχή: E1:E3, και σύροντας την κάτω δεξιά γωνία προς τα δεξιά, τόσες στήλες όσες χρειάζεται για να επιτύχουμε την επιθυμητή ακρίβεια.

### Παρατηρήσεις:

1. Αλλάζοντας την τιμή του κελιού D1 (δηλ. του  $x_1$ ), μεταβάλλονται όλες οι τιμές του πίνακα, όπως άλλωστε θα έπρεπε να συμβεί.
2. Αλλάζοντας τους τύπους των κελιών D2 και D3, με μια νέα συνάρτηση και την παράγωγό της και σέρνοντας τους προς τα δεξιά, υπολογίζουμε τη ρίζα της νέας συνάρτησης.

### Παραδείγματα:

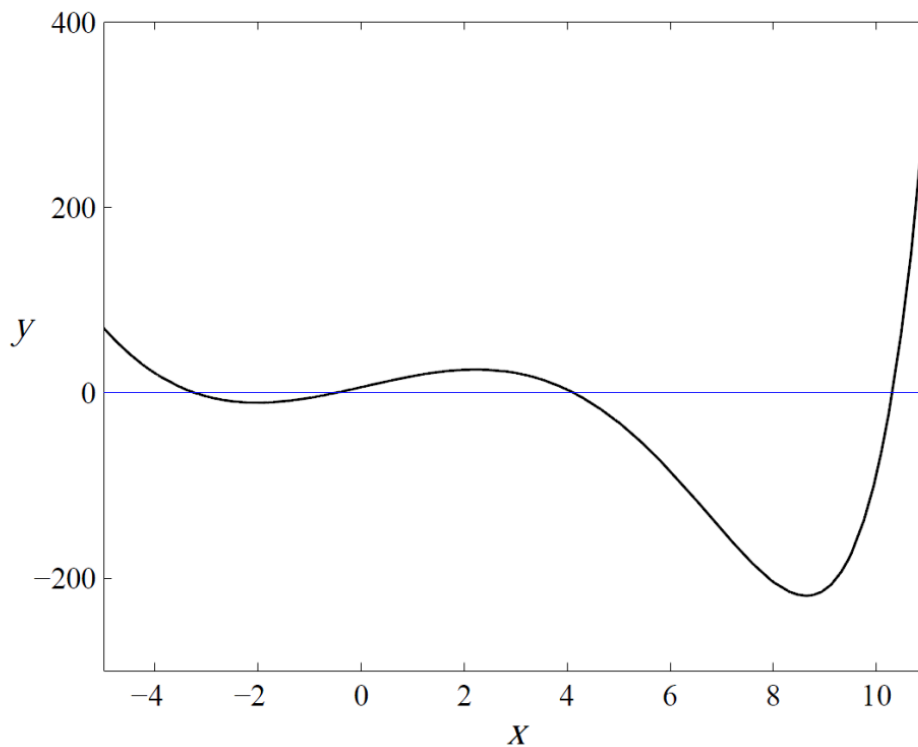
1<sup>ο</sup>) Να υπολογισθεί μία ρίζα της συνάρτησης:

$$f(x) = e^{\frac{2x}{3}} - x^3 + 12x + 5$$

Αρχικά, κάνουμε τη γραφική παράσταση της  $f(x)$  (βλέπε Σχήμα 2.13), όπου παρατηρούμε πως η  $f$  έχει 4 ρίζες, οι οποίες είναι ίσες (κατά προσέγγιση) με:

- $\rho_1 = -3$
- $\rho_1 = -0.4$
- $\rho_1 = 4.1$
- $\rho_1 = 10.3$

όλες βαθμού πολλαπλότητας 1.



**Σχήμα 2.13** Γραφική παράσταση της  $f(x)$ .

Δουλεύοντας με τον τρόπο που περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο και τοποθετώντας στα κατάλληλα κελιά τη συνάρτηση και την παράγωγό της:

$$f'(x) = \frac{2}{3}e^{2x/3} - 3x^2 + 12$$

κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

$x$	-3	-3.2592034	-3.2276743	-3.22716778	-3.2271677	-3.22716765
$f(x)$	-3.86466	0.62400162	0.0097137	2.4911E-06	1.634E-13	0
$f'(x)$	-14.9098	-19.791315	-19.176127	-19.1662917	-19.166289	

πράγμα που σημαίνει πως η δοθείσα συνάρτηση έχει στην περιοχή του σημείου -3 τη ρίζα  $\rho_1 = -3.22716765$ , όπου όλα τα ψηφία είναι σωστά.

Εάν είχαμε ξεκινήσει από ένα λάθος σημείο:  $x = 2$  (σημείο που βρίσκεται αρκετά κοντά στο τοπικό ελάχιστο της περιοχής), τότε η επόμενη πρόβλεψη θα ήταν πολύ μακριά από τη ρίζα που ψάχνουμε. Αυτό γίνεται φανερό από τον επόμενο πίνακα τιμών:

$x$	2	-7.8033099	-5.5385926	-4.18298964	-3.48938655	-3.25591922
$f(x)$	24.79367	386.522157	108.46371	28.0570806	5.711159204	0.55910909
$f'(x)$	2.529112	-170.67126	-80.011416	-40.4512046	-24.4623484	

όπου η 2<sup>η</sup> προσέγγιση απομακρύνεται σημαντικά από τη ρίζα, για να επιστρέψει ξανά κοντά της μετά από πέντε επαναλήψεις.

Τώρα, εάν αντικαταστήσουμε την 1<sup>η</sup> προσέγγιση ( $x = -3$ ) με τις προσεγγίσεις των υπολοίπων ριζών, παίρνουμε αμέσως τις τρεις επόμενες ρίζες (με 9 σωστά δεκαδικά ψηφία):

1 <sup>η</sup> προσέγγιση	Ρίζα
-0.4	-0.486513177
4.1	4.123363116
10.3	10.31304647

### Παρατηρήσεις:

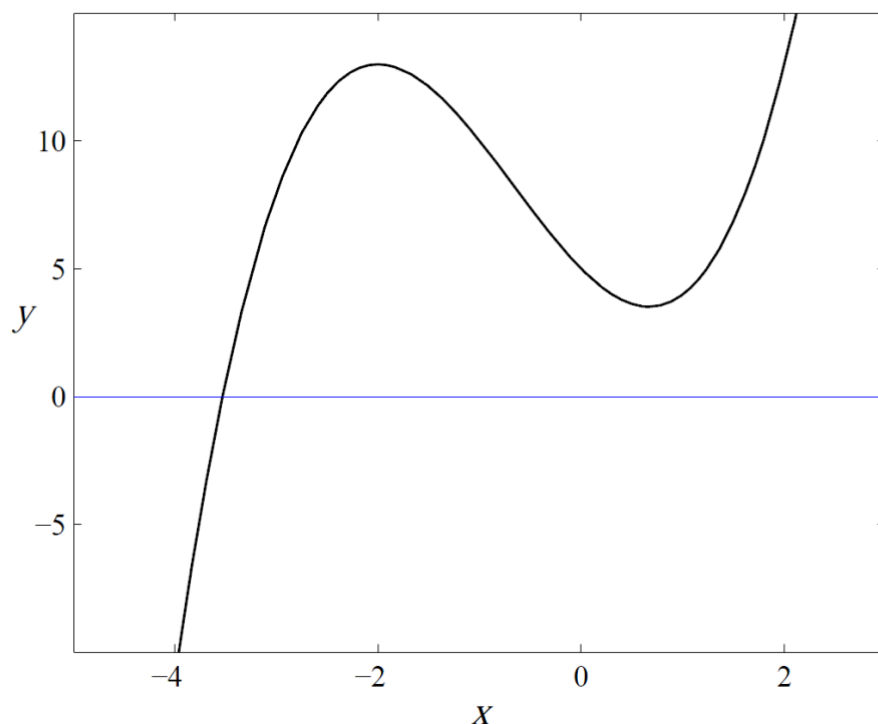
- Οι τιμές της συνάρτησης  $f$ , πλησιάζουν πολύ σύντομα στο μηδέν. Κάτι τέτοιο δεν συνέβη, μονό, κατά την πρώτη επανάληψη του τύπου, όπου όμως παρατηρούμε πως υπήρξε αλλαγή προσήμου (υπήρξε πέρασμα από την άλλη πλευρά της ρίζας, όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη παρατήρηση).
- Η ακρίβεια της προσέγγισης της ρίζας δεν κρίνεται από το πόσο κοντά στο μηδέν πλησιάζει η τιμή της  $f$  (χρησιμοποιείται μόνον ενδεικτικά), αλλά από την απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικές προσεγγίσεις ( $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ ). Για άλλη μία φορά παρατηρούμε πως, σε κάθε επανάληψη του τύπου, η προσέγγιση βελτιώνεται κατά δύο δεκαδικά ψηφία.



2<sup>ο</sup>) Να υπολογισθούν και οι τρεις ρίζες της τριτοβάθμιας π.σ.:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$$

Αρχικά, κάνουμε έναν πίνακα τιμών και τη γραφική παράσταση της  $f(x)$  (βλέπε Σχήμα 2.14). Από αυτήν διαπιστώνουμε πως η  $f(x)$  έχει μία πραγματική ρίζα (στην περιοχή του 3.5) και δύο μιγαδικές.



**Σχήμα 2.14** Γραφική παράσταση της π.σ.  $f(x)$ .

## Υπολογισμός της πραγματικής ρίζας:

Χρησιμοποιούμε τον τύπο του Newton

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 + 2x_1^2 - 4x_1 + 5}{3x_1^2 + 4x_1 - 4}$$

και παίρνοντας ως πρώτη τιμή το  $x_1 = -3.5$  έχουμε

$x$	-3.5	-3.533333333	-3.532842573	-3.532842466
$f(x)$	0.625	-0.009481481	-2.07115E-06	-1.03029E-13
$f'(x)$	18.75	19.32	19.31155965	

την ρίζα  $\rho_1 = -3.532842466$

## Υπολογισμός των δύο μιγαδικών ριζών

Όπως είπαμε, εάν η τιμή  $\rho$  είναι ρίζα της π.σ.  $f(x)$ , τότε η  $f(x)$  θα διαιρείται με τον παράγοντα  $(x - \rho)$ . Οπότε, μετά τη διαίρεση, το πηλίκο θα είναι μια π.σ. 2<sup>ου</sup> βαθμού, η οποία θα έχει ρίζες τις υπόλοιπες δύο ρίζες της  $f(x)$ :

$$\frac{f(x)}{(x - \rho_1)} = \frac{(x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3)}{x - \rho_1} = (x - \rho_2)(x - \rho_3) = \text{πηλίκο}(x)$$

Άρα εκτελούμε τη διαίρεση της  $f(x)$  με τον παράγοντα  $(x + 3.532842466)$ :

$x^3$	$+2x^2$	$-4x$	$+5$	$x$	$+3.532842466$
$-x^3$	$-3.532842466 x^2$			$x^2$	$-1.532842466 x$
	$-1.532842466 x^2$	$-4x$	$+5$		$+1.415290958$
	$1.532842466 x^2$	$+5.415290958 x$			
		$1.415290958 x$	$+5$		
		$-1.415290958 x$	$-5$		
			$0$		

Επομένως, οι δύο μιγαδικές ρίζες της πολυωνυμικής συνάρτησης:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$$

είναι οι ρίζες του τριωνύμου:

$$p(x) = x^2 - 1.532842466 x + 1.415290958$$

οι οποίες είναι ίσες με  $\rho_{2,3} = 0.76642 \pm 0.909884 i$



## 2.4.7. Υλοποίηση της μεθόδου σε MATLAB.

Θα παρουσιάσουμε δύο προγράμματα MATLAB. Το πρώτο θέλει σαν είσοδο εκτός από την εξίσωση της συνάρτησης και την εξίσωση της παραγώγου της. Το δεύτερο υπολογίζει μόνο του την εξίσωση της παραγώγου χρησιμοποιώντας το συμβολικό πακέτο του MATLAB.

Η συνάρτηση `rf_newton`, που ακολουθεί, έχει παραμέτρους

- fs = ένα string με τη συνάρτηση π.χ. '3\*x^3+2\*sin(x)-5'
- dfs = ένα string με την παράγωγο της συνάρτησης π.χ. '9\*x^2+2\*cos(x)'
- xp = την αρχική τιμή προσέγγισης της ρίζας
- eps = την επιθυμητή ακρίβεια

Ενώ οι έξοδοι της είναι

- root = η ρίζα που βρέθηκε
- res = ένα string που μας πληροφορεί αν όλα πήγαν καλά και βρέθηκε σωστά η ρίζα ή αν κάτι δεν πήγε καλά.

```
function[root,res]=rf_newton(fs,dfs,xp,eps)
f=inline(fs);
f=vectorize(f);
df=inline(dfs);
df=vectorize(df);

max_steps=100;
step=1;

x=xp-f(xp)/df(xp);
while (abs(x-xp)>eps) && (step<max_steps)
    xp=x;
    x=xp-f(xp)/df(xp);
    step=step+1;
end

if (step<max_steps) && (~isnan(x))
    root=x;
    res='Όλα ok';
else
    root=x;
    res='Αδυναμία εύρεσης λύσης';
end
```

Η συνάρτηση rf\_newton2, που ακολουθεί, έχει παραμέτρους

- fs = ένα string με τη συνάρτηση π.χ. '3\*x^3+2\*sin(x)-5'
- xp = την αρχική τιμή προσέγγισης της ρίζας
- eps = την επιθυμητή ακρίβεια



Η παράγωγος της συνάρτησης υπολογίζεται “αυτόματα”, χρησιμοποιώντας το συμβολικό πακέτο του MATLAB.

Οι έξοδοι της είναι

- `root` = η ρίζα που βρέθηκε
- `res` = ένα string που μας πληροφορεί αν όλα πήγαν καλά και βρέθηκε σωστά η ρίζα ή αν κάτι δεν πήγε καλά.

```
function[root,res]=rf_newton2(fs,xp,eps)
f=vectorize(inline(fs));
df=vectorize(inline(char(diff(sym(fs),sym('x'))),'x'));

max_steps=100;
step=1;

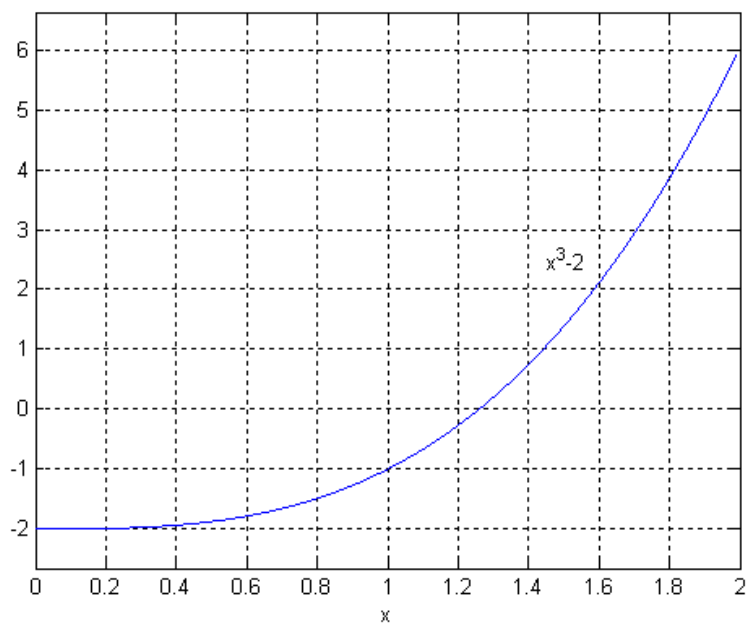
x=xp-f(xp)/df(xp);
while (abs(x-xp)>eps) && (step<max_steps)
    xp=x;
    x=xp-f(xp)/df(xp);
    step=step+1;
end

if (step<max_steps) && (~isnan(x))
    root=x;
    res='Όλα ok';
else
    root=x;
    res='Αδυναμία εύρεσης λύσης';
end
```

## 2.5 Λυμένες Ασκήσεις Κεφαλαίου

### Άσκηση 2.1

Να βρεθεί, με τη μέθοδο Newton και με ακρίβεια 5 δεκαδικών, μία ρίζα της συνάρτησης  $f(x) = x^3 - 2$ , παίρνοντας ως αρχική τιμή  $x_0$  ακέραιο αριθμό της επιλογής σας. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης:



### Λύση:

Για την εφαρμογή της μεθόδου του Newton, θα χρειαστούμε, εκτός από την εξίσωση της συνάρτησης, και την εξίσωση της παραγώγου της. Έχουμε λοιπόν:

$$f(x) = x^3 - 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

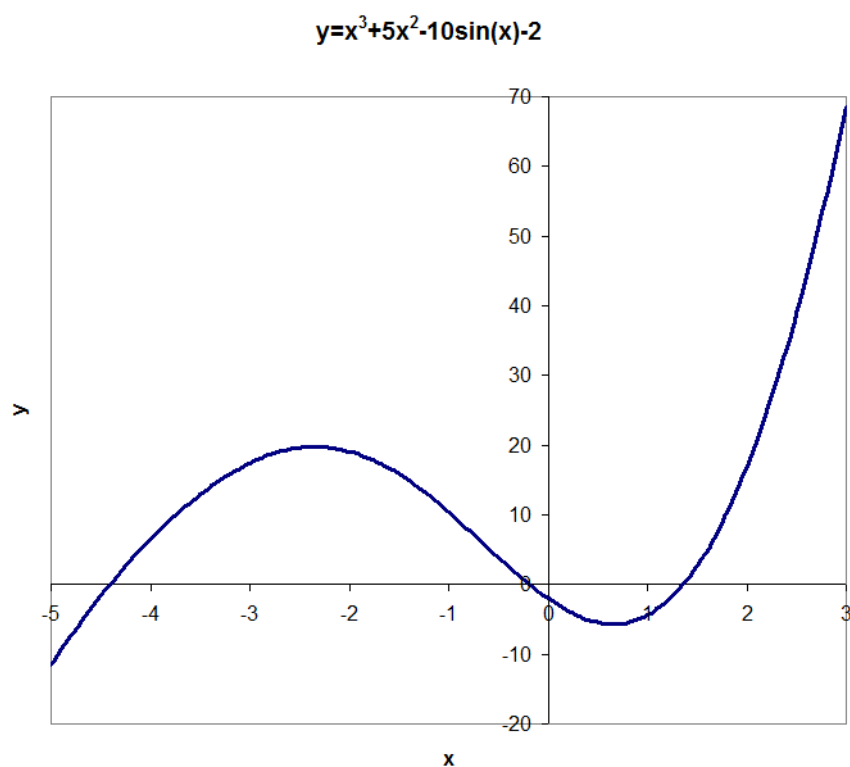
Από τη γραφική παράσταση βλέπουμε ότι η ρίζα της συνάρτησης είναι κοντά στην τιμή  $x=1.2$ . Επιλέγουμε λοιπόν, ως αρχική τιμή την  $x_0=1$  και κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα διαδοχικών επαναλήψεων της μεθόδου του Newton.

i	$x_i$	$f_i$	$f'_i$	$f_i/f'_i$
0	1.000000	-1.000000	3.000000	-0.333333
1	1.333333	0.370369	5.333331	0.069444
2	1.263889	0.018956	4.792246	0.003956
3	1.259933	0.000057	4.762293	0.000012
4	1.259921	0.000000	4.762203	<b>0.000000</b>
5	<b>1.259921</b>			



### Άσκηση 2.2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + 5x^2 - 10\sin(x) - 2$  και η γραφική της παράσταση



Να βρεθούν, με τη μέθοδο της διχοτόμου και οι τρεις ρίζες της εξίσωσης (με ακρίβεια τουλάχιστον 5 δεκαδικών). Επιλέξτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, το κατάλληλο αρχικό διάστημα της μεθόδου για κάθε μία ρίζα.

### Λύση:

Από τη γραφική παράσταση βλέπουμε ότι οι ρίζες της συνάρτησης είναι στα διαστήματα  $(-5, -4)$ ,  $(-1, 0)$  και  $(1, 2)$ . Για να βρούμε τις ρίζες εκτελούμε, σε κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά, τη μέθοδο της διχοτόμου.

Για να έχουμε ακρίβεια 5 δεκαδικών, όλες οι πράξεις μας πρέπει να γίνουν με ακρίβεια τουλάχιστον 6 δεκαδικών.

### Διάστημα $(-5, -4)$

$a$	$b$	$m$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
-5.000000	-4.000000	-4.500000	-11.589243	6.431975	-1.650301
-4.500000	-4.000000	-4.250000	-1.650301	6.431975	2.596981
-4.500000	-4.250000	-4.375000	-1.650301	2.596981	0.526669
-4.500000	-4.375000	-4.437500	-1.650301	0.526669	-0.548137
-4.437500	-4.375000	-4.406250	-0.548137	0.526669	-0.007364
-4.406250	-4.375000	-4.390625	-0.007364	0.526669	0.260490
-4.406250	-4.390625	-4.398438	-0.007364	0.260490	0.126764
-4.406250	-4.398438	-4.402344	-0.007364	0.126764	0.059753

-4.406250	-4.402344	-4.404297	-0.007364	0.059753	0.026208
-4.406250	-4.404297	-4.405274	-0.007364	0.026208	0.009417
-4.406250	-4.405274	-4.405762	-0.007364	0.009417	0.001027
-4.406250	-4.405762	-4.406006	-0.007364	0.001027	-0.003168
-4.406006	-4.405762	-4.405884	-0.003168	0.001027	-0.001070
-4.405884	-4.405762	-4.405823	-0.001070	0.001027	-0.000021
-4.405823	-4.405762	-4.405793	-0.000021	0.001027	0.000494
-4.405823	-4.405793	-4.405808	-0.000021	0.000494	0.000237
-4.405823	-4.405808	-4.405816	-0.000021	0.000237	0.000099
-4.405823	-4.405816	-4.405820	-0.000021	0.000099	0.000030
-4.405823	-4.405820	-4.405822	-0.000021	0.000030	-0.000004

Άρα μία ρίζα είναι η  $x = -4.40582$

### Διάστημα $(-1, -0)$

$a$	$b$	$m$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
-1.000000	0.000000	-0.500000	10.414710	-2.000000	3.919255
-0.500000	0.000000	-0.250000	3.919255	-2.000000	0.770915
-0.250000	0.000000	-0.125000	0.770915	-2.000000	-0.677081
-0.250000	-0.125000	-0.187500	0.770915	-0.677081	0.033222
-0.187500	-0.125000	-0.156250	0.033222	-0.677081	-0.325594
-0.187500	-0.156250	-0.171875	0.033222	-0.325594	-0.147072
-0.187500	-0.171875	-0.179688	0.033222	-0.147072	-0.057137
-0.187500	-0.179688	-0.183594	0.033222	-0.057137	-0.012011
-0.187500	-0.183594	-0.185547	0.033222	-0.012011	0.010592
-0.185547	-0.183594	-0.184571	0.010592	-0.012011	-0.000707
-0.185547	-0.184571	-0.185059	0.010592	-0.000707	0.004942
-0.185059	-0.184571	-0.184815	0.004942	-0.000707	0.002117
-0.184815	-0.184571	-0.184693	0.002117	-0.000707	0.000705
-0.184693	-0.184571	-0.184632	0.000705	-0.000707	-0.000001
-0.184693	-0.184632	-0.184663	0.000705	-0.000001	0.000358
-0.184663	-0.184632	-0.184648	0.000358	-0.000001	0.000184

-0.184648	-0.184632	-0.184640	0.000184	-0.000001	0.000092
-0.184640	-0.184632	-0.184636	0.000092	-0.000001	0.000045
-0.184636	-0.184632	-0.184634	0.000045	-0.000001	0.000022
-0.184634	-0.184632	-0.184633	0.000022	-0.000001	0.000011
-0.184633	-0.184632	-0.184633	0.000011	-0.000001	0.000011

Άρα η δεύτερη ρίζα είναι η  $x = -0.18463$

### Διάστημα (1, 2)

$a$	$b$	$m$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.000000	2.000000	1.500000	-4.414710	16.907026	2.650050
1.000000	1.500000	1.250000	-4.414710	2.650050	-1.724221
1.250000	1.500000	1.375000	-1.724221	2.650050	0.243804
1.250000	1.375000	1.312500	-1.724221	0.243804	-0.793998
1.312500	1.375000	1.343750	-0.793998	0.243804	-0.288674
1.343750	1.375000	1.359375	-0.288674	0.243804	-0.025845
1.359375	1.375000	1.367188	-0.025845	0.243804	0.108134
1.359375	1.367188	1.363282	-0.025845	0.108134	0.040940
1.359375	1.363282	1.361329	-0.025845	0.040940	0.007503
1.359375	1.361329	1.360352	-0.025845	0.007503	-0.009184
1.360352	1.361329	1.360841	-0.009184	0.007503	-0.000836
1.360841	1.361329	1.361085	-0.000836	0.007503	0.003333
1.360841	1.361085	1.360963	-0.000836	0.003333	0.001248
1.360841	1.360963	1.360902	-0.000836	0.001248	0.000206
1.360841	1.360902	1.360872	-0.000836	0.000206	-0.000306
1.360872	1.360902	1.360887	-0.000306	0.000206	-0.000050
1.360887	1.360902	1.360895	-0.000050	0.000206	0.000087
1.360887	1.360895	1.360891	-0.000050	0.000087	0.000018
1.360887	1.360891	1.360889	-0.000050	0.000018	-0.000016
1.360889	1.360891	1.360890	-0.000016	0.000018	0.000001

Άρα η τρίτη ρίζα είναι η  $x = 1.36089$



## Κριτήρια αξιολόγησης

### Κριτήριο αξιολόγησης 1

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση  $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x$

1. Τι μορφή πιστεύετε πως θα έχει η γραφική της παράσταση; Πόσα τοπικά μέγιστα και πόσα τοπικά ελάχιστα θα διαθέτει; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.
2. Υπολογίστε τα σημεία όπου η  $f(x)$  παίρνει ακρότατες τιμές.
3. Να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση.

### Κριτήριο αξιολόγησης 2

Να υπολογισθούν οι τρεις ρίζες των συναρτήσεων:

1.  $f(x) = x^3 + 2.585786438 x^2 + 7.343145751 x - 16.97056275$
2.  $f(x) = x^3 + 0.82 x^2 - 0.36 x - 2.36$

### Κριτήριο αξιολόγησης 3

Να βρεθεί, με τη μέθοδο Newton και με ακρίβεια 4 δεκαδικών, μία ρίζα της συνάρτησης  $f(x) = \tan(x) + 1$ , παίρνοντας ως αρχική τιμή την  $x_0 = 0.5$ .

### Κριτήριο αξιολόγησης 4

Ένα σώμα κινείται με ταχύτητα, μετρημένη σε m/s, που δίνεται από την εξίσωση,  $v(t) = 9 - t^3$ . Να βρεθεί η χρονική στιγμή  $t_a$  κατά την οποία η κίνηση αντιστρέφεται, με ακρίβεια 7 δεκαδικών. Για την αριθμητική επίλυση χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Newton – Raphson, δίνοντας, ως αρχική τιμή, έναν ακέραιο αριθμό της επιλογής σας, που πιστεύεται ότι είναι κοντά στη λύση.

### Κριτήριο αξιολόγησης 5

Να βρεθεί, με ακρίβεια 4 δεκαδικών, η θετική ρίζα της συνάρτησης  $y = \exp(-x^2) - 0.2$ . Για την αριθμητική επίλυση χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Newton – Raphson, δίνοντας, ως αρχική τιμή, έναν ακέραιο αριθμό της επιλογής σας, που πιστεύεται ότι είναι κοντά στη λύση.

## Κριτήριο αξιολόγησης 6

Να βρεθεί, με τη μέθοδο Newton και με ακρίβεια 5 δεκαδικών, μία ρίζα της συνάρτησης  $f(x) = x^3 + 2$  παίρνοντας ως αρχική τιμή  $x_0 = 1$ .

Αν, αντί για τη μέθοδο Newton, χρησιμοποιούσαμε τη μέθοδο της διχοτόμου και είχαμε αρχικό διάστημα το  $[-2, 0]$ , πόσα βήματα θα χρειαζόμασταν για να βρούμε τη λύση με την ίδια ακρίβεια;

## Κριτήριο αξιολόγησης 7

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x \sin^2(x)$  και  $g(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

1. Να γίνουν, σε ένα σχήμα, οι γραφικές τους παραστάσεις στο διάστημα  $x \in [-2, 3]$  χρησιμοποιώντας τουλάχιστον 150 σημεία.
2. Να βρεθούν, με τη μέθοδο της διχοτόμου, όλα τα σημεία τομής  $(x_i$  και  $y_i)$  των δύο συναρτήσεων (με ακρίβεια τουλάχιστον 6 δεκαδικών). Επιλέξτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, το κατάλληλο αρχικό διάστημα της μεθόδου για κάθε μία ρίζα.

## Κεφάλαιο 3. Τα αναπτύγματα Taylor – Mac Laurin στην Αριθμητική Ανάλυση

### Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται ο τρόπος εύρεσης πολυωνυμικών συναρτήσεων που προσεγγίζουν μια συγκεκριμένη συνάρτηση. Παρουσιάζεται το πολυώνυμο Taylor, που προσεγγίζει μια συνάρτηση στην περιοχή ενός σημείου  $x_0$  και η ιδιαίτερη περίπτωση του για  $x_0=0$  που ονομάζεται ανάπτυγμα Mac Laurin. Τέλος, παρουσιάζεται η χρήση των αναπτυγμάτων αυτών για τον υπολογισμό της τιμής ορισμένων ολοκληρωμάτων συναρτήσεων των οποίων το άδριστο ολοκλήρωμα δεν μπορούμε να υπολογίσουμε με αναλυτικό τρόπο.

### Προαπαιτούμενη γνώση

Το κεφάλαιο προϋποθέτει ότι ο αναγνώστης έχει γνώσεις Μαθηματικών I του Α' Εξαμήνου σπουδών.

### 3.1. Το πολυώνυμο του Taylor

Η ιδέα εύρεσης πολυωνυμικών συναρτήσεων που να προσεγγίζουν μη πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι πολύ παλιά. Επί πλέον, η χρησιμότητά της είναι αναμφισβήτητη. Για παράδειγμα, το να υπολογίσουμε την τιμή της:

$$p(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

για  $x=0.2$ , με χαρτί και μολύβι, παρ' όλο που απαιτεί κάποιες πράξεις, είναι μια εύκολη υπόθεση. Αντίθετα, το να υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης:

$$f(x) = \sin(x)$$

για  $x=0.2$  (rad, ακτίνια), με χαρτί και μολύβι, αποτελεί μία ιδιαίτερα δύσκολη υπόθεση.

Υποστηρίζουμε, λοιπόν, πως η π.σ.  $p(x)$  δίνει, με μεγάλη ακρίβεια, την τιμή του ημιτόνου που αναζητούμε! Πράγματι:

$$p(0.2) = \left[ x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \right]_{x=0.2} = 0.2 - \frac{0.2^3}{6} + \frac{0.2^5}{120} = 0.198669333$$

ενώ ο υπολογιστής τσέπης δίνει:

$$\sin(0.2 \text{ rad}) = 0.198669331$$

αποτέλεσμα που είναι ιδιαίτερα εντυπωσιακό, ως προς την ακρίβεια του υπολογισμού, αλλά και ως προς την ευκολία με την οποία φτάσαμε στο αποτέλεσμα.

Επειδή κάποιος, ενδεχόμενα, να θεωρήσει πως επιλέξαμε μία ιδιαίτερα μικρή γωνία ή ότι η γωνία αυτή έχει επιλεγεί επειδή δίνει (τυχαία) ένα ιδιαίτερα ακριβές αποτέλεσμα, να σημειώσουμε πως η γωνία 0.2 rad σε μοίρες δίνεται από τη σχέση:

$$\phi^\circ = \frac{\phi(\text{rad})\pi}{180} \Rightarrow \frac{0.2(\text{rad})\pi}{180} = 11.45916^\circ$$

άρα δεν είναι ιδιαίτερα μικρή, ενώ ο παρακάτω πίνακας τιμών δίνει την τιμή της συνάρτησης  $\sin(x)$ , για διαφορετικές γωνίες και για τις παρακάτω πολυωνυμικές συναρτήσεις:



$$p_1(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$p_2(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

$$p_3(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880}$$

### Πίνακας Τιμών

$\varphi(\text{rad})$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	Ακριβές $\sin(\varphi)$
0,1	0,099833417	0,099833417	0,099833417	0,099833417
0,2	0,198669333	0,198669331	0,198669331	0,198669331
0,3	0,29552025	0,295520207	0,295520207	0,295520207
0,4	0,389418667	0,389418342	0,389418342	0,389418342
0,5	0,479427083	0,479425533	0,479425539	0,479425539
0,6	0,564648	0,564642446	0,564642473	0,564642473
0,7	0,644233917	0,644217577	0,644217688	0,644217687
0,8	0,717397333	0,717355723	0,717356093	0,717356091
0,9	0,78342075	0,78332585	0,783326917	0,78332691
1	0,841666667	0,841468254	0,84147101	0,841470985

### Παρατηρήσεις:

1. Οι περιέργοι παρονομαστές των συναρτήσεων  $p_j(x)$  είναι οι ποσότητες  $3!=1.2.3=6$ ,  $5!=1.2.3.4.5=120$ ,  $7!=1.2...7=5040$  και  $9!=1.2...9=362880$ . Προφανώς, η γενική έκφραση είναι η:  $n!=1.2...(n-1)n$ , η οποία ονομάζεται «**ν παραγοντικό**».
2. Παρατηρούμε η ακρίβεια του υπολογισμού μεγαλώνει όσο πηγαίνουμε από το  $p_1$  στο  $p_3$ , ενώ μειώνεται όσο μεγαλώνει η γωνία.



Το πρόβλημα του υπολογισμού μιας πολωνυμικής συνάρτησης που να συγκλίνει σε μία συνάρτηση μη πολωνυμική, επιχειρεί να το λύσει το «Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor μιας μη πολωνυμικής συνάρτησης». Η εύρεση του αναπτύγματος Taylor ίσως να είναι γνωστό στους περισσότερους. Η χρησιμότητά του όμως στην αριθμητική ανάλυση μας αναγκάζει να αναφερθούμε σ' αυτό εν συντομία.

## 3.2. Το πρόβλημα

Ζητούμε να υπολογίσουμε μία πολωνυμική συνάρτηση  $y = p(x)$ , η οποία να προσεγγίζει τη συνάρτηση  $y = f(x)$  στην περιοχή κάποιου σημείου  $x_0$  του πεδίου ορισμού της  $f$ , εφόσον η  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ολόκληρη την περιοχή. Με τον όρο περιοχή του σημείου  $x_0$ , εννοούμε ένα διάστημα (υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ ) της μορφής:  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \Pi(x_0, \varepsilon)$ , ένα διάστημα δηλαδή με κέντρο το σημείο  $x_0$  και "ακτίνα" ίση με  $\varepsilon$ .

Ο στόχος είναι η αντικατάσταση της συνάρτησης  $f(x)$  με το πολώνυμο  $p(x)$  στην εν λόγω περιοχή. Το πολώνυμο αυτό το αποκαλούμε πολώνυμο Taylor, ή ανάπτυγμα σε σειρά Taylor της συνάρτησης  $f(x)$ , στην περιοχή του σημείου  $x_0$ . Το σημείο  $x_0$  αποκαλείται **κέντρο του αναπτύγματος**.

Η διερεύνηση του προβλήματος, οδηγεί στα παρακάτω συμπεράσματα:

- Το πολυώνυμο θα πρέπει να παίρνει την ίδια τιμή με τη συνάρτηση στο  $x_0$ , δηλαδή:

$$f(x_0) = p(x_0)$$

- Η κλίση του πολυωνύμου και της συνάρτησης στο σημείο  $x_0$  θα πρέπει να ταυτίζονται:

$$f'(x_0) = p'(x_0)$$

- Ο ρυθμός μεταβολής της κλίσης του πολυωνύμου και της συνάρτησης στο  $x_0$  (δηλαδή οι παραγώγοι 2<sup>ης</sup> τάξης στο σημείο  $x_0$ ), θα πρέπει να ταυτίζονται:

$$f''(x_0) = p''(x_0)$$

- Σε τελική ανάλυση, οι τιμές όλων των παραγώγων της συνάρτησης στο σημείο  $x_0$  θα πρέπει να είναι ίσες με τις τιμές των αντιστοίχων παραγώγων του πολυωνύμου:

$$f^{(n)}(x_0) = p^{(n)}(x_0)$$

Από τα παραπάνω προκύπτει άμεσα ο περιορισμός, σύμφωνα με τον οποίο για να αναπτυχθεί μία συνάρτηση  $f(x)$  σε σειρά Taylor στην περιοχή του σημείου  $x_0$ , θα πρέπει να είναι παραγωγίσιμη με συνεχείς παραγώγους στην περιοχή σύμπτωσης.

### 3.3. Υπολογισμός του πολυωνύμου $p(x)$

Θα διαλέξουμε τη γενική μορφή του πολυωνύμου  $p(x)$  με τέτοιο τρόπο ώστε να διευκολύνονται οι πράξεις. Χωρίς, λοιπόν, να περιορίζεται η γενικότητα της λύσης, διαλέγουμε την παρακάτω μορφή

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

Σύμφωνα με όσα λέχθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο έχουμε πως:

$$f(x_0) = p(x_0) = \left[ a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots \right]_{x_0} = a_0 \Rightarrow a_0 = f(x_0)$$

$$f'(x_0) = p'(x_0) = \left[ a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots \right]_{x_0} = a_1 \Rightarrow a_1 = f'(x_0)$$

$$f''(x_0) = p''(x_0) = \left[ 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + \dots \right]_{x_0} = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$$

$$f'''(x_0) = p'''(x_0) = \left[ 6a_3 + \dots \right]_{x_0} = 6a_3 = 3!a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

$$f^{(n)}(x_0) = p^{(n)}(x_0) = n!a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

οπότε, το πολυώνυμο του Taylor παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$p(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \dots$$

Τώρα πλέον, μπορούμε να αντικαταστήσουμε, στην περιοχή του  $x_0$ , τη συνάρτηση  $f(x)$  με το πολυώνυμο. Φθάνουμε λοιπόν στις σχέσεις (όπου στην τελευταία αντικαταστάθηκε το  $x - x_0$  με το  $h$ , δηλαδή  $x = x_0 + h$ ):

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0) + \dots = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \frac{(x-x_0)^j}{j!} f^{(j)}(x_0) \right] \Rightarrow \\
f(x_0+h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \dots = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \frac{h^j}{j!} f^{(j)}(x_0) \right]
\end{aligned}$$

Αξιίζει να παρατηρήσουμε πως, εάν ισχύει ο περιορισμός  $h = x - x_0 < 1$ , τότε η σειρά συγκλίνει ταχύτατα στην τιμή της  $f(x)$ , χρησιμοποιώντας πολύ λίγους όρους (διότι το  $h^n$  τείνει γρήγορα στο 0, όταν  $h < 1$ ).

### 3.4. Το σφάλμα αποκοπής.

Παρατηρούμε πως, το πολυώνυμο Taylor μιας συνάρτησης  $f(x)$  είναι μία σειρά με άπειρους όρους. Θα δεχθούμε, χωρίς απόδειξη, πως για τις στοιχειώδεις συναρτήσεις, η σειρά αυτή συγκλίνει στη συνάρτηση  $f(x)$ , για κάθε  $x$  που ανήκει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Στην πράξη, βέβαια, δεν είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν παρά πεπερασμένου πλήθους όροι. Όλοι οι υπόλοιποι παραλείπονται (αποκόπτονται). Η χρήση, όμως, ενός μικρού αριθμού όρων αυτόματα μικραίνει το διάστημα στο οποίο η σειρά μπορεί να προσεγγίσει τη συνάρτηση  $f(x)$ , το οποίο γίνεται μία περιοχή του  $x_0$ , η ακτίνα της οποίας εξαρτάται από τον αριθμό των όρων που χρησιμοποιούνται. Στην πράξη μάλιστα, όπως ειπώθηκε ήδη, η απόλυτη τιμή του  $h = x - x_0$  είναι μικρότερη του 1 (Εάν  $|h| < 1 \Rightarrow h^6 \ll 1$ ).

Η τάξη του κάθε όρου καθορίζεται από τον εκθέτη της παρένθεσης  $(x-x_0)$ , ή από την τάξη της παραγώγου  $f^{(n)}(x)$ . Έτσι λοιπόν όταν μιλάμε για ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης, στο οποίο διαγράφηκαν όλοι οι μεγαλύτεροι της δεύτερης τάξης όροι, εννοούμε το:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + O(h^3)$$

όπου η έκφραση  $O(h^3)$  σημαίνει: «**όροι τάξης ίσης ή μεγαλύτερης της 3ης**», οι οποίοι παραλείπονται.

Είναι, επομένως, σημαντικό να έχουμε μία εκτίμηση για τη διαφορά που θα προκύψει ανάμεσα στην τιμή του πολυωνύμου και την τιμή της συνάρτησης, σε κάποιο σημείο  $x$  (της περιοχής του  $x_0$ ), η οποία θα οφείλεται στην αποκοπή των όρων της σειράς.

Ορίζουμε, λοιπόν, το σφάλμα αποκοπής  $E$  με τη σχέση:  $E = f(x) - p(x)$ . Είναι φανερό πως το σφάλμα  $E$  εξαρτάται, από την τάξη  $n$  του τελευταίου όρου της σειράς που κρατήθηκε στον υπολογισμό, από το σημείο  $x$ , αλλά και από την επιλογή του σημείου  $x_0$ . Αποδεικνύεται πως, το σφάλμα που προκύπτει από την αποκοπή όλων των όρων τάξης μεγαλύτερης του  $n$  δίνεται από τη σχέση:

$$E(n, x_0, x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

όπου το  $\xi$  είναι κάποιο σημείο (συγκεκριμένο μεν, αλλά άγνωστο) ανάμεσα στα σημεία  $x$  και  $x_0$ . Το  $\xi$  προέρχεται από την εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού.

Αξιίζει να παρατηρήσουμε πως, ο τύπος του σφάλματος θυμίζει έντονα τον  $n+1$  όρο της σειράς. Σε τελική ανάλυση, επομένως, ο  $n+1$  όρος του αναπτύγματος Taylor αποτελεί μία προσέγγιση του σφάλματος αποκοπής.

### 3.5. Ανάπτυγμα κατά Mac–Laurin

Στην ιδιαίτερη περίπτωση που μία συνάρτηση  $f(x)$  αναπτύσσεται κατά Taylor στο σημείο  $x_0=0$ , το ανάπτυγμα ονομάζεται ανάπτυγμα κατά Mac–Laurin. Στην περίπτωση αυτή, η οποία άλλωστε χρησιμοποιείται και πιο συχνά, ο τύπος του αναπτύγματος παίρνει τη μορφή:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots$$

#### Παράδειγμα.

Να υπολογισθεί το ανάπτυγμα κατά Mac–Laurin της συνάρτησης  $y = f(x) = \cos(x)$ . Με τη βοήθεια του αναπτύγματος αυτού, να υπολογισθεί με ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων το συνημίτονο της γωνίας  $x=0.2$  (rad). Τέλος, με τη βοήθεια του υπολογιστή, να επιβεβαιωθεί το αποτέλεσμα. Αναφερόμαστε σε ακρίβεια δεκαδικών ψηφίων και όχι σημαντικών μια και γνωρίζουμε καλά την τάξη μεγέθους του αριθμού που αναζητούμε (το  $\cos(0.2 \text{ rad})$  είναι κοντά στο 1).

Εφόσον ζητείται το ανάπτυγμα κατά Mac–Laurin, αναπτύσσουμε με κεντρικό σημείο το  $x_0=0$ . Υπολογίζουμε, πρώτα, τις παραγώγους της συνάρτησης και την τιμή που θα έχει η συνάρτηση και κάθε μία από τις παραγώγους της στο  $x_0=0$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x) &\Rightarrow f(0) &= \cos(0) = 1 \\ f'(x) &= -\sin(x) &\Rightarrow f'(0) &= -\sin(0) = 0 \\ f''(x) &= -\cos(x) &\Rightarrow f''(0) &= -\cos(0) = -1 \\ f'''(x) &= \sin(x) &\Rightarrow f'''(0) &= \sin(0) = 0 \\ f^{(4)}(x) &= \cos(x) &\Rightarrow f^{(4)}(0) &= \cos(0) = 1 \\ f^{(5)}(x) &= -\sin(x) &\Rightarrow f^{(5)}(0) &= -\sin(0) = 0 \\ f^{(6)}(x) &= -\cos(x) &\Rightarrow f^{(6)}(0) &= -\cos(0) = -1 \end{aligned}$$

αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην εξίσωση:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(0) + \dots$$

καταλήγουμε στο ανάπτυγμα:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = 1 + \sum_{j=1}^n (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}$$

το οποίο είμαστε υποχρεωμένοι να το διατυπώσουμε μέχρι τον όρο πέρα από τον οποίο η συνέχισή του να είναι απολύτως προφανής.

Το σφάλμα αποκοπής είναι ίσο με:

$$E(\nu, 0, x) = \frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \cos^{(\nu+1)}(\xi)$$

Παρατηρούμε πως η απόλυτη τιμή του σφάλματος αποκοπής είναι πάντα μικρότερη της ποσότητας:

$$E \leq M = \left| \frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \right|$$

μια και η τιμή του  $\cos^{(\nu+1)}(\xi)$  ανήκει πάντα στο διάστημα  $[-1,1]$ . Θα θεωρήσουμε επομένως πως το  $M$  αποτελεί μια εκτίμηση (απαισιόδοξη) του σφάλματος αποκοπής  $E$ .

Ας υπολογίσουμε τώρα το  $\cos(0.2)$  με τη βοήθεια του αναπτύγματος:

$$\begin{aligned}\cos(0.2) &= 1 - \frac{0.2^2}{2!} + \frac{0.2^4}{4!} - \frac{0.2^6}{6!} = 1 - \frac{0.2^2}{2} + \frac{0.2^4}{24} - \frac{0.2^6}{720} = \\ &= 1 - 0.02 + 6.6666667 \cdot 10^{-5} - 8.8888889 \cdot 10^{-8} = \\ &= 0.98 \quad \text{διατηρώντας όρους μέχρι } 2^{\text{ης}} \text{ τάξης} \\ &= 0.98006667 \quad \text{διατηρώντας όρους μέχρι } 4^{\text{ης}} \text{ τάξης} \\ &= 0.98006657778 \quad \text{διατηρώντας όρους μέχρι } 6^{\text{ης}} \text{ τάξης}\end{aligned}$$

Τέλος η ποσότητα  $M$  παίρνει τις τιμές:

$$M_2 = \frac{0.2^3}{3!} = 0.0013333 = 1.3333 \cdot 10^{-3}$$

$$M_4 = \frac{0.2^5}{5!} = 0.00000266667 = 2.66667 \cdot 10^{-6}$$

$$M_6 = \frac{0.2^7}{7!} = 0.0000000025397 = 2.5397 \cdot 10^{-9}$$

όπου το  $M_i$  δίνει το μέγιστο σφάλμα αποκοπής της κάθε μιας από τις παραπάνω προσεγγίσεις.

Με δεδομένο ότι η ακριβής τιμή είναι η:

$$\cos(0.2 \text{ rad}) = 0.9800665778412$$

και συμβολίζοντας με  $\sigma_i$  το πραγματικό σφάλμα αποκοπής, στην περίπτωση που διατηρήσαμε μέχρι  $i$ -ης τάξης όρους, έχουμε:

$$\sigma_2 = 0.9800665778412 - 0.98 = 0.0000665778412$$

$$\sigma_4 = 0.9800665778412 - 0.980066667 = -0.0000000888254$$

$$\sigma_6 = 0.9800665778412 - 0.980066577778 = 0.0000000000634$$

Παρατηρούμε πως, σε κάθε περίπτωση, το μέγιστο σφάλμα αποκοπής  $M_i$  παραμένει μεγαλύτερο από το πραγματικό.



### Πίνακας αναπτυγμάτων Mac Laurin

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = x + \sum_{j=1}^n (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = 1 + \sum_{j=1}^n (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}$$

$$\begin{aligned}\tan(x) &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{18.52941176}x^7 + \frac{1}{45.72580645}x^9 + \\ &\quad + \frac{1}{112.8256151}x^{11} + \frac{1}{278.3865135}x^{13} + \dots \quad \text{αν} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{x^j}{j!}$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \frac{x^j}{j}$$

$$\begin{aligned} \arcsin(x) &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{13.333333} + \frac{x^7}{22.4} + \frac{x^9}{32.91428571} + \frac{x^{11}}{44.6984127} + \dots = \\ &= x + \sum_{j=1}^n \left[ \frac{(2j)!}{4^j (j!)^2 (2j+1)} x^{2j+1} \right] \quad x \in [-1, 1] \end{aligned}$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots = x + \sum_{j=1}^n \left[ \frac{(-1)^j}{2j+1} x^{2j+1} \right] \quad x \in [-1, 1]$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = x + \sum_{j=1}^n \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{x^{2j}}{(2j)!}$$

όπου, αξίζει να παρατηρήσουμε πως τα αναπτύγματα που δεν έχουν περιορισμό σύγκλισης, συγκλίνουν για κάθε πραγματική τιμή  $x$ . Επίσης, να αναφέρουμε πως δεν δόθηκε ο γενικός τύπος για το ανάπτυγμα της συνάρτησης  $\tan(x)$ , διότι χρησιμοποιεί τους αριθμούς Bernoulli και η εξήγησή τους ξεφεύγει από τα πλαίσια του παρόντος συγγράμματος.

### 3.5.1 Γενικός τρόπος χρήσης του αναπτύγματος Mac Laurin.

Η γενική μορφή του αναπτύγματος Mac Laurin αναφέρεται σε σύνθετες συναρτήσεις, στις οποίες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα ήδη γνωστά αναπτύγματα, διευκολύνοντας πολύ τους υπολογισμούς.

Για παράδειγμα, το ανάπτυγμα της συνάρτησης  $\cos(\pi(x))$ , όπου η  $\pi(x)$  είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση για την οποία ισχύει πως

- είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στην περιοχή το  $x=0$ , στην οποία θα ανήκει το τυχαίο  $x$  του οποίου την τιμή θα επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε,
- ενώ υπάρχει το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0} [\pi(x)] = 0$

δίνεται από τη σχέση:

$$\cos(\pi(x)) = 1 - \frac{\pi(x)^2}{2!} + \frac{\pi(x)^4}{4!} - \frac{\pi(x)^6}{6!} + \dots$$

από την οποία προκύπτει ο τρόπος χρήσης του αρχικού αναπτύγματος της συνάρτησης  $\cos(x)$ . Το ίδιο αποτέλεσμα, προφανώς, προκύπτει αν κάνουμε αναλυτικά τις πράξεις, οι οποίες όμως είναι συχνά ιδιαίτερα περίπλοκες.

Για παράδειγμα, εάν αναζητούμε το ανάπτυγμα της συνάρτησης:

$$\pi(x) = \cos(x^3 - 2x^2 + 3x)$$

έχουμε:

$$\begin{aligned}\cos(\pi(x)) &= 1 - \frac{\pi(x)^2}{2!} + \frac{\pi(x)^4}{4!} - \frac{\pi(x)^6}{6!} + \dots = \\ &= 1 - \frac{(x^3 - 2x^2 + 3x)^2}{2!} + \frac{(x^3 - 2x^2 + 3x)^4}{4!} - \frac{(x^3 - 2x^2 + 3x)^6}{6!} + \dots\end{aligned}$$

### Παρατήρηση:

Η χρησιμότητα των αναπτυγμάτων Taylor θα ήταν σχετικά ασήμαντη εάν η εφαρμογή τους αφορούσε μόνο στον υπολογισμό τιμών μιας μη πολυωνυμικής συνάρτησης. Αντίθετα, η συμβολή τους στην επίλυση άλλων μαθηματικών προβλημάτων (ολοκληρωμάτων, διαφορικών εξισώσεων κ.λ.π.) είναι σημαντικότερη.

## 3.6. Επίλυση ορισμένων ολοκληρωμάτων με τη βοήθεια των αναπτυγμάτων.

Συχνά, όταν σε ένα ολοκλήρωμα η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση αποτελείται από ένα πολυωνυμικό τμήμα και από ένα τμήμα μη πολυωνυμικό, αντικαθιστούμε το μη πολυωνυμικό τμήμα με το ανάπτυγμά του (κατά Taylor) και ολοκληρώνουμε το πολυώνυμο που προκύπτει.

### 3.6.1. Παραδείγματα

#### Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>

Να υπολογισθεί η τιμή του ολοκληρώματος:

$$I = \int_0^1 e^{x^2} dx$$

#### Λύση:

Πρόκειται για ένα ορισμένο ολοκλήρωμα για το οποίο δεν υπάρχει το αντίστοιχο αόριστο. Πράγματι, δεν υπάρχει συνάρτηση η οποία παραγωγιζόμενη να δώσει τη συνάρτηση  $e^{x^2}$ . Παρόλα αυτά, θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το αόριστο και το ορισμένο ολοκλήρωμα, με τη βοήθεια των αναπτυγμάτων. Αρχικά ας υπολογίσουμε το ανάπτυγμα της εν λόγω συνάρτησης:

Με δεδομένο το ανάπτυγμα:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

έχουμε:

$$e^{x^2} = 1 + (x^2) + \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!} + \dots = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots$$

οπότε το αόριστο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int e^{x^2} dx = \int \left[ 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots \right] dx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!5} + \frac{x^7}{3!7} + \dots$$

Συχνά, η μοναδικότητα του αναπτύγματος της κάθε συνάρτησης μας κάνει, αναφερόμενοι σ' αυτό, να μιλάμε για το «δακτυλικό αποτύπωμα» της εν λόγω συνάρτησης. Παρατηρούμε λοιπόν πως το αόριστο ολοκλήρωμα της  $e^{x^2}$  έχει ανάπτυγμα (αποτύπωμα), ενώ δεν έχει αναλυτική έκφραση. Αντικαθιστώντας στη συνέχεια στο ανάπτυγμα τα όρια ολοκλήρωσης, βρίσκουμε το αποτέλεσμα του ορισμένου ολοκληρώματος, με όση ακρίβεια θελήσουμε:

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2} dx &= \left[ x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!5} + \frac{x^7}{3!7} + \frac{x^9}{4!9} + \dots \right]_0^1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2!5} + \frac{1}{3!7} + \frac{1}{4!9} + \dots = \\ &= 1 + 0.33333 + 0.1 + 0.023809524 + 0.00462963 + 0.000757576 + \\ &\quad + 0.000106838 + 0.0000132275 + 0.00000145892 = 1.4626516\end{aligned}$$

όπου φτάσαμε στον 9<sup>ο</sup> όρο για να επιτύχουμε μια ακρίβεια της τάξης του 0.000001, όπου **εκτιμούμε την ακρίβεια που πετύχαμε, μέσω της τιμής του τελευταίου όρου που υπολογίσαμε.**



## Παράδειγμα 2<sup>ο</sup>

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

με ακρίβεια  $\varepsilon=0.001$

### Λύση:

Πρόκειται για ένα πρόβλημα αντίστοιχο του προηγούμενου, όπου βρίσκουμε άμεσα το ανάπτυγμα της  $e^{-x}$ , και στη συνέχεια το αντικαθιστούμε στο ολοκλήρωμα. Βέβαια, το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα λύνεται και αναλυτικά, κι έτσι μπορούμε να βεβαιωθούμε για το ακριβές αποτέλεσμα.

Εύκολα αποδεικνύεται πως, το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης  $e^{-x}$  δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

οπότε το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \int_0^1 x^2 \left( 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \right) dx = \int_0^1 \left( x^2 - x^3 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^5}{3!} + \dots \right) dx = \\ &= \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^6}{3!6} + \frac{x^7}{3!7} - \frac{x^8}{4!8} + \dots \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2!5} - \frac{1}{3!6} + \frac{1}{4!7} - \frac{1}{5!8} + \dots \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} - \frac{1}{36} + \frac{1}{168} - \frac{1}{960} + \dots = 0.1605\end{aligned}$$

Παρατηρούμε πως σταματήσαμε τον υπολογισμό στον όρο 1/960 (περίπου 0.001), θεωρώντας ιδιαίτερα μικρότερους της απαιτούμενης ακρίβειας τους επόμενους όρους. Επιλύοντας το ολοκλήρωμα με την κλασσική μέθοδο (διπλή κατά παράγοντες ολοκλήρωση) βρίσκουμε:



$$I = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \left[ -e^{-x} (x^2 + 2x + 2) \right]_0^1 = -5e^{-1} + 2 = 0.1606$$

Επομένως, το απόλυτο σφάλμα είναι μικρότερο της απαιτούμενης ακρίβειας, κάτι που δείχνει πως ο απλός τρόπος εκτίμησης του απόλυτου σφάλματος του αναπτύγματος (**σταματούμε όταν φθάνουμε σε όρο μικρότερο ή ίσο της απαιτούμενης ακρίβειας**) είναι αρκετά αποτελεσματικός.



### Παράδειγμα 3<sup>ο</sup>

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x \sin(x) dx$$

με ακρίβεια  $\varepsilon=0.001$

#### Λύση:

Στο παράδειγμα αυτό παρατηρούμε πως λόγω των ορίων της ολοκλήρωσης (από το  $\pi/2$  έως το  $3\pi/2$ ), η αντικατάσταση του ημιτόνου με το ανάπτυγμα Mac Laurin, το οποίο έχει ως κέντρο το  $x_0=0$ , δεν είναι η ιδανική. Αντίθετα, αντιλαμβανόμαστε πως θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα Taylor με κέντρο το σημείο  $x_0=\pi$ .

Υπολογίζουμε λοιπόν το ανάπτυγμα Taylor:

Πίνακας των παραγώγων.

$$[\sin(x)]_{x=\pi} = \sin(\pi) = 0$$

$$\frac{d}{dx}[\sin(x)]_{x=\pi} = \cos(\pi) = -1$$

$$\frac{d^2}{dx^2}[\sin(x)]_{x=\pi} = -\sin(\pi) = 0$$

$$\frac{d^3}{dx^3}[\sin(x)]_{x=\pi} = -\cos(\pi) = 1$$

...

Από τον προηγούμενο πίνακα των παραγώγων προκύπτει το ανάπτυγμα:

$$\sin(x) = -(x-\pi) + \frac{(x-\pi)^3}{3!} - \frac{(x-\pi)^5}{5!} + \frac{(x-\pi)^7}{7!} - \dots$$

$$\sin(\pi+h) = -h + \frac{h^3}{3!} - \frac{h^5}{5!} + \frac{h^7}{7!} - \dots \quad \text{όπου } h = x - \pi$$

Αντικαθιστούμε κάποιο από τα δύο αναπτύγματα στο ολοκλήρωμα και έχουμε:

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x \sin(x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x \left[ -(x-\pi) + \frac{(x-\pi)^3}{3!} - \frac{(x-\pi)^5}{5!} + \dots \right] dx =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (x - \pi + \pi) \left[ -(x - \pi) + \frac{(x - \pi)^3}{3!} - \frac{(x - \pi)^5}{5!} + \dots \right] dx =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (x - \pi) \left[ -(x - \pi) + \frac{(x - \pi)^3}{3!} - \frac{(x - \pi)^5}{5!} + \dots \right] dx +$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \pi \left[ -(x - \pi) + \frac{(x - \pi)^3}{3!} - \frac{(x - \pi)^5}{5!} + \dots \right] dx =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[ -(x - \pi)^2 + \frac{(x - \pi)^4}{3!} - \frac{(x - \pi)^6}{5!} + \dots \right] dx +$$

$$+ \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[ -(x - \pi) + \frac{(x - \pi)^3}{3!} - \frac{(x - \pi)^5}{5!} + \dots \right] dx =$$

$$= \left[ -\frac{(x - \pi)^3}{3} + \frac{(x - \pi)^5}{3!5} - \frac{(x - \pi)^7}{5!7} + \dots \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} +$$

$$+ \pi \left[ -\frac{(x - \pi)^2}{2} + \frac{(x - \pi)^4}{3!4} - \frac{(x - \pi)^6}{5!6} + \dots \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} =$$

$$= \left[ -\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{3!5} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^7}{5!7} + \dots \right] +$$

$$- \left[ -\frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^5}{3!5} - \frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^7}{5!7} + \dots \right] +$$

$$+ \pi \left[ -\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{3!4} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^6}{5!6} + \dots \right] +$$

$$- \pi \left[ -\frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^4}{3!4} - \frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^6}{5!6} + \dots \right] =$$

$$= 2 \left[ -\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{3!5} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^7}{5!7} + \dots \right] = 2(-0.99996) = -1.99993$$

Αν λύσουμε αναλυτικά το ολοκλήρωμα διαπιστώνουμε πως

$$A = \int x \sin(x) dx = -x \cos(x) + \sin(x) + c \quad \Rightarrow$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x \sin(x) dx = \left[ -x \cos(x) + \sin(x) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -2$$

κάτι που δείχνει πως η απαιτούμενη ακρίβεια επιτεύχθηκε...

Αντίστοιχη θα ήταν και η πορεία εάν είχαμε χρησιμοποιήσει το δεύτερο ανάπτυγμα (συναρτήσει της παραμέτρου  $h$ , όπου όμως θα έπρεπε να αντικαταστήσουμε το  $x$  με το  $\pi+h$ :

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x \sin(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\pi+h) \left[ -h + \frac{h^3}{3!} - \frac{h^5}{5!} + \frac{h^7}{7!} - \dots \right] dh = \dots = -1.99993$$

όπου διαφορίσαμε τη σχέση:  $x=\pi+h$ , με αποτέλεσμα να έχουμε  $dx=dh$ , ενώ τα όρια του ολοκληρώματος (εφόσον αφορούν στη νέα μεταβλητή  $h$ ) μεταβλήθηκαν ανάλογα...



## Παράδειγμα 4<sup>ο</sup>

Να υπολογισθούν οι τιμές της συνάρτησης  $f(x)$ , που λείπουν από τον παρακάτω πίνακα τιμών:

$x$	0	0,1	0,2	0,3
$f(x)$	0	...	...	...
$f'(x)$	1	1,010067	1,041091	
$f''(x)$	0	-0,20269	-0,42208	

Λύση.

Για τον υπολογισμό της τιμής  $f(0.1)$ , έχουμε σαν δεδομένο το ότι γνωρίζουμε την τιμή της συνάρτησης  $f$  καθώς και τις τιμές της 1<sup>ης</sup> και της 2<sup>ης</sup> παραγώγου, σε ένα διπλανό σημείο, το  $x=0$ . Με τη βοήθεια του αναπτύγματος του Taylor έχουμε:

$$f(0.1) = f(0) + 0.1f'(0) + \frac{0.1^2}{2!} f''(0) = 0 + 0.1 \cdot 1 + 0.005 \cdot 0 = 0.1$$

Όμοια έχουμε:

$$\begin{aligned} f(0.2) &= f(0.1) + 0.1f'(0.1) + \frac{0.1^2}{2!} f''(0.1) = \\ &= 0.1 + 0.1 \times 1.010067 + 0.005 \times (-0.20269) = 0.19999 \end{aligned}$$

και με αντίστοιχο τρόπο υπολογίζουμε πως  $f(0.3)=0.302$ .



### 3.7 Το πρόβλημα της σύγκλισης του Αναπτύγματος Taylor

Στις προηγούμενες παραγράφους δεν αναρωτηθήκαμε αν τα αναπτύγματα Taylor ή Mac Laurin που υπολογίσαμε συγκλίνουν ή όχι στις συναρτήσεις από τις οποίες προέρχονται. Στο σημαντικό αυτό ζήτημα, μια πρώτη απάντηση δίνεται μέσω του τύπου του σφάλματος, ο οποίος συχνά αναφέρεται και σαν «σχέση που ορίζει το υπόλοιπο του αναπτύγματος»:

$$E(\nu, x_0, x) = \frac{h^{\nu+1}}{(\nu+1)!} f^{(\nu+1)}(\xi)$$

#### Παράδειγμα χρήσης της σχέσης του υπολοίπου

Όπως είδαμε, το ανάπτυγμα της συνάρτησης  $e^x$  δίνεται από τη σχέση:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^\nu}{\nu!} + R_\nu(x)$$

όπου

$$R_\nu(x) = \frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!} (e^x)^{(\nu+1)}_{x=\xi} = \frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!} e^\xi$$

Για κάποια τιμή  $x$ , το ανάπτυγμα της συνάρτησης  $e^x$  συγκλίνει στην τιμή της συνάρτησης, εάν ισχύει για το υπόλοιπο του αναπτύγματος η σχέση:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} [R_\nu(x)] = 0$$

Βέβαια, για την περίπτωση του συγκεκριμένου αναπτύγματος αποδεικνύεται, σχετικά εύκολα, πως για κάποια συγκεκριμένη τιμή της μεταβλητής  $x$  ισχύει το όριο

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} [R_\nu(x)] = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!} e^\xi \right] = e^\xi \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \right] = e^\xi \cdot 0 = 0$$

Όμως, αν πάρουμε το ανάπτυγμα Mac-Laurin της συνάρτησης  $f(x) = \ln(x+1)$  έχουμε:

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{\nu+1} \frac{x^\nu}{\nu} + R_\nu(x)$$

όπου

$$R_\nu(x) = \frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)} (\ln(1+x))^{(\nu+1)}_{x=\xi}$$

Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται πως το όριο

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} [R_\nu(x)] = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)} (\ln(1+x))^{(\nu+1)}_{x=\xi} \right]$$

συγκλίνει μόνον εάν  $x < 1$ , διότι εάν  $x > 1$  ισχύει:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)} \right] = \infty$$

Πράγματι, με τη βοήθεια του κανόνα του De l' Hôpital, βλέπουμε πως, εάν  $a > 1$ :

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left[ \frac{a^\nu}{\nu} \right] = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left[ \frac{a^\nu \ln(a)}{1} \right] = \ln(a) \lim_{\nu \rightarrow \infty} [a^\nu] = \infty$$

## Κριτήρια αξιολόγησης

### Κριτήριο αξιολόγησης 1

Να αποδειχθεί πως ισχύουν τα παρακάτω αναπτύγματα Mac Laurin:

$$1. \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$2. \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$3. \quad \ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$4. \quad \sqrt{x+1} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2}\frac{x^2}{2!} + \frac{1 \cdot 3}{2^3}\frac{x^3}{3!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4}\frac{x^4}{4!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^5}\frac{x^5}{5!} - \dots$$

### Κριτήριο αξιολόγησης 2

Υπολογίστε, με ακρίβεια  $\varepsilon=0.001$  και με τη βοήθεια των αναπτυγμάτων Taylor, την τιμή των:  $\log(1001)$  και  $\sqrt{101}$ . Επιβεβαιώστε τα αποτελέσματά σας με το κομπιουτεράκι.

### Κριτήριο αξιολόγησης 3

Με τη βοήθεια των αναπτυγμάτων Mac Laurin των συναρτήσεων  $e^x$ ,  $\sin(x)$  και  $\cos(x)$ , να αποδειχθεί ο τύπος του Euler:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

### Κριτήριο αξιολόγησης 4

Γνωρίζουμε ότι

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$$

Ολοκληρώστε το ανάπτυγμα Mac Laurin της συνάρτησης  $f(x) = \sin(x)$  και δείξτε πως επιλέγοντας τη σταθερά ολοκλήρωσης  $c = -1$ , οδηγείστε στο ανάπτυγμα της συνάρτησης  $g(x) = -\cos(x)$ .

## Κριτήριο αξιολόγησης 5

Να υπολογίσετε, με ακρίβεια  $\varepsilon=0.001$ , την τιμή του ολοκληρώματος

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} x \ln(x+1) dx$$

## Κριτήριο αξιολόγησης 5

Να συμπληρώσετε τα κελιά των τιμών της συνάρτησης  $f(x)$  που λείπουν από τον παρακάτω πίνακα

x	0	0.1	0.2	0.3
$f(x)$	1			
$f'(x)$	1	1.1052	1.2214	
$f''(x)$	1	1.1052	1.2214	

## Κριτήριο αξιολόγησης 6

Αποδείξτε ότι, το ανάπτυγμα Mac Laurin 5<sup>ης</sup> τάξης της συνάρτησης  $f(x) = e^x \sin(x)$  ισούται με το γινόμενο των αναπτυγμάτων Mac Laurin 5<sup>ης</sup> τάξης των συναρτήσεων  $e^x$  και  $\sin(x)$  όπου μετά τον πολλαπλασιασμό κρατάμε όρους μέχρι 5<sup>ης</sup> τάξης ως προς  $x$ .

## Κριτήριο αξιολόγησης 7

Γνωρίζουμε, από τη θεωρία της Σχετικότητας, ότι η ολική ενέργεια ενός σώματος μάζας  $m$  δίνεται από τη σχέση,

$$E = mc^2$$

όπου  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  η ταχύτητα του φωτός στο κενό.

Από την ίδια θεωρία επίσης γνωρίζουμε ότι η μάζα  $m$  του σώματος εξαρτάται από την ταχύτητά του  $v$  σύμφωνα με τη σχέση

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

όπου  $m_0$  η μάζα του σώματος όταν είναι ακίνητο. Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η ταχύτητα, η μάζα του αυξάνεται.

Έτσι, η ολική ενέργεια ενός σώματος, όταν αυτό είναι ακίνητο, είναι  $E_0 = m_0 c^2$ , ενώ, όταν κινείται, αυξάνεται και γίνεται ίση με  $E = mc^2$ . Η διαφορά των δύο ενεργειών είναι προφανώς η κινητική ενέργεια του σώματος,

$$E_K = E - E_0.$$

Αν αντικαταστήσουμε τις εξισώσεις των δύο ενεργειών έχουμε

$$E_K = E - E_0 = mc^2 - m_0 c^2 = (m - m_0)c^2 = \left( \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 \right) c^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) m_0 c^2$$

Αποδείξτε ότι, όταν η ταχύτητα  $v$  είναι πολύ μικρή σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός  $c$ , δηλαδή το κλάσμα  $v/c$  είναι πολύ μικρότερο της μονάδας, η παραπάνω σχέση μετατρέπεται στη γνωστή, από τη φυσική του Λυκείου, σχέση της κινητικής ενέργειας

$$E_K = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

## Κεφάλαιο 4. Επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων

### Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα συστήματα εξισώσεων, τα οποία διακρίνονται σε γραμμικά και μη γραμμικά, καθώς και οι τρόποι αριθμητικής επίλυσης τους. Συγκεκριμένα, για τα γραμμικά συστήματα παρουσιάζονται, η μέθοδος των οριζουσών, η μέθοδος του αντίστροφου του πίνακα των συντελεστών και η μέθοδος Gauss – Cholevsky. Για τα μη γραμμικά συστήματα παρουσιάζονται, η γραμμική μέθοδος και η μέθοδος του Newton.

### Προαπαιτούμενη γνώση

Το κεφάλαιο προϋποθέτει ότι ο αναγνώστης έχει γνώσεις Μαθηματικών Ι του Α' Εξαμήνου σπουδών. Επίσης απαραίτητη είναι η βασική γνώση χρήσης του προγράμματος Excel. Για την κατανόηση της υλοποίησης των μεθόδων σε MATLAB απαιτούνται βασικές γνώσεις προγραμματισμού και χρήσης του προγράμματος MATLAB.

### 4.1. Γραμμικά συστήματα.

Το πρόβλημα της λύσης των γραμμικών συστημάτων έχει ήδη αντιμετωπισθεί στο μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας. Το μεγάλο όμως ενδιαφέρον που παρουσιάζει, μας αναγκάζει να ασχοληθούμε εν συντομία, προσανατολίζοντας το ενδιαφέρον του αναγνώστη στην επεξεργασία του προβλήματος με το Excel. Στη συνέχεια, θα θεωρήσουμε πως ο αναγνώστης γνωρίζει τις ορίζουσες και τον τρόπο υπολογισμού τους.

#### 4.1.1. Ορισμός ενός γραμμικού συστήματος.

Οι ν-επόμενες εξισώσεις ορίζουν ένα σύστημα με k-αγνώστους:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1k}x_k &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2k}x_k &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3k}x_k &= b_3 \\ &\dots = \dots \\ a_{v1}x_1 + a_{v2}x_2 + a_{v3}x_3 + \dots + a_{vk}x_k &= b_v \end{aligned} \quad (1)$$

Αναζητούμε τις k-άδες αριθμών της μορφής:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k)$$

ή

$$(x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, x_3 = \lambda_3, \dots, x_k = \lambda_k)$$

οι οποίες να επαληθεύουν το παραπάνω σύστημα, και οι οποίες ονομάζονται λύσεις του γραμμικού συστήματος.

Ξεχωρίζουμε τις περιπτώσεις:

1.  $k > v$ , όπου οι άγνωστοι είναι περισσότεροι από τις εξισώσεις. Ως γνωστόν, στην περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να βρούμε μία και μόνη λύση, αλλά καταλήγουμε σε μία συνάρτηση  $k - v$  μεταβλητών, άρα σε άπειρες λύσεις (άπειρες k-άδες αριθμών που επαληθεύουν το σύστημα).



2.  $k = v$ . Στην περίπτωση αυτή (αν οι  $k$ -εξισώσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους), αποδεικνύεται πως υπάρχει ακριβώς μία λύση για τους αγνώστους  $x_j$ .
3.  $k < v$ , όπου οι εξισώσεις είναι περισσότερες από τους αγνώστους. Στην περίπτωση αυτή, παίρνουμε τις  $k$  πρώτες εξισώσεις, τις επιλύουμε και διαπιστώνουμε το εάν συναληθεύουν για τη λύση που βρήκαμε και οι υπόλοιπες  $v - k$  εξισώσεις. Στην περίπτωση που συναληθεύουν και οι υπόλοιπες, τότε το σύστημα θεωρείται υπερπροσδιορισμένο και οι υπόλοιπες εξισώσεις μας είναι άχρηστες. Στην αντίθετη περίπτωση, όταν έστω και μία δεν συναληθεύει το σύστημα είναι αδύνατο.

Στη συνέχεια, θα θεωρήσουμε πως το πλήθος των αγνώστων είναι ακριβώς ίσο με το πλήθος των εξισώσεων.

#### 4.1.2. Επίλυση των γραμμικών συστημάτων με τη βοήθεια ορίζουσών

##### Διερεύνηση

Ορίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1v} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2v} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3v} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{v1} & a_{v2} & a_{v3} & \dots & a_{vv} \end{vmatrix}$$

η οποία συμβολίζεται με το  $\Delta$ , διότι παίζει το ρόλο της διακρίνουσας κατά τη διερεύνηση της λύσης.

Στη συνέχεια, ορίζουμε τις ορίζουσες:  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_v$ , οι οποίες προκύπτουν από τη  $\delta$ , όταν αντικατασταθεί η στήλη των συντελεστών του αντίστοιχου αγνώστου, με τη στήλη των σταθερών όρων. ως παράδειγμα δίνονται παρακάτω οι ορίζουσες  $\Delta x_1$  και  $\Delta x_3$ .

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1v} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2v} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3v} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_v & a_{v2} & a_{v3} & \dots & a_{vv} \end{vmatrix}$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & \dots & a_{1v} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & \dots & a_{2v} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & \dots & a_{3v} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{v1} & a_{v2} & b_v & \dots & a_{vv} \end{vmatrix}$$

Ως γνωστό, η λύση του συστήματος δίνεται από τις  $v$ -σχέσεις:

$$x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}$$

Η διερεύνηση του προβλήματος έχει να κάνει με την τιμή της ορίζουσας των συντελεστών των αγνώστων:  $\Delta$ . Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1.  $\Delta \neq 0$ . Στην περίπτωση αυτή έχουμε μία και μοναδική λύση του συστήματος. Είναι η περίπτωση που κυρίως μας ενδιαφέρει.

2.  $\Delta = 0$  και  $\Delta x_i \neq 0, \forall i \in [1, n]$ . Στην περίπτωση αυτή το σύστημα καλείται αόριστο και έχει άπειρες λύσεις. Συμβαίνει όταν οι εξισώσεις του συστήματος δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
3.  $\Delta = 0$  και ένα τουλάχιστον  $\Delta x_i \neq 0$ . Στην περίπτωση αυτή το σύστημα καλείται αδύνατο και δεν έχει καμία λύση.

**Παράδειγμα:** Έστω ότι έχουμε το παρακάτω σύστημα

$$2x - 4y = 5$$

$$4x - 8y = 10$$

Το σύστημα είναι αόριστο, μια και η 2η εξίσωση στην ουσία προκύπτει από την 1η με ένα πολλαπλασιασμό επί 2. Άρα δεν έχουμε σύστημα 2 εξισώσεων με δύο αγνώστους αλλά μία και μόνη εξίσωση με δύο αγνώστους.

Αντίθετα το σύστημα

$$2x - 4y = 5$$

$$4x - 8y = -3$$

είναι αδύνατο. Το αριστερό μέλος της 2ης εξίσωσης προέρχεται απ' αυτό της 1ης πολλαπλασιασμένο επί 2, ενώ το δεξιό μέλος της είναι αδύνατο (ουσιαστικά οι δύο εξισώσεις δηλώνουν αν  $A = 2x - 4y$  τότε  $A = 5$  και  $2A = -3$ , πράγμα αδύνατο).



### 4.1.3. Οι ορίζουσες και τα γραμμικά συστήματα στο Excel

#### α) Μαθηματικές υπενθυμίσεις.

Η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα  $A$  ( $\det[A] = |A|$ ), είναι ένα βαθμωτό μέγεθος που προσαρτάται στον πίνακα  $A$ . Πρόκειται δηλαδή για μία τιμή που αποδίδεται σ' έναν πίνακα και προκύπτει από πράξεις ανάμεσα στα στοιχεία του.

Υπολογίζεται, ως γνωστόν, με την ανάπτυξη της ορίζουσας κατά τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης. Ο υπολογισμός όμως μιας ορίζουσας με τη μέθοδο του αναπτύγματος σε ορίζουσας μικρότερης τάξης είναι ιδιαίτερα επίπονος, για  $n$  μεγαλύτερο του 4. Γι' αυτό επιχειρούμε να την υπολογίσουμε στηριζόμενοι στις παρακάτω ιδιότητες:

1. Η τιμή μιας ορίζουσας αλλάζει πρόσημο κάθε φορά που αντιμεταθέτουμε μία γραμμή με κάποια άλλη (το ίδιο συμβαίνει και με αντιμετάθεση δύο στηλών).
2. Η τιμή μιας ορίζουσας δεν μεταβάλλεται εάν στα στοιχεία κάποιας γραμμής προσθέσουμε (ή αφαιρέσουμε) τα αντίστοιχα στοιχεία κάποιας άλλης γραμμής, πολλαπλασιασμένα επί τον ίδιο σταθερό αριθμό.
3. Η τιμή μιας ορίζουσας, της οποίας όλα τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω ή (και) κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι όλα ίσα με το μηδέν (οπότε λέγεται τριγωνική), ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου.

Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες ιδιότητες, προσπαθούμε να μηδενίσουμε τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο, **χρησιμοποιώντας πάντα το αντίστοιχο στοιχείο της διαγωνίου**. Αρχικά, μηδενίζουμε, με το στοιχείο  $a_{11}$  (το πρώτο της πρώτης γραμμής), τα πρώτα στοιχεία (τα στοιχεία της πρώτης στήλης) των παρακάτω γραμμών (τα  $a_{21}, a_{31}$  κ.λ.π.). Ο μηδενισμός του στοιχείου  $a_{21}$  επιτυγχάνεται πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή με τη σταθερά:

$$k = -a_{21}/a_{11}$$

και προσθέτοντας τα στοιχεία της στα αντίστοιχα της δεύτερης:

$$\begin{array}{c} (-a_{21}/a_{11}) \times \\ \xrightarrow{+} \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1v} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2v} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3v} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{v1} & a_{v2} & a_{v3} & \dots & a_{vv} \end{bmatrix} \begin{array}{c} (-a_{31}/a_{11}) \times \\ \xleftarrow{+} \end{array}$$

Στη συνέχεια, με παρόμοιο τρόπο, με το στοιχείο  $a_{22}$  (αυτό που θα προκύψει μετά τις προηγούμενες πράξεις στη θέση αυτή), μηδενίζουμε τα κάτω απ' αυτό στοιχεία (τα  $a_{32}$ ,  $a_{42}$ , κ.λ.π.).

Εάν συμβεί το στοιχείο  $a_{22}$  να είναι ίσο με το μηδέν, τότε αντιμετωπίζουμε τη 2η σειρά με κάποια από τις παρακάτω, έτσι ώστε το  $a_{22}$  να γίνει διάφορο του μηδενός. Εάν αυτό είναι αδύνατο να συμβεί, γιατί κανένα άλλο στοιχείο στη δεύτερη στήλη, κάτω από το  $a_{22}$ , δεν είναι διάφορο του μηδενός, τότε το  $a_{22}$  θα είναι ούτως ή άλλως μηδέν, συμπεραίνουμε πως η τιμή της ορίζουσας είναι μηδέν (γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου από τα οποία το ένα θα είναι μηδέν).

Αν χρειαστεί να εκτελέσουμε την παραπάνω διαδικασία, δηλαδή να αντιμετωπίσουμε δύο γραμμές, θα πρέπει επίσης να λάβουμε υπόψη μας ότι η ορίζουσα που θα υπολογίσουμε, μετά την αντιμετάθεση, έχει πολλαπλασιαστεί επί  $-1$ . Αν θέλουμε να αποφύγουμε τον πολλαπλασιασμό, μπορούμε αντί να κάνουμε αντιμετάθεση των δύο γραμμών, να προσθέσουμε τη δεύτερη γραμμή (αυτή που το στοιχείο της στήλης που μας ενδιαφέρει δεν είναι μηδέν) στην πρώτη (αυτή που το στοιχείο της διαγωνίου είναι μηδέν). Με τον τρόπο αυτό, η ορίζουσα παραμένει ως έχει και δεν πολλαπλασιάζεται με  $-1$ .

## β) Εφαρμογή στο Excel.

Στο φύλλο του Excel θα επιχειρήσουμε να ορίσουμε έτσι τις πράξεις, ώστε να είναι δυνατό να τις επεκτείνουμε με τρόπο γενικό. Κάθε φορά, όταν πρόκειται να επαναλάβουμε τον μαθηματικό τύπο ενός κελιού, σε δύο κατευθύνσεις, πρέπει να τοποθετήσουμε με ιδιαίτερη προσοχή και απόλυτη ακρίβεια το σύμβολο κλειδί (\$). Ως γνωστόν το σύμβολο \$ «κλειδώνει» (σταθεροποιεί κατά το σύρσιμο) όποια συντεταγμένη κελιού βρίσκεται αμέσως μετά από αυτό. Στο παρακάτω σχεδιάγραμμα δίνονται οι επιθυμητές πράξεις για έναν πίνακα 3x3.

	A	B	C	D	E	F
1						
2		2	3	4		
3	A=	1	-2	3	=	
4		3	2	2		
5						
6		=B2	=C2	=D2		
7	=	=B3-B2*B3/B2	=C3-C2*B3/B2	=D3-D2*B3/B2		
8		=B4-B2*B4/B2	=C4-C2*B4/B2	=D4-D2*B4/B2		
9						

Προφανώς, πρέπει να γράψουμε μόνο την πράξη του κελιού B7, να τοποθετήσουμε σωστά τα κλειδιά και να τη σύρουμε στις δύο κατευθύνσεις. Μια εύκολη μέθοδος για να βρούμε τις σωστές θέσεις είναι να γράψουμε (π.χ. σε ένα χαρτί) τις τρεις πράξεις που στο πιο πάνω σχεδιάγραμμα είναι γραμμένες με έντονους χαρακτήρες (στα κελιά B7, B8 και C7). Τότε, συγκρίνοντας τους αριθμούς των κελιών B7 και B8, που παίρνουν μέρος στην πράξη αντιλαμβανόμαστε ποιοι από αυτούς πρέπει να σταθεροποιηθούν, ενώ επιτυγχάνουμε ακριβώς το ίδιο για τα γράμματα, μέσω της σύγκρισης των κελιών B7 και C7. Καταλήγουμε λοιπόν στο σωστό περιεχόμενο του κελιού B7:

$$=B3-B\$2*\$B3/\$B\$2$$

Συνολικά οι απαιτούμενες ενέργειες είναι οι παρακάτω:

1. Ορισμός του κελιού B6 (=B2),
2. Σύρσιμο του κελιού B6, έως το τέλος της 1ης γραμμής του πίνακα.
3. Τοποθέτηση του τύπου που αντιστοιχεί στο κελί B7 (=B3-B2\*B3/B2).
4. Τοποθέτηση του συμβόλου \$, στις συντεταγμένες των κελιών που εμφανίζονται στο κελί B7 (προηγούμενη ενέργεια), έτσι ώστε σύροντας το κελί προς τα δεξιά (ως το τέλος της γραμμής), και στη συνέχεια ολόκληρη τη γραμμή προς τα κάτω, να υπολογίζονται όλα όσα θέλουμε.

Στη συνέχεια με τον ίδιο τρόπο μηδενίζονται και τα υπόλοιπα στοιχεία, έτσι ώστε η τιμή της ορίζουσας να δίνεται από το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου.

**Σαν άσκηση**, λοιπόν, υπολογίστε την ορίζουσα του παρακάτω πίνακα.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2		1	2	1	0		1	2	1	0	
3		2	2	3	1	=	0	-2	1	1	=
4		3	1	5	1		0	-5	2	1	
5		2	1	3	2		0	-3	1	2	
6											
7		1	2	1	0		1	2	1	0	
8		0	-2	1	1	=	0	-2	1	1	= 2
9		0	0	-0,5	-1,5		0	0	-0,5	-1,5	
10		0	0	-0,5	0,5		0	0	0	2	
11											



Ουσιαστικά πρόκειται για μια απεικόνιση του συστήματος (1), γι' αυτό και ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες, οι οποίες καθορίζουν κάποιες επιτρεπτές πράξεις που συχνά ονομάζονται «επιτρεπτές γραμμοπράξεις».

- Μπορούμε να αντιμεταθέσουμε τις γραμμές του  $\mathbf{G}$ , όπως θα μπορούσαμε να αλλάξουμε τη σειρά με την οποία εμφανίζονται οι εξισώσεις του συστήματος (1). Αντίθετα αποφεύγουμε να αντιμεταθέσουμε τις στήλες του  $\mathbf{G}$ , μια και θα αντιστοιχούσαν σε αντιμετάθεση των μεταβλητών του (1).
- Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε οποιαδήποτε γραμμή του  $\mathbf{G}$  με κάποιο σταθερό αριθμό, (η κάθε γραμμή συμβολίζει μια εξίσωση – ισότητα της οποίας τα μέλη μπορούν να πολλαπλασιασθούν επί έναν σταθερό αριθμό). Αντίθετα **δεν** πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία μιας στήλης.
- Μπορούμε να αντικαταστήσουμε μία γραμμή με το γραμμικό συνδυασμό αυτής με κάποιες άλλες (π.χ. να πολλαπλασιάσουμε κάποια γραμμή με ένα σταθερό αριθμό και να την προσθέσουμε σε μιαν άλλη).

Βασισμένοι στις προηγούμενες ιδιότητες, μετατρέπουμε τον προηγούμενο πίνακα στον:

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \omega_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \omega_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \omega_v \end{bmatrix}$$

που ισοδυναμεί με το σύστημα – λύση των εξισώσεων (1):

$$\begin{pmatrix} x_1 = \omega_1 \\ x_2 = \omega_2 \\ x_3 = \omega_3 \\ \dots = \dots \\ x_v = \omega_v \end{pmatrix}$$

Η διαδικασία αυτή περιγράφεται αναλυτικά στη συνέχεια, όταν περιγράφουμε την επίλυση με τη βοήθεια του Excel.

#### 4.1.6. Αντιστροφή πίνακα.

Ο θεωρητικός υπολογισμός του  $\mathbf{A}^{-1}$  δεν είναι μια εύκολη διαδικασία και απαιτεί αρκετές πράξεις. Ιδιαίτερα στην περίπτωση που η διάσταση ενός πίνακα είναι αρκετά μεγαλύτερη της (3x3), τότε το πλήθος των πράξεων αυξάνεται εκρηκτικά! Η μέθοδος υπολογισμού του  $\mathbf{A}^{-1}$  που θα εξετάσουμε στην παράγραφο αυτή βασίζεται στις τρεις γραμμοπράξεις που αναφέρθηκαν στην παράγραφο 4.1.5. (Gauss – Cholevsky):

- Μπορούμε να αντιμεταθέσουμε τις γραμμές του  $\mathbf{G}$ . Αντίθετα αποφεύγουμε να αντιμεταθέσουμε τις στήλες του  $\mathbf{G}$ .
- Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε οποιαδήποτε γραμμή του  $\mathbf{G}$  με κάποιο σταθερό αριθμό. Αντίθετα **δεν** πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία μιας στήλης.
- Μπορούμε να αντικαταστήσουμε μία γραμμή με το γραμμικό συνδυασμό αυτής με κάποιες άλλες (π.χ. να πολλαπλασιάσουμε κάποια γραμμή με ένα σταθερό αριθμό και να την προσθέσουμε σε μιαν άλλη).

## Καθορισμός της μεθόδου

Ξεκινούμε από τη σχέση που ορίζει τον αντίστροφο πίνακα, ενός τετραγωνικού πίνακα  $A$ :

$$A \cdot A^{-1} = I$$

Η εφαρμογή μιας σειράς μετασχηματισμών στις γραμμές του  $A$ , συνεπάγεται την εφαρμογή των ίδιων μετασχηματισμών στις γραμμές του  $I$ .

$$A' \cdot A^{-1} = I'$$

Εάν επομένως οι μετασχηματισμοί που θα εφαρμοσθούν στον  $A$ , τον μετατρέψουν στον μοναδιαίο, τότε θα ισχύει η σχέση:

$$I \cdot A^{-1} = I' \quad \text{ή} \quad A^{-1} = I'$$

**Συμπέρασμα:** Εάν εφαρμοστούν στον μοναδιαίο πίνακα  $I$ , οι μετασχηματισμοί γραμμών οι οποίοι μετατρέπουν τον πίνακα  $A$  σε μοναδιαίο, ο πίνακας  $I$  θα μετατραπεί στον αντίστροφο πίνακα του  $A$  (τον  $A^{-1}$ ).

**Τρόπος δουλειάς:** Ένας εύκολος τρόπος για να εφαρμοσθούν στον  $I$  οι μετασχηματισμοί που μετατρέπουν τον  $A$  σε μοναδιαίο, είναι να τοποθετήσουμε τον  $I$  στα δεξιά του  $A$  και κάθε μετασχηματισμό του  $A$  να τον επεκτείνουμε και στον  $I$ .

$$AI = \left[ \begin{array}{cccc|ccccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right]$$

Έτσι, εάν με επιτρεπτές γραμμοπράξεις καταφέρουμε να μετατρέψουμε τις πρώτες  $n$  στήλες (που αντιστοιχούν στον  $A$ ) σε μοναδιαίο πίνακα, τότε στις επόμενες στήλες (όπου υπήρχε ο μοναδιαίος) θα εμφανισθεί ο αντίστροφος του  $A$  (ο  $A^{-1}$ ).

## Παρατηρήσεις:

- Για να κάνουμε κάποιο στοιχείο της διαγωνίου ίσο με τη μονάδα, είμαστε υποχρεωμένοι να διαιρέσουμε **ολόκληρη τη γραμμή** στην οποία ανήκει με το στοιχείο αυτό (3<sup>η</sup> επιτρεπτή γραμμοπράξη).
- Μηδενίζουμε ένα στοιχείο κάποιας γραμμής με το **αντίστοιχο στοιχείο της διαγωνίου** κάποιας άλλης γραμμής (είτε προς τα άνω είτε προς τα κάτω). Έτσι, εάν για παράδειγμα θέλουμε να μηδενίσουμε το στοιχείο  $a_{32}$  με τη βοήθεια του  $a_{22}$ , πολλαπλασιάζουμε την 2<sup>η</sup> γραμμή επί το κλάσμα  $(a_{32}/a_{22})$  και την αφαιρούμε από την 3<sup>η</sup> γραμμή. **Προσοχή!** Βολεύει να μηδενίζουμε μόνο με τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου (τα  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ ), τα οποία **δεν θέλουμε να μηδενισθούν**.
- Εάν κατά τους μηδενισμούς, κάποιο από τα στοιχεία της διαγωνίου μηδενισθεί, τότε θα πρέπει να αντιμετωπίσουμε τη γραμμή του, με κάποια από τις επόμενες. **Εάν σε όλες τις επόμενες γραμμές το αντίστοιχο στοιχείο είναι μηδενικό, τότε ο πίνακας  $A$  δεν αντιστρέφεται.** Όπως είδαμε, η ορίζουσά του, στην περίπτωση αυτή, είναι ίση με το μηδέν. Άρα, φθάνουμε πάλι στο συμπέρασμα πως ένας τετραγωνικός πίνακας  $A$  αντιστρέφεται, μόνον εάν η ορίζουσά του είναι διάφορη του μηδενός.

### 4.1.7. Αντιστροφή πίνακα με το Excel

Και πάλι πρέπει να ορίσουμε τις πράξεις με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούν να επεκταθούν προς τα δεξιά και προς τα κάτω.

Οι εργασίες που θα γίνουν από τον πρώτο πίνακα προς το δεύτερο:

1. Διαιρούμε ολόκληρη την 1η γραμμή με το στοιχείο  $a_{11}$ , έτσι ώστε το  $a_{11}$  να γίνει μονάδα.
2. Με τρόπο όμοιο με αυτόν της προηγούμενης παραγράφου μηδενίζουμε τα στοιχεία  $a_{21}$ ,  $a_{31}$ , κ.λ.π..

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		4	2	3	1	0	0	
3		-2	3	0	0	1	0	
4		1	0	1	0	0	1	
5								
6		=B2/\$B2	=C2/\$B2	=D2/\$B2	=E2/\$B2	=F2/\$B2	=G2/\$B2	
7		=B3-B2*\$B3/\$B\$2	=C3-C2*\$B3/\$B\$2	=D3-D2*\$B3/\$B\$2	κ.λ.π.			
8		=B4-B2*\$B4/\$B\$2	=C4-C2*\$B4/\$B\$2	=D4-D2*\$B4/\$B\$2				
9								

Ο νέος πίνακας έχει το στοιχείο  $a_{11}=1$  και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της 1η γραμμής μηδέν. Οι εργασίες που πρέπει να γίνουν από το δεύτερο πίνακα προς τον τρίτο είναι:

1. Διαιρούμε όλα τα στοιχεία της 2ης γραμμής με το στοιχείο  $a_{22}$ , ώστε να έχουμε  $a_{22}=1$ .
2. Με τη βοήθεια του  $a_{22}$  μηδενίζουμε όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της 2ης στήλης ( $a_{12}$ ,  $a_{32}$ , κ.λ.π.).

	A	B	C	D	E	F	G	H
5								
6		1	0,5	0,75	0,25	0	0	
7		0	4	1,5	0,5	1	0	
8		0	-0,5	0,25	-0,25	0	1	
9								
10		=B6	=C6-C7*\$C6/\$C\$7	=D6-D7*\$C6/\$C\$7	=E6-E7*\$C6/\$C\$7	κ.λ.π.		
11		=B7	=C7/\$C7	=D7/\$C7	=E7/\$C7	κ.λ.π.		
12		=B8	=C8-C7*\$C8/\$C\$7	=D8-D7*\$C8/\$C\$7	=E8-E7*\$C8/\$C\$7	κ.λ.π.		
13								



Στη συνέχεια έχουμε τις εργασίες:

1. Διαιρώ τα στοιχεία της 3ης γραμμής με το  $a_{33}$  (οπότε  $a_{33}=1$ ).
2. Με το  $a_{33}$  μηδενίζω πρώτα το στοιχείο  $a_{13}$  και μετά το  $a_{23}$ , όπου ακολουθώ τη σειρά αυτή για να μπορέσω να σύρω προς τα δεξιά και προς τα κάτω την πράξη από το κελί του  $a_{13}$ .

	A	B	C	D	E	F	G	H
9								
10		1	0	0,5625	0,1875	-0,125	0	
11		0	1	0,375	0,125	0,25	0	
12		0	0	0,4375	-0,1875	0,125	1	
13								
14		=B10	=C10	=D10-D\$12*\$D10/\$D\$12	=E10-E\$12*\$D10/\$D\$12	κ.λ.π.		
15		=B11	=C11	=D11-D\$12*\$D11/\$D\$12	=E11-E\$12*\$D11/\$D\$12	κ.λ.π.		
16		=B12	=C12	=D12/\$D12	=E12/\$D12	κ.λ.π.		
17								

	A	B	C	D	E	F	G	H
13								
14		1	0	0	0,428571	-0,28571	-1,28571	
15		0	1	0	0,285714	0,142857	-0,85714	
16		0	0	1	-0,42857	0,285714	2,285714	
17								

Με τις πράξεις αυτές καταλήγουμε στο τελικό αποτέλεσμα, στον αντίστροφο πίνακα του A, ο οποίος είναι ο:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.429 & -0.286 & -1.286 \\ 0.286 & 0.143 & 0.857 \\ -0.429 & 0.286 & 2.286 \end{pmatrix}$$

#### 4.1.8. Λύση γραμμικών συστημάτων με το Excel.

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τον «προγραμματισμό» της μεθόδου των Gauss–Cholevsky, με το Excel. Η μαθηματική περιγραφή της μεθόδου έχει ήδη γίνει. Το μόνο που μένει να πούμε είναι πως, η μετατροπή των συντελεστών του επαυξημένου πίνακα, στο Excel, γίνεται όμοια με τη μέθοδο υπολογισμού του αντίστροφου πίνακα που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τη λύση του συστήματος:

$$\begin{array}{rrrrr} 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & +4x_4 & = & 2 \\ x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & -13 \\ 3x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +4x_4 & = & 30 \\ -2x_1 & -3x_2 & +4x_3 & +6x_4 & = & -17 \end{array}$$

Αξίζει να προσπαθήσετε να παρακολουθήσετε τη σειρά των πράξεων που σας προτείνουμε στη συνέχεια, όπου σε κάθε πέρασμα τροποποιούμε μία στήλη, κάνοντας ταυτόχρονα δύο δουλειές: Κάνουμε μονάδα το στοιχείο της διαγωνίου της στήλης και μηδενίζουμε τα υπόλοιπα στοιχεία της.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2	2	-1	3	4	2		1	-0,5	1,5	2	1	
3	1	-2	2	1	-13		0	-1,5	0,5	-1	-14	=
4	3	3	2	4	30		0	4,5	-2,5	-2	27	
5	-2	-3	4	6	-17		0	-4	7	10	-15	
6												
7	1	0	1,3333	2,3333	5,6667		1	0	0	-4,3333	-14,3333	
8	0	1	-0,3333	0,6667	9,3333		0	1	0	2,3333	14,3333	=
9	0	0	-1	-5	-15		0	0	1	5	15	
10	0	0	5,6667	12,6667	22,3333		0	0	0	-15,667	-62,6667	
11												
12				1	0	0	0	3				
13			=	0	1	0	0	5				=
14				0	0	1	0	-5				
15				0	0	0	1	4				
16												

Για ευκολία, μάλιστα, μπορούμε να μηδενίσουμε πρώτα τα στοιχεία της στήλης που έχει σειρά στο τρέχον στάδιο («σέρνοντας» τις πράξεις προς τα δεξιά) και αμέσως μετά να κάνουμε μονάδα το στοιχείο της διαγωνίου (και να το σύρουμε προς τα δεξιά), οπότε διαγράφει τις παλιές πράξεις και εμφανίζει τις επόμενες...



**Άσκηση:** Στο ίδιο φύλλο εργασίας (έχοντας υπολογίσει σωστά τα αποτελέσματα) υπολογίζεται η λύση του συστήματος:

$$\begin{array}{rrcr}
x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & = & 38 \\
5x_1 & -6x_2 & +7x_3 & +8x_4 & = & 70 \\
9x_1 & +8x_2 & +7x_3 & +6x_4 & = & 186 \\
-5x_1 & -4x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = & 0
\end{array}$$

με απλή αντικατάσταση των νέων συντελεστών!

#### 4.1.9. Επίλυση γραμμικών συστημάτων με έτοιμες συναρτήσεις του Excel.

Το Excel διαθέτει έτοιμες συναρτήσεις – εντολές που αναφέρονται στις βασικές έννοιες της Γραμμικής Αλγεβρας. Οι κυριότερες είναι:

##### (i) Η συνάρτηση **mdeterm**(«Τετραγωνικός πίνακας»)

η οποία δίνει την ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα που έχει ως όρισμα. Για παράδειγμα η εντολή:

=mdeterm(B2:E5)

(όπου ο χαρακτήρας «:» –σε λατινικό πληκτρολόγιο– σημαίνει «έως»), υπολογίζει την ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα, του οποίου τα στοιχεία έχουν τοποθετηθεί στην τετραγωνική περιοχή κελιών που ξεκινάει από το κελί B2 (άνω αριστερά και τελειώνει στο κελί E5 (κάτω δεξιά).

##### (ii) Η συνάρτηση **minverse**(«Τετραγωνικός πίνακας»)

η οποία υπολογίζει τον αντίστροφο του πίνακα που υπάρχει στο όρισμά της. Όμως, με την εντολή:

=minverse(B2:E5)

αποδίδεται στο εν λόγω κελί μόνο το 1<sup>ο</sup> στοιχείο (το στοιχείο (1,1)) του αντίστροφου πίνακα και όχι τα υπόλοιπα. Ολόκληρος ο αντίστροφος πίνακας μπορεί να εμφανιστεί είτε αυτόματα, είτε με τη βοήθεια της εντολής index (που εξηγείται στη συνέχεια).

Ο αυτόματος τρόπος έχει ως εξής:

Αφού εκτελέσουμε την εντολή: =minverse(B2:E5), έστω στο κελί B7, όπου και θα εμφανιστεί το πρώτο στοιχείο του αντίστροφου,

- «μαυρίζουμε» (καθορίζουμε με το ποντίκι) την περιοχή B7:E10 (ξεκινώντας από το B7), στην οποία θα εμφανιστεί ο αντίστροφος πίνακας (προφανώς η περιοχή πρέπει να έχει ακριβώς τη διάσταση του αντίστροφου),
- πατούμε το πλήκτρο F2,
- κρατώντας πατημένα, ταυτόχρονα, τα πλήκτρα Ctrl, Shift, πατάμε το Enter.

Αυτόματα εμφανίζεται ολόκληρος ο αντίστροφος πίνακας στη μαυρισμένη περιοχή.

##### (iii) Η συνάρτηση **index**(«Πίνακας»;«Αριθμός γραμμής»;«Αριθμός στήλης»).

Η συνάρτηση αυτή έχει στο πρώτο της πεδίο έναν πίνακα (οποιασδήποτε διάστασης, ο οποίος μπορεί και να είναι αποτέλεσμα μιας πράξης πινάκων), στο δεύτερο πεδίο τον αριθμό μιας από τις γραμμές του πίνακα, και στο τρίτο πεδίο τον αριθμό μιας από τις στήλες του πίνακα. ως αποτέλεσμα της εκτέλεσής της, εμφανίζει στο κελί που αναγράφεται, το στοιχείο του πίνακα που βρίσκεται στη σειρά που καθορίζεται από το 2<sup>ο</sup> πεδίο της συνάρτησης και στη στήλη που καθορίζεται από το 3<sup>ο</sup> πεδίο. Για παράδειγμα η εντολή:

=index(B2:E5;2;3)

θα αναγράψει το περιεχόμενο του κελιού D3.

### Απλή χρήση:

Έστω ένας πίνακας (2x2) στα κελιά A2:B3. Ο αντίστροφός του εμφανίζεται στα παρακάτω κελιά:

=index(minverse(A2:B3);1;1)	=index(minverse(A2:B3);1;2)
=index(minverse(A2:B3);2;1)	=index(minverse(A2:B3);2;2)

### Στοιχειώδης προγραμματισμός:

Επειδή μπορούμε στο 2<sup>ο</sup> και στο 3<sup>ο</sup> πεδίο της εντολής index να βάλουμε κελιά, αντί για αριθμούς, μπορούμε να δημιουργήσουμε μία δομή σαν αυτήν του παρακάτω σχεδιαγράμματος και να αριθμήσουμε τις γραμμές και τις στήλες της περιοχής όπου θα αναγραφεί το αποτέλεσμα του αντίστροφου πίνακα. Τότε μπορούμε να γράψουμε (με τα σωστά κλειδιά) την κεντρική εντολή και να την «σύρουμε» σε δύο κατευθύνσεις.

### Παράδειγμα:

Ας υποθέσουμε λοιπόν πως έχουμε στην περιοχή B2:D4 έναν τετραγωνικό (3x3) πίνακα. Δημιουργούμε τη δομή της στήλης F και της γραμμής 1, γύρω από την περιοχή του αποτελέσματος,

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1							1	2	3	
2						1				
3	A=				A <sup>-1</sup> =	2				
4						3				
5										

και γράφουμε στο κεντρικό κελί (G2)

=index(minverse(\$B\$2:\$D\$4;\$F2;G\$1)

Στην συνέχεια, αντιγράφουμε το κελί G2 στα υπόλοιπα κελιά (μέχρι το I4).

### (iv) Η συνάρτηση mmult(«Πίνακας 1»; «Πίνακας 2»)

η οποία υπολογίζει το γινόμενο των πινάκων 1 και 2, που αναφέρονται στα δύο πεδία του ορίσμά της. Και εδώ χρειαζόμαστε τη συνδρομή του αυτόματου τρόπου εμφάνισης μιας πράξης πινάκων (Εκτέλεση της πράξης στα άνω αριστερά κελί – «μαύρισμα της περιοχής του αποτελέσματος – F2 – Ctrl, Shift και Enter), ή της εντολής index. Προφανώς, η πράξη γίνεται μόνον όταν το επιτρέπουν οι διαστάσεις των δύο πινάκων.

### (v) Άμεση λύση ενός Γραμμικού Συστήματος.

Έστω ο επαυξημένος πίνακας **G**, ενός γραμμικού συστήματος, όπως φαίνεται στην επόμενη εικόνα. Τότε η λύση **X** του συστήματος μπορεί να γραφτεί, αυτόματα ή με τη βοήθεια της index, με μία μόνο εντολή, η οποία θα πολλαπλασιάζει τον αντίστροφο του πίνακα **A** με τους σταθερούς όρους του πίνακα **B**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1			A=		B=			X=		
2							1			
3							2			
4							3			
5										

Στο H2 γράφουμε:

=index(mmult(minverse(B\$2:D\$4);E\$2:E\$4);G2;1)

και αντιγράφουμε (σέρνουμε) στα υπόλοιπα (παρακάτω) κελιά.

#### (vi) Επίλυση χωρίς τη χρήση της INDEX.

Είναι δυνατόν να επιλύσουμε ένα σύστημα με εντελώς αυτόματο τρόπο, χωρίς τη χρήση της συνάρτησης INDEX. Έστω πως θέλουμε να επιλύσουμε το σύστημα που αναφέρεται στο πιο πάνω τμήμα του φύλλου του Excel. Γράφουμε στο κελί H2 την εντολή:

=mmult(minverse(B\$2:D\$4);B\$2:B\$4)

Πατώντας το Enter έχουμε ήδη στο κελί H2 τη λύση του άγνωστου  $x_1$ . Ξεκινώντας από το κελί H2, μαυρίζουμε (με τον παχύ σταυρό του Excel) την περιοχή όπου οφείλει να γραφεί το αποτέλεσμα της πράξης (το αποτέλεσμα, δηλαδή, του πολλαπλασιασμού του πίνακα  $A^{-1}$  με τον B). Μαυρίζουμε επομένως την περιοχή H2:H4. Στη συνέχεια πατούμε το πλήκτρο F4, οπότε εμφανίζεται αναλυτικά η πράξη στο κελί H2, μέσα σε άγκιστρα. Στη συνέχεια πατούμε ταυτόχρονα τα πλήκτρα

Alt + Ctrl + Enter

και εμφανίζεται ολόκληρος ο ζητούμενος πίνακας (οι λύσεις  $x_j$  στο εν λόγω πρόβλημα).

Προσοχή! Δεν είναι δυνατό να παρέμβουμε σε τμήμα της περιοχής του πίνακα που προήλθε από μία τέτοια αυτοματοποιημένη διαδικασία. Κάθε προσπάθεια μεταβολής κάποιου στοιχείου συναντά την απόλυτη αντίδραση του Excel και για να απεμπλακούμε από αυτό το αδιέξοδο πρέπει να πατήσουμε το πλήκτρο Esc(ape)...

### 4.1.10 Υλοποίηση μεθόδων στο MATLAB

#### Ορίζουσα πίνακα

Η συνάρτηση m\_det, που ακολουθεί, έχει παράμετρο

- A = τον τετραγωνικό πίνακα του οποίου θέλουμε την ορίζουσα

Η έξοδος της είναι

- determinant = η ορίζουσα του πίνακα A

Το MATLAB έχει την έτοιμη συνάρτηση det(A) που υπολογίζει την ορίζουσα ενός πίνακα A. Η παρακάτω συνάρτηση παρουσιάζεται εδώ για λόγους καθαρά εκπαιδευτικούς.

```

function determinant=m_det(A)
[N,M]=size(A);
if (N~=M)
    error('myApp:argChk', 'Ο πίνακας δεν είναι τετραγωνικός.')
end

determinant=1;
for i=1:N-1
    k=i;
    while A(k,i)==0 && k<=N
        k=k+1;
    end
    if k<=N
        if k~=i
            for j=i:N
                A(i,j)=A(i,j)+A(k,j);
            end
        end
        for k=i+1:N
            pol=A(k,i)/A(i,i);
            for j=i:N
                A(k,j)=A(k,j)-A(i,j)*pol;
            end
        end
    else
        i=N;
        determinant=0;
    end
end

if determinant==1
    for i=1:N
        determinant=determinant*A(i,i);
    end
end

```

## Αντιστροφή πίνακα

Η συνάρτηση `m_inv`, που ακολουθεί, έχει παράμετρο

- $A$  = τον τετραγωνικό πίνακα του οποίου θέλουμε την ορίζουσα

Η έξοδος της είναι

- $\text{invA}$  = ο αντίστροφος πίνακας του πίνακα  $A$

Το MATLAB έχει την έτοιμη συνάρτηση `inv(A)` που υπολογίζει τον αντίστροφο πίνακα ενός πίνακα  $A$ . Η παρακάτω συνάρτηση παρουσιάζεται εδώ για λόγους καθαρά εκπαιδευτικούς.

```
function invA=m_inv(A)
[N,M]=size(A);
if (N~=M)
    error('myApp:argChk', 'Ο πίνακας δεν είναι τετραγωνικός.')
end

for i=1:N
    for j=1:N
        A(i,N+j)=0;
    end
    A(i,N+i)=1;
end

for i=1:N
    if A(i,i)==0
        k=i;
        while A(k,i)==0 && k<N
            k=k+1;
        end
        if A(k,i)~=0
            for j=1:2*N
                A(i,j)=A(i,j)+A(k,j);
            end
        else
            error('myApp:argChk', 'Ο πίνακας δεν έχει αντίστροφο')
        end
    end
    dia=A(i,i);
    for j=i:2*N
```

```

        A(i,j)=A(i,j)/dia;
    end
    for k=1:N
        if k~=i
            pol=A(k,i);
            for j=i:2*N
                A(k,j)=A(k,j)-A(i,j)*pol;
            end
        end
    end
end

for i=1:N
    for j=1:N
        invA(i,j)=A(i,j+N);
    end
end
end

```

### Μέθοδος Gauss–Cholevsky

Η συνάρτηση `m_Gauss_Cholevsky`, που ακολουθεί, έχει παραμέτρους

- $A$  = τον τετραγωνικό πίνακα συντελεστών των αγνώστων του συστήματος των εξισώσεων
- $B$  = τον πίνακα στήλη των σταθερών όρων των εξισώσεων

Η έξοδος της είναι

- $X$  = ο πίνακας με τις τιμές των αγνώστων.

```

function X=m_Gauss_Cholevsky(A,B)
[N,M]=size(A);
if (N~=M)
    error('myApp:argChk', 'Ο πίνακας A δεν είναι τετραγωνικός.')
end
[NB,MB]=size(B);
if (MB~=1)
    error('myApp:argChk', 'Ο πίνακας B δεν είναι μονοδιάστατος πίνακας.')
end
if (NB~=N)

```



```

        error('myApp:argChk', 'Οι πίνακες A και B δεν έχουν την
        ίδια διάσταση NxN και N.')
    end
    for i=1:N
        A(i,N+1)=B(i);
    end
    for i=1:N
        if A(i,i)==0
            k=i;
            while A(k,i)==0 && k<N
                k=k+1;
            end
            if A(k,i)~=0
                for j=1:N+1
                    A(i,j)=A(i,j)+A(k,j);
                end
            else
                error('myApp:argChk', 'Το σύστημα είναι αόριστο ή
αδύνατο')
            end
        end
        dia=A(i,i);
        for j=i:N+1
            A(i,j)=A(i,j)/dia;
        end
        for k=1:N
            if k~=i
                pol=A(k,i);
                for j=i:N+1
                    A(k,j)=A(k,j)-A(i,j)*pol;
                end
            end
        end
    end
end
for i=1:N
    X(i,1)=A(i,N+1);
end

```

## 4.2. Μη γραμμικά συστήματα εξισώσεων 2 μεταβλητών.

### 4.2.1. Μαθηματική ανάλυση

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τη λύση 2 μη γραμμικών εξισώσεων με 2 αγνώστους. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, πως έχουμε το πιο κάτω σύστημα:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0 \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned} \quad (\Sigma 1)$$

όπου οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  (συναρτήσεις 2 μεταβλητών) συμβολίζουν το αριστερό μέλος των εξισώσεων.

Για το σύστημα αυτό υπάρχει μία ορίζουσα ( $\Delta$ ), που ονομάζεται Ιακωβιανή, η οποία είναι ιδιαίτερα σημαντική και που ορίζεται μέσω των μερικών παραγώγων των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ , ως προς τις μεταβλητές  $x$  και  $y$ .

$$\Delta = \frac{D(f, g)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Για να υπάρχει λύση του συστήματος σε μια περιοχή γύρω από ένα σημείο  $(x_0, y_0)$  που καθορίζεται από τα διαστήματα  $(x_0 - a, x_0 + a)$  και  $(y_0 - b, y_0 + b)$ , θα πρέπει στην περιοχή αυτή η Ιακωβιανή ορίζουσα να είναι διάφορη του μηδενός.

Οι λύσεις του συστήματος είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων δυάδων  $(x_i, y_i)$ , οι οποίες επαληθεύουν το σύστημα.

### 4.2.2. Γραφική μέθοδος.

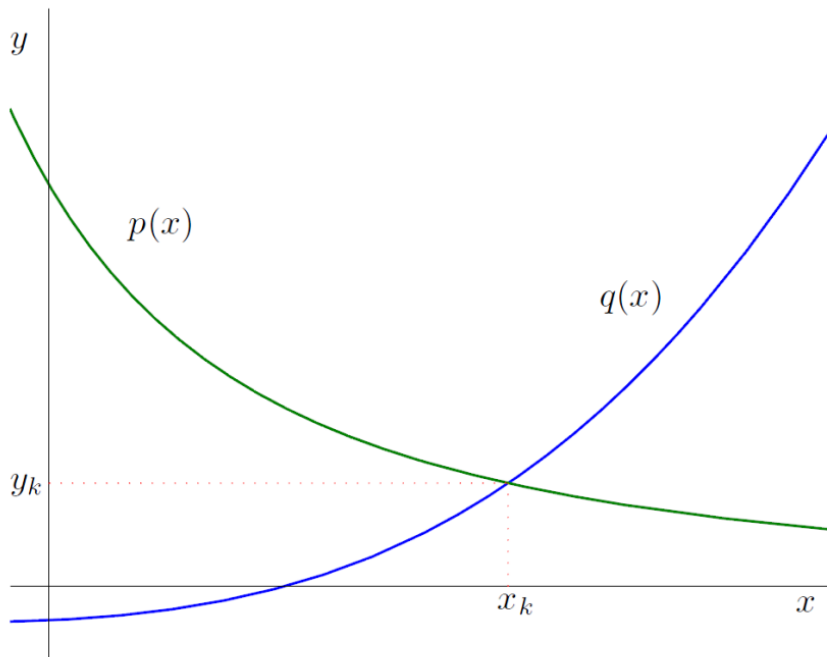
Για να μπορέσουμε να υλοποιήσουμε τη γραφική μέθοδο προσδιορισμού των λύσεων του συστήματος ( $\Sigma 1$ ), θα πρέπει να μπορούμε να επιλύσουμε τις δύο εξισώσεις ως προς μία από τις δύο μεταβλητές  $x$  ή  $y$ . Θεωρούμε λοιπόν ότι το σύστημα μας μετατρέπεται στο επόμενο:

$$(\Sigma 1) \Rightarrow \begin{aligned} y &= p(x) \\ y &= q(x) \end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος θα είναι μία δυάδα η οποία επαληθεύει, ταυτόχρονα και τις δύο συναρτήσεις. Άρα, κάνοντας το γράφημα των  $p$  και  $q$ , έχουμε τη δυάδα λύσης, η οποία δεν είναι παρά η δυάδα των συντεταγμένων του σημείου τομής  $(x_k, y_k)$ , όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.1.

### 4.2.2. Η μέθοδος του Newton.

Η μέθοδος του Newton λειτουργεί παρόμοια με την αντίστοιχη που υπολογίζει τις ρίζες μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής. Για να ξεκινήσει χρειάζεται μια πρώτη προσέγγιση  $(x_0, y_0)$  της λύσης την οποία προσπαθούμε να υπολογίσουμε, ενώ ταυτόχρονα θα πρέπει η Ιακωβιανή ορίζουσα να είναι διάφορη του μηδενός στην περιοχή του σημείου  $(x_0, y_0)$ , που περιέχει τη λύση.



**Σχήμα 4.1.** Γραφική μέθοδος λύσης του συστήματος  $\Sigma I$

Ξεκινώντας λοιπόν από την πρώτη προσέγγιση  $(x_0, y_0)$ , φθάνουμε σε μία καλύτερη προσέγγιση  $(x_1, y_1)$ , με τη βοήθεια των τύπων:

$$x_1 = x_0 + a$$

$$y_1 = y_0 + b$$

όπου τα  $a$  και  $b$  αποτελούν τη λύση του επόμενου γραμμικού συστήματος:

$$f(x_0, y_0) + a \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + b \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

$$g(x_0, y_0) + a \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} + b \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας ως σημείο εκκίνησης το  $(x_1, y_1)$ , υπολογίζουμε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο την επόμενη προσέγγιση  $(x_2, y_2)$  και ούτω καθεξής.

### Παρατηρήσεις:

- Μία ένδειξη πως βαδίζουμε προς τη σωστή κατεύθυνση μας δίνουν οι τιμές των συναρτήσεων  $f(x_i, y_i)$  και  $g(x_i, y_i)$ , οι οποίες πρέπει διαρκώς να τείνουν προς το μηδέν. Κάποιες φορές, ειδικά στο ξεκίνημα της διαδικασίας, μπορεί κάποιο από τα  $x$  ή  $y$  να κινηθούν έτσι ώστε οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  να μην μειώνουν τις απόλυτες τιμές τους. Αυτό συμβαίνει συχνά, ιδιαίτερα στην περίπτωση όπου η μία από τις δύο προσεγγιστικές τιμές,  $x_0$  ή  $y_0$ , είναι πολύ κοντά στη λύση, ενώ η άλλη όχι.

- Σταματούμε την επαναληπτική διαδικασία όταν, και για τις δύο μεταβλητές, η διαφορά ανάμεσα στην προηγούμενη και στην επόμενη προσεγγιστική τιμή είναι μικρότερη της απαιτούμενης ακρίβειας.

$$|x_i - x_{i-1}| \leq \varepsilon \quad \text{και} \quad |y_i - y_{i-1}| \leq \varepsilon$$

### 4.2.3. Παράδειγμα

Δίνεται το σύστημα των εξισώσεων:

$$f(x, y) = x^2 + xy^3e^x - 15 = 0$$

$$g(x, y) = xy + x^2 \sin(x) - 3 = 0$$

Ζητούνται:

1. Με τη γραφική λύση να υπολογισθεί μια πρώτη προσέγγιση της λύσης του, όταν το  $x$  ανήκει στο διάστημα  $(1, 4)$ .
2. Με τη μέθοδο του Newton να υπολογισθεί η λύση του συστήματος, ξεκινώντας από την προηγούμενη προσέγγιση και ακρίβεια  $\varepsilon = 0.001$ .

**Λύση:**

1) **Γραφική Λύση:**

Λύνοντας τις δύο εξισώσεις του συστήματος ως προς  $y$  έχουμε:

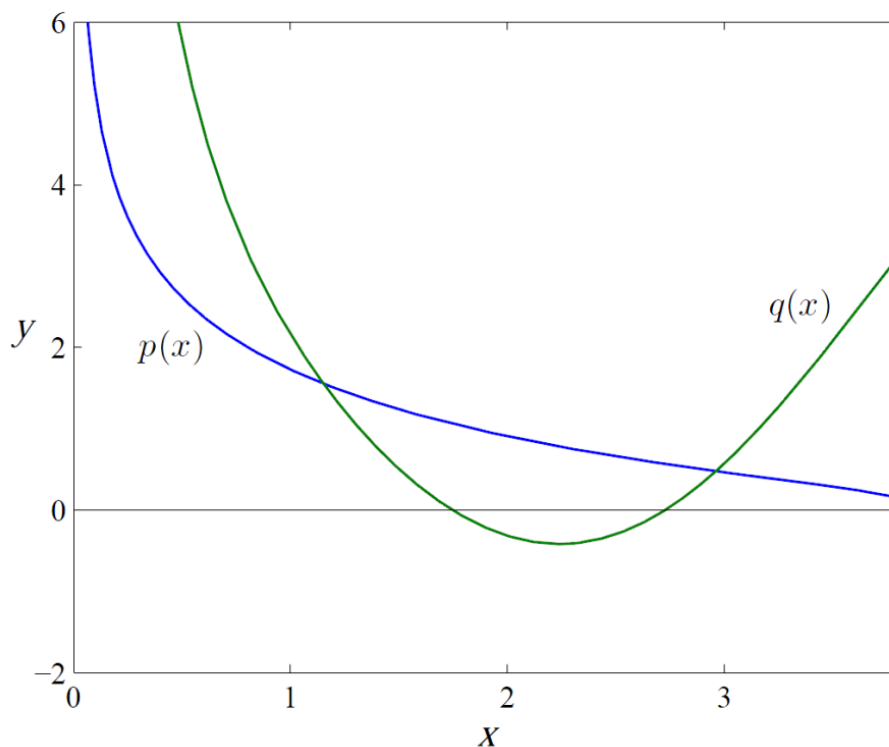
$$y = p(x) = \sqrt[3]{\frac{15 - x^2}{xe^x}}$$

$$y = q(x) = \frac{3 - x^2 \sin(x)}{x}$$

Στη συνέχεια κάνουμε τον πίνακα τιμών για τις δύο αυτές συναρτήσεις,

$x$	$p$	$q$
1	1.727	2.159
2	0.906	-0.319
3	0.463	0.577
4	-0.166	3.777

καθώς και τη γραφική τους παράσταση (Σχήμα 4.2), από την οποία κάνουμε μια πρώτη πρόβλεψη για τη δυάδα των τιμών της λύσης.



**Σχήμα 4.2.** Γραφική παράσταση των συναρτήσεων  $p(x)$  και  $q(x)$ .

Βέβαια, η γραφική παράσταση που έγινε με τη βοήθεια υπολογιστή είναι πολύ ακριβέστερη απ' αυτήν που θα κάναμε με τη βοήθεια του πίνακα τιμών. Όμως, ακόμη και από την προσεγγιστική των τεσσάρων σημείων, θα μπορούσαμε να εξάγουμε ικανοποιητικά συμπεράσματα. Παρατηρούμε λοιπόν πως στο διάστημα  $(1,4)$  για το  $x$ , υπάρχουν δύο λύσεις (δύο σημεία τομής των  $p$  και  $q$ ). Αποφασίζουμε να υπολογίσουμε τη δυάδα που αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο  $x$ . Δίνουμε λοιπόν ως προσεγγιστικές τιμές τις:

$$x_0 = 2.9 \quad \text{και} \quad y_0 = 0.5$$

## 2) Μέθοδος του Newton:

Αρχικά υπολογίζουμε τις τέσσερις μερικές παραγώγους των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial (x^2 + xy^3e^x - 15)}{\partial x} = 2x + y^3e^x(x+1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial (x^2 + xy^3e^x - 15)}{\partial y} = 3xy^2e^x$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial (xy + x^2 \sin(x) - 3)}{\partial x} = y + 2x \sin(x) + x^2 \cos(x)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial (xy + x^2 \sin(x) - 3)}{\partial y} = x$$

Για να συστηματοποιήσουμε την επίλυση του προβλήματος, λύνουμε το γραμμικό σύστημα που έχει ως αγνώστους τις ποσότητες  $a$  και  $b$ . Γράφοντας παραστατικά τις μερικές παραγώγους υπό τη μορφή:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad g_x = \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{και} \quad g_y = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \text{έχουμε:}$$

$$a = \frac{f \cdot g_y - g \cdot f_y}{f_y \cdot g_x - f_x \cdot g_y}$$

και

$$b = -\frac{f + a \cdot f_x}{f_y}$$

όπου οι τιμές των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  όπως και αυτές των παραγώγων τους υπολογίζονται στο ίδιο σημείο  $(x_i, y_i)$ .

Για άλλη μια φορά, δημιουργούμε έναν πίνακα τιμών, στον οποίο ξεκινούμε από τις τιμές  $x_0$  και  $y_0$  (επιλέγουμε τις στρογγυλεμένες τιμές  $x_0 = 3$  και  $y_0 = 0.5$ ), υπολογίζουμε στη συνέχεια τις τιμές των συναρτήσεων  $f(x_0, y_0)$  και  $g(x_0, y_0)$ , και των τεσσάρων μερικών παραγώγων (πάντα στο σημείο  $(x_0, y_0)$ ). Χρησιμοποιώντας τους προηγούμενους τύπους υπολογίζουμε τα  $a$  και  $b$ . Τέλος βρίσκουμε με μια άθροιση τις νέες προσεγγίσεις  $x_1$  και  $y_1$ .

Από την περιγραφή των πράξεων που έχουμε να κάνουμε, γίνεται φανερό πως πρόκειται για μια μέθοδο που χρειάζεται μάλλον ηλεκτρονικό υπολογιστή.

### Πίνακας τιμών.

$x$	3	2.961565	2.95966	2.959654
$y$	0.5	0.479743	0.478129	0.478121
$f(x,y)$	1.532076	0.091172	0.000399	7.96E-09
$g(x,y)$	-0.22992	-0.00873	-2E-05	-2E-10
$f_x$	16.04277	14.37754	14.26876	14.26827
$f_y$	45.19246	39.52308	39.15771	39.15609
$g_x$	-7.56321	-7.0888	-7.0659	-7.06583
$g_y$	3	2.961565	2.95966	2.959654
$a$	-0.03843	-0.00191	-6.2E-06	-9.8E-11
$b$	-0.02026	-0.00161	-7.9E-06	-1.7E-10

Από τον πίνακα τιμών προκύπτει πως η λύση του πιο πάνω συστήματος είναι η δυάδα (2.95965, 0.47812).

### Παρατηρήσεις.

Η μέθοδος αυτή προγραμματίζεται με τρόπο προφανή στο Excel. Άλλωστε ο πίνακας τιμών που παραθέσαμε ως λύση του προβλήματος προέρχεται αυτούσιος από το Excel.

Η λύση που βρήκαμε έχει σαφώς μεγαλύτερη ακρίβεια από την απαιτούμενη. Αυτό φαίνεται από τον τρόπο που συγκλίνουν οι ακολουθίες των τιμών  $x_j$  και  $y_j$ .

Το ότι ήμασταν σε καλό δρόμο γινόταν φανερό κι από τη σύγκλιση των τιμών των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  προς το μηδέν.

Όποιος έχει τη διάθεση να περάσει το πιο πάνω πρόβλημα στο Excel, θα διαπιστώσει πως, αλλάζοντας τις αρχικές προσεγγιστικές τιμές μπορεί να υπολογίσει και άλλες λύσεις. Έτσι, για παράδειγμα, εάν θέσει

$$x_0 = 1.3 \quad \text{και} \quad y_0 = 1.6$$

θα βρει σαν λύση:

$$x_0 = 1.151237 \quad \text{και} \quad y_0 = 1.554504$$

όπου μάλιστα όλα τα ψηφία είναι ακριβή.



#### 4.2.4. Υλοποίηση στο MATLAB

##### Γραφική μέθοδος

Η συνάρτηση `rf_nl_plot`, που ακολουθεί, έχει παραμέτρους

- $f, g$  = δύο strings με τις συναρτήσεις  $f(x,y)$  και  $g(x,y)$
- $x1, x2$  = το διάστημα των τιμών του  $x$
- $y1, y2$  = το διάστημα των τιμών του  $y$

Η έξοδος της είναι μια γραφική παράσταση των εξισώσεων  $f(x,y)=0$  και  $g(x,y)=0$

```
function rf_nl_plot(f,g,x1,x2,y1,y2)
f=vectorize(inline(f));
g=vectorize(inline(g));

[x,y]=meshgrid(x1:(x2-x1)/100:x2,y1:(y2-y1)/100:y2);

zf=f(x,y);
contour(x,y,zf,[0 0],'b-');
hold on;
zg=g(x,y);
contour(x,y,zg,[0 0],'r-');
hold off;
```

##### Μέθοδος Newton (με εισαγωγή από τον χρήστη των παραγώγων των συναρτήσεων)

Η συνάρτηση `rf_nl_newton`, που ακολουθεί, έχει παραμέτρους

- $f$  = ένα string με τη συνάρτηση  $f(x,y)$

- $g$  = ένα string με τη συνάρτηση  $g(x,y)$
- $fx$  = ένα string με τη μερική παράγωγο ως προς  $x$  της συνάρτησης  $f(x,y)$
- $fy$  = ένα string με τη μερική παράγωγο ως προς  $y$  της συνάρτησης  $f(x,y)$
- $gx$  = ένα string με τη μερική παράγωγο ως προς  $x$  της συνάρτησης  $g(x,y)$
- $gy$  = ένα string με τη μερική παράγωγο ως προς  $y$  της συνάρτησης  $g(x,y)$
- $x$  = την αρχική προσεγγιστική τιμή του  $x$
- $y$  = την αρχική προσεγγιστική τιμή του  $y$
- $eps$  = την επιθυμητή ακρίβεια

Οι έξοδοι της

- $x$  = η ρίζα του  $x$
- $y$  = η ρίζα του  $y$
- $res$  = ένα string που μας πληροφορεί αν όλα πήγαν καλά και βρέθηκαν σωστά οι ρίζες, ή αν κάτι δεν πήγε καλά.

```
function [x,y,res]=rf_nl_newton(f,g,fx,fy,gx,gy,x,y,eps)
f=vectorize(inline(f,'x','y'));
fx=vectorize(inline(fx,'x','y'));
fy=vectorize(inline(fy,'x','y'));
g=vectorize(inline(g,'x','y'));
gx=vectorize(inline(gx,'x','y'));
gy=vectorize(inline(gy,'x','y'));

max_steps=100;
step=1;

a=(f(x,y)*gy(x,y)-g(x,y)*fy(x,y))/(fy(x,y)*gx(x,y)-
gy(x,y)*fx(x,y));
b=-(f(x,y)+a*fx(x,y))/fy(x,y);

while (max(abs(a),abs(b))>eps) && (step<max_steps)
    x=x+a;
    y=y+b;
    a=(f(x,y)*gy(x,y)-g(x,y)*fy(x,y))/(fy(x,y)*gx(x,y)-
gy(x,y)*fx(x,y));
    b=-(f(x,y)+a*fx(x,y))/fy(x,y);
end
```



```

if (step<max_steps) && (~isnan(x)) && (~isnan(y))
    res='Όλα ok';
else
    res='Αδυναμία εύρεσης λύσης';
end

```

### Μέθοδος Newton (με αυτόματο υπολογισμό των παραγώγων από το συμβολικό πακέτο)

Η συνάρτηση rf\_nl\_newton2, που ακολουθεί, έχει παραμέτρους

- $f$  = ένα string με τη συνάρτηση  $f(x,y)$
- $g$  = ένα string με τη συνάρτηση  $g(x,y)$
- $x$  = την αρχική προσεγγιστική τιμή του  $x$
- $y$  = την αρχική προσεγγιστική τιμή του  $y$
- $eps$  = την επιθυμητή ακρίβεια

Οι έξοδοι της

- $x$  = η ρίζα του  $x$
- $y$  = η ρίζα του  $y$
- $res$  = ένα string που μας πληροφορεί αν όλα πήγαν καλά και βρέθηκαν σωστά οι ρίζες, ή αν κάτι δεν πήγε καλά.

```

function [x,y,res]=rf_nl_newton2(f,g,x,y,eps)

fx=vectorize(inline(char(diff(sym(f),sym('x'))),'x','y'))
fy=vectorize(inline(char(diff(sym(f),sym('y'))),'x','y'))
f=vectorize(inline(f,'x','y'))

gx=vectorize(inline(char(diff(sym(g),sym('x'))),'x','y'))
gy=vectorize(inline(char(diff(sym(g),sym('y'))),'x','y'))
g=vectorize(inline(g,'x','y'))

max_steps=100;
step=1;

a=(f(x,y)*gy(x,y)-g(x,y)*fy(x,y))/(fy(x,y)*gx(x,y)-
gy(x,y)*fx(x,y));
b=-(f(x,y)+a*fx(x,y))/fy(x,y);

while (max(abs(a),abs(b))>eps) && (step<max_steps)
    x=x+a;

```

```

        y=y+b;
        a=(f(x,y)*gy(x,y)-g(x,y)*fy(x,y))/(fy(x,y)*gx(x,y)-
gy(x,y)*fx(x,y));
        b=-(f(x,y)+a*fx(x,y))/fy(x,y);
end

```

```

if (step<max_steps) && (~isnan(x)) && (~isnan(y))
    res='Όλα ok';
else
    res='Αδυναμία εύρεσης λύσης';
end

```

## Κριτήρια αξιολόγησης

### Κριτήριο αξιολόγησης 1

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του

### Κριτήριο αξιολόγησης 2

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος του A

### Κριτήριο αξιολόγησης 3

Δίνεται το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{array}{rrcrcl} 2x & +3y & -z & +t & = & 4 \\ x & -2y & +3z & -2t & = & -2 \\ -x & +2y & +z & +t & = & 7 \\ x & +y & +z & +t & = & 6 \end{array}$$

Να επιλυθεί με τη μέθοδο των Gauss–Cholevski

### Κριτήριο αξιολόγησης 4

Να επιλυθεί το προηγούμενο γραμμικό σύστημα με τη βοήθεια της μεθόδου των οριζουσών.

## Κριτήριο αξιολόγησης 5

Δίνεται το σύστημα:

$$f(x, y) = x^3 + 4y^2 = 0$$

$$g(x, y) = x \sin(x) - 2\sqrt{y} = 0$$

- Να υπολογισθεί πρόχειρα η λύση του με τη γραφική μέθοδο
- Να υπολογισθεί η λύση του με τη μέθοδο του Newton και με ακρίβεια μεγαλύτερη του  $\varepsilon=0.001$

## Κεφάλαιο 5. Το Συμπτωτικό Πολυώνυμο

### Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η ιδέα του συμπτωτικού πολυωνύμου, του πολυωνύμου, δηλαδή, που είναι του μικρότερου δυνατού βαθμού και που, για συγκεκριμένες, δεδομένες, τιμές του  $x$ , έχει συγκεκριμένες, δεδομένες, τιμές του  $y$ . Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται η πιο απλή, από την πλευρά της μαθηματικής κατανόησης, μέθοδος υπολογισμού του.

### Προαπαιτούμενη γνώση

Το κεφάλαιο προϋποθέτει ότι ο αναγνώστης έχει γνώσεις Μαθηματικών Γ' λυκείου και Μαθηματικών Ι του Α' Εξαμήνου σπουδών.

### 5.1. Γενικά για τα πολυώνυμα.

Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις ή τα πολυώνυμα, όπως θα τις λέμε στο εξής χάρη της συντομίας, είναι συναρτήσεις πολύ χρήσιμες στην Αριθμητική Ανάλυση, λόγω της απλότητάς τους (σε σύγκριση βέβαια με άλλες ιδιαίτερα πολύπλοκες συναρτήσεις). Πριν όμως εξετάσουμε αναλυτικότερα τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιεί τα πολυώνυμα η Αριθμητική Ανάλυση, αξίζει να ξαναθυμηθούμε μερικές ιδιότητές τους και να εξηγήσουμε το γιατί είναι τόσο αγαπητά. Ας ξεκινήσουμε από το δεύτερο....

Είναι λοιπόν τα πολυώνυμα ιδιαίτερα αγαπητά γιατί:

1. Είναι συναρτήσεις συνεχείς σε όλο το  $\mathbb{R}$ .
2. Είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες σε όλο το  $\mathbb{R}$  και η παράγωγός τους υπολογίζεται αναλυτικά, πολύ εύκολα.
3. Είναι συναρτήσεις ολοκληρώσιμες στο πεδίο ορισμού τους και το ολοκλήρωμά τους υπολογίζεται αναλυτικά, πολύ εύκολα.
4. Υπάρχουν αναλυτικές μέθοδοι για τον υπολογισμό των ριζών ενός πολυωνύμου μέχρι και τέταρτου βαθμού.
5. Η επιστήμη της Αριθμητικής Ανάλυσης έχει εύκολες και γρήγορες μεθόδους ακριβούς υπολογισμού των πραγματικών ριζών τους.
6. Η γενική συμπεριφορά τους είναι πολύ καλά γνωστή.

### 5.2. Ιδιότητες των πολυωνύμων.

Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις (π.σ.) έχουν πολλές και σημαντικές ιδιότητες, από τις οποίες αναφέρουμε κάποιες, που θα μας φανούν ιδιαίτερα χρήσιμες στη συνέχεια:

1. Η γενική μορφή μιας πολυωνυμικής συνάρτησης (π.σ.)  $n$ -οστού βαθμού είναι η:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

2. Το όριο της  $p(x)$ , όταν το  $x$  τείνει στο άπειρο, ισούται με το όριο του μεγιστοβάθμιου όρου της  $p(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (a_n x^n)$$

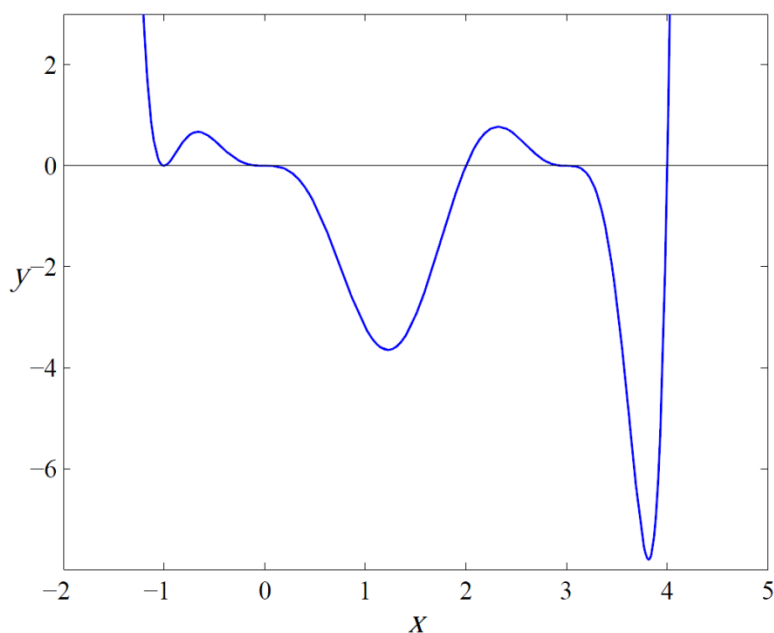
3. Μία π.σ. ν-ου βαθμού έχει ακριβώς ν ρίζες (πραγματικές ή μιγαδικές).
4. Αν μία π.σ. έχει ως ρίζα τον μιγαδικό αριθμό  $z = a + ib$ , τότε θα δέχεται ως ρίζα και τον συζυγή του  $z = a - ib$ . Η ιδιότητα αυτή στηρίζεται στην ιδιότητα των συζυγών μιγαδικών, το γινόμενο τους να είναι πραγματικός αριθμός. Επομένως ισχύει για κάθε π.σ. που έχει πραγματικούς (και όχι μιγαδικούς) συντελεστές.
5. (Πόρισμα της προηγούμενης πρότασης) Αν μία π.σ. είναι περιττού βαθμού, τότε θα δέχεται υποχρεωτικά μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.
6. Αν η π.σ.  $p(x)$  δέχεται ως ρίζες τους αριθμούς  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_v$ , τότε γράφεται με τους παρακάτω δύο ισοδύναμους τρόπους (όπου τον δεύτερο τον ονομάζουμε «γινόμενο παραγόντων»):

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_n (x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_v)$$

7. Αν η τιμή  $\rho$  είναι ρίζα της π.σ., τότε αυτή θα διαιρείται με το  $(x - \rho)$ , πράγμα που φαίνεται αμέσως εάν βάλουμε στο κλάσμα  $p(x)/(x - \rho)$ , το  $p(x)$  σαν γινόμενο παραγόντων.
8. Για τον καθορισμό μιας π.σ. ν-ου βαθμού, χρειάζονται ν+1 τυχαία σημεία του επιπέδου Οxy (από τα οποία να μην διέρχεται πολυώνυμο μικρότερου του ν- βαθμού). Έτσι δύο σημεία ορίζουν μία π.σ. 1ου βαθμού (ευθεία), 3 σημεία μια π.σ. 2ου βαθμού (παραβολή) κ.ο.κ..
9. Εάν αναλύοντας σε γινόμενο παραγόντων την π.σ. προκύψει η επόμενη ανάλυση:

$$p(x) = a_n (x - \rho_1)^2 (x - \rho_2)^3 (x - \rho_3)(x - \rho_4)^4 \dots (x - \rho_v)$$

τότε λέμε πως η ρίζα  $\rho_1$  είναι βαθμού πολλαπλότητας δύο (διπλή), η  $\rho_2$  είναι βαθμού πολλαπλότητας τρία (τριπλή), η  $\rho_4$  είναι βαθμού πολλαπλότητας τέσσερα (τετραπλή), ενώ οι  $\rho_3$  και  $\rho_v$  είναι απλές.



**Σχήμα 5.1** Γραφική παράσταση μιας π.σ. 10<sup>ου</sup> βαθμού, με ρίζες τη  $\rho_1 = -1$  (διπλή),  $\rho_2 = 0$  (τριπλή),  $\rho_3 = 2$  (απλή) και  $\rho_4 = 3$  (τριπλή) και  $\rho_5 = 4$  (απλή)

10. Η γραφική παράσταση της  $p(x)$  γύρω από μια ρίζα εξαρτάται από το βαθμό πολλαπλότητας της ρίζας (βλέπε Σχήμα 5.1)

Στη γραφική παράσταση του Σχήματος 5.1 παρατηρούμε πως η γραφική παράσταση της  $p(x)$  :

- στις απλές ρίζες τέμνει τον άξονα των  $x$  υπό γωνία,
- στις διπλές (όπως και στις τετραπλές, εξαπλές – άρα άρτιας τάξης ρίζες), εφάπτεται σ' αυτόν χωρίς η π.σ. να αλλάξει πρόσημο, ενώ
- στις τριπλές (όπως και στις πενταπλές, επταπλές – άρα περιττής τάξης ρίζες), εφάπτεται σ' αυτόν αλλάζοντας όμως πρόσημο (με τη μορφή του s).

### Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>

Έστω τα σημεία  $M_1=(1,1)$  και  $M_2=(2,3)$  του επιπέδου  $Oxy$ .

1. Τι βαθμού είναι η πολυωνυμική συνάρτηση που  $y = p(x)$  περνάει από τα σημεία αυτά;
2. Υπάρχει άλλο πολυώνυμο 1ου βαθμού που να περνά από τα σημεία  $M_1$  και  $M_2$ ;
3. Υπάρχει πολυώνυμο 2ου βαθμού που να περνά από τα σημεία  $M_1$  και  $M_2$ ;

### Λύση:

1) Σύμφωνα με την ιδιότητα (8) της προηγούμενης παραγράφου, δύο σημεία του επιπέδου  $Oxy$  ορίζουν μία πολυωνυμική συνάρτηση 1<sup>ου</sup> βαθμού, έστω την  $y = p(x) = ax + b$ . Το ότι η  $y = ax + b$  περνάει από τα σημεία  $M_1$  και  $M_2$ , σημαίνει ότι οι συντεταγμένες τους την επαληθεύουν. Άρα ισχύει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{array}{l} M_1(1, 1): \quad y_1 = ax_1 + b \\ M_2(2, 3): \quad y_2 = ax_2 + b \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 1 = 1a + b \\ 3 = 2a + b \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -1 \end{array}$$

Επομένως, η πολυωνυμική συνάρτηση που επαληθεύεται από τις συντεταγμένες των σημείων  $M_1$  και  $M_2$  είναι  $y = 2x - 1$ .

### Σημείωση:

Η λύση του παραπάνω συστήματος, στη γενική της μορφή, για κάθε ζεύγος σημείων  $(x_1, y_1)$  και  $(x_2, y_2)$  είναι:

$$\begin{array}{l} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{array}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη την πρώτη σχέση από τη δεύτερη έχουμε:

$$y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1 \Rightarrow y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \Rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Αντικαθιστώντας το  $a$  στην πρώτη σχέση έχουμε:

$$\begin{aligned} y_1 &= ax_1 + b \Rightarrow y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 + b \Rightarrow b = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 \Rightarrow \\ b &= \frac{y_1(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)x_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_1 - x_1 y_2 + x_1 y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

Καταλήγουμε δηλαδή στις γνωστές σχέσεις:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

και

$$b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

Αν αντικαταστήσουμε τους συντελεστές

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

και

$$b = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1$$

από τις σχέσεις που βρήκαμε προηγουμένως, στη γενική εξίσωση μιας ευθείας  $y = ax + b$  τότε έχουμε:

$$y = ax + b \Rightarrow y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 \Rightarrow$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

Από την οποία καταλήγουμε στην πολύ απλή σχέση:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

που μας δίνει την εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία  $(x_1, y_1)$  και  $(x_2, y_2)$ .

2) Αν και το θέμα αυτό αποτελεί βασικό θεώρημα των πολυωνύμων εμείς θα επισημάνουμε τη μοναδικότητα της λύσης του συστήματος. Πράγματι, εάν υπήρχε και άλλη πολυωνυμική συνάρτηση  $y = a'x + b'$ , με  $a \neq a'$  και  $b \neq b'$ , που να επαληθεύονταν από τις συντεταγμένες των σημείων  $M_1$  και  $M_2$ , τότε τα  $a'$  και  $b'$  θα αποτελούσαν μια δεύτερη λύση του συστήματος, πράγμα άτοπο (Αυτό θα ήταν ισοδύναμο με το ότι δύο διαφορετικές ευθείες μπορούν να τέμνονται σε δύο σημεία).

Φθάνουμε επομένως στο συμπέρασμα: Η πολυωνυμική συνάρτηση  $y = 2x - 1$  είναι η **μοναδική** πρωτοβάθμια πολυωνυμική συνάρτηση που περνάει από τα δύο σημεία  $M_1$  και  $M_2$  του επιπέδου  $Oxy$ .

3) Μία πολυωνυμική συνάρτηση  $2^{\text{ου}}$  βαθμού έχει τη μορφή

$$p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

Θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  έτσι ώστε το πολυώνυμο  $p(x)$  να περνά από τα σημεία  $M_1 = (1, 1)$  και  $M_2 = (2, 3)$ .

Όπως και προηγουμένως έχουμε

$$\begin{array}{l} M_1(1, 1) : y_1 = \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma \\ M_2(2, 3) : y_2 = \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma \end{array} \left| \Rightarrow \begin{array}{l} 1 = 1\alpha + 1\beta + \gamma \\ 3 = 4\alpha + 2\beta + \gamma \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = 3 \end{array}$$



Έχουμε δηλαδή ένα σύστημα δύο εξισώσεων με τρεις αγνώστους! Προφανώς το σύστημα δεν έχει μια μοναδική λύση, αλλά άπειρες λύσεις.

Για να βρούμε τις λύσεις του συστήματος, περνάμε έναν από τους αγνώστους (έστω το  $\alpha$ ) στο δεξιό μέλος των εξισώσεων:

$$\begin{array}{l|l} \alpha + \beta + \gamma = 1 & \beta + \gamma = 1 - \alpha \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = 3 & 2\beta + \gamma = 3 - 4\alpha \end{array} \Rightarrow$$

Αφαιρώντας κατά μέλη την πρώτη από τη δεύτερη έχουμε:

$$\beta = 2 - 3\alpha$$

και αντικαθιστώντας στην πρώτη έχουμε

$$\beta + \gamma = 1 - \alpha \Rightarrow 2 - 3\alpha + \gamma = 1 - \alpha \Rightarrow \gamma = 2\alpha - 1$$

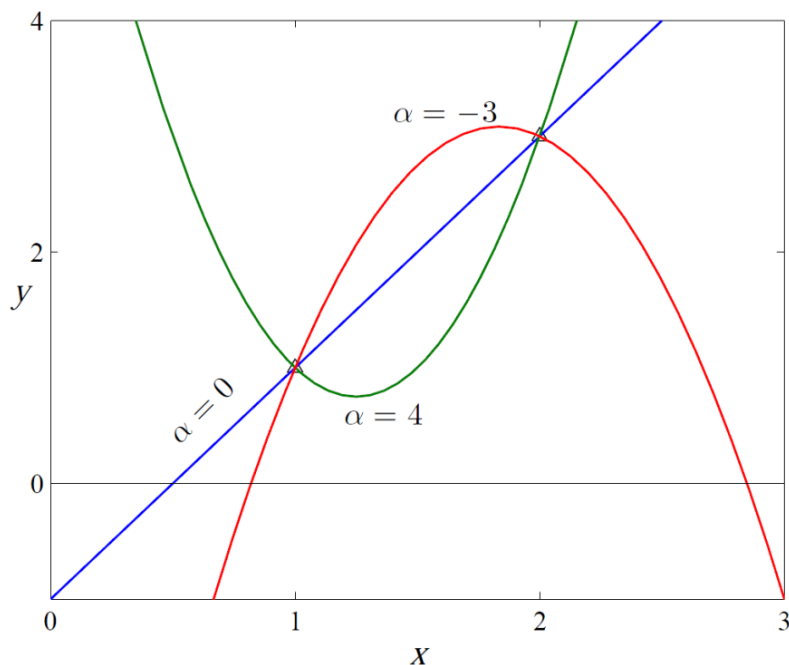
Όπως βλέπουμε οι συντελεστές  $\beta$  και  $\gamma$  εξαρτώνται από το  $\alpha$ , και το  $\alpha$  μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Έχουμε λοιπόν μια απειρία λύσεων.

Οι πολωνυμικές συναρτήσεις  $2^{\text{ου}}$  βαθμού που περνούν από τα σημεία  $M_1$  και  $M_2$  δίνονται από τη σχέση:

$$p(x) = \alpha x^2 + (2 - 3\alpha)x + 2\alpha - 1$$

και αποτελούν (όπως θα λέγαμε στα Μαθηματικά) μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων.

Για κάθε τιμή του  $\alpha$  παίρνουμε και μια διαφορετική συνάρτηση  $p(x)$  που περνά από τα σημεία  $M_1$  και  $M_2$ . Στο Σχήμα 5.2 βλέπουμε δύο τέτοιες συναρτήσεις για  $\alpha = 4$  και  $\alpha = -3$ . Για  $\alpha = 0$  το πολυώνυμο αντιστοιχεί στην ευθεία  $y = 2x - 1$  που βρήκαμε προηγουμένως.



**Σχήμα 5.2** Γραφικές παραστάσεις των πολωνυμικών συναρτήσεων  $2^{\text{ου}}$  βαθμού για  $\alpha=4$  (πράσινη) και για  $\alpha=-3$  (κόκκινη) που διέρχονται από τα σημεία  $M_1$  και  $M_2$ . Αν  $\alpha=0$ , το πολυώνυμο  $2^{\text{ου}}$  βαθμού αντιστοιχεί στην ευθεία  $y=2x-1$  (μπλέ).



## Παράδειγμα 2°

Έστω οι πραγματικοί αριθμοί 0, 1, 3 και 4, πάνω στον άξονα των τετμημένων (των  $x$ ). Να βρεθεί μία πολυωνυμική συνάρτηση με μοναδικές, απλές ρίζες, τους πιο πάνω αριθμούς.

### Λύση:

Η ουσία της ερώτησης είναι: Να υπολογισθεί μια πολυωνυμική συνάρτηση που να διέρχεται από τα τέσσερα σημεία:  $M_1(0,0)$ ,  $M_2(1,0)$ ,  $M_3(3,0)$  και  $M_4(4,0)$ . Πρόκειται λοιπόν για μία πολυωνυμική συνάρτηση 3ου βαθμού; **Όχι**. Γιατί τα τέσσερα σημεία είναι **συνευθειακά** (είναι πάνω στην ίδια ευθεία).

Αν λοιπόν δεν θέλουμε την τετριμμένη λύση της ευθείας  $y = p(x) = 0$ , τότε κάθε φορά που έχουμε  $n$  συνευθειακά σημεία, δεν μπορούμε να τα προσεγγίσουμε με πολυώνυμο  $n-1$  βαθμού, αλλά με πολυώνυμο  $n$ -οστού βαθμού. Επειδή όμως έχουμε μόνον  $n$  σημεία, οδηγούμαστε όχι σε ένα μοναδικό πολυώνυμο ως λύση, αλλά σε μία απειρία πολυωνύμων.

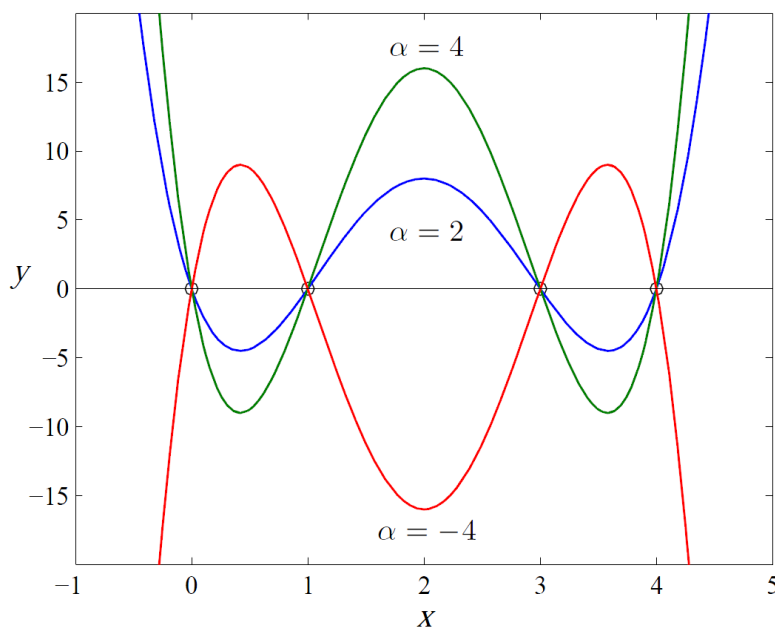
Χρησιμοποιώντας τη μορφή γραφής της 6<sup>ης</sup> ιδιότητας της προηγούμενης παραγράφου έχουμε:

$$\begin{aligned} p(x) &= a(x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3)(x - \rho_4) = \\ &= a(x - 0)(x - 1)(x - 3)(x - 4) = \\ &= a(x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 12x) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε πως το πολυώνυμο:

$$p(x) = ax(x-1)(x-3)(x-4) = a(x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 12x)$$

περνάει από τα σημεία  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(3,0)$  και  $(4,0)$ , όποια και αν είναι η τιμή της παραμέτρου  $a$ , που δεν είναι παρά μία πολλαπλασιαστική παράμετρος (βλέπε και Σχήμα 5.3).



**Σχήμα 5.3** Γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης του Παραδείγματος 2 για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $a$ . ( $a=2$  μπλε,  $a=4$  πράσινη,  $a=-4$  κόκκινη).



### 5.3. Το συμπτωτικό πολυώνυμο.

Ας υποθέσουμε πως σε ένα πίνακα τιμών (ή σε μία γραφική παράσταση), δίνονται οι τιμές που παίρνει μία μη πολυωνυμική συνάρτηση  $y=y(x)$ , για κάποιες τιμές της μεταβλητής  $x$ .

<b>x</b>	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	...	...	$x_{v-1}$	$x_v$
<b>y</b>	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	...	...	$y_{v-1}$	$y_v$

Προφανώς ο πιο πάνω πίνακας περιέχει  $v+1$  σημεία του επιπέδου  $Oxy$ , τα  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_v, y_v)$  που ορίζουν μια πολυωνυμική συνάρτηση  $v$ -οστού βαθμού.

Με τον όρο **συμπτωτικό πολυώνυμο** εννοούμε ένα πολυώνυμο  $p(x)$ , που να παίρνει τις ίδιες ακριβώς τιμές με τη συνάρτηση  $f(x)$  σε κάποιες από τις τιμές του  $x$  (ή σε όλες) που υπάρχουν στον πίνακα.

#### Παρατήρηση

Εάν υποθέσουμε πως το πλήθος των σημείων σύμπτωσης είναι  $v$ , τότε το συμπτωτικό πολυώνυμο θα είναι  $v-1$  βαθμού. Ονομάζεται συμπτωτικό μια και οι τιμές που παίρνει συμπίπτουν μ' αυτές της συνάρτησης, φυσικά μόνο στα σημεία σύμπτωσης. Ταυτόχρονα πρέπει να τονισθεί πως κάθε μεταβολή του πλήθους ή των σημείων της συνάρτησης που επιλέγουμε για να ορίσουμε το συμπτωτικό πολυώνυμο, το μεταβάλλει εντελώς.

Για το συμπτωτικό πολυώνυμο θα μιλήσουμε πολλές φορές στη συνέχεια. Άλλωστε και στις προηγούμενες παραγράφους και ιδιαίτερα στο 1<sup>ο</sup> από τα παραδείγματα ουσιαστικά ασχοληθήκαμε με το πρόβλημα του συμπτωτικού πολυωνύμου και δείξαμε την πιο κλασσική μέθοδο υπολογισμού του. Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με μία άλλη μέθοδο υπολογισμού του συμπτωτικού πολυωνύμου, με τη βοήθεια ενός παραδείγματος.

#### Θεωρητικό παράδειγμα

Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τις τιμές μιας συνάρτησης  $f(x)$  σε τέσσερις τιμές του  $x$ . Θέλουμε να υπολογίσουμε ένα πολυώνυμο που να παίρνει τις ίδιες τιμές με τη συνάρτηση  $f(x)$ , στις ίδιες τιμές του  $x$ .

<b>x</b>	-1	1	2	3
<b>y</b>	-7	-3	-1	9

Πρέπει να υπολογίσουμε μια πολυωνυμική συνάρτηση που να προσεγγίζει τέσσερα σημεία του επιπέδου  $Oxy$ . Επομένως το πολυώνυμο αυτό θα είναι 3ου βαθμού, οπότε θα χρειαστεί να προσδιορίσουμε την τιμή τεσσάρων παραμέτρων. Η προηγούμενη μέθοδος μας οδηγεί σε ένα σύστημα 4 γραμμικών εξισώσεων με 4 αγνώστους, η λύση του οποίου απαιτεί πολλές αριθμητικές πράξεις. Ας εξετάσουμε λοιπόν μία ταχύτερη και ευκολότερη μέθοδο.

Ορίζουμε το πολυώνυμο 3<sup>ου</sup> βαθμού

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) + a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

και θέτουμε  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 2$  και  $x_4 = 3$

$$p(x) = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)(x-1) + a_3(x+1)(x-1)(x-2)$$

Αυτή η γενική μορφή ενός πολυωνύμου, χρησιμοποιείται συχνά λόγω της ιδιότητάς της

- Όλοι οι όροι από τον 2<sup>ο</sup> και μετά να μηδενίζονται για  $x = x_1$
- Όλοι οι όροι από τον 3<sup>ο</sup> και μετά να μηδενίζονται για  $x = x_2$
- Ο 4<sup>ος</sup> όρος μηδενίζεται για  $x = x_3$

Εκμεταλλευόμενοι την ιδιότητα αυτή του πολυωνύμου υπολογίζουμε τις τιμές των παραμέτρων  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  και  $a_3$ , δίνοντας στο  $x$  τις τέσσερις τιμές του πίνακα και εξισώνοντας κάθε φορά την τιμή του πολυωνύμου  $p(x)$  με την τιμή της συνάρτησης  $f(x)$ , όπως αυτή δίνεται στον παραπάνω πίνακα. Με τον πρώτο υπολογισμό καθορίζουμε την τιμή της παραμέτρου  $a_0$ . Στον δεύτερο, χρησιμοποιώντας την τιμή του  $a_0$  που μόλις βρήκαμε, καθορίζουμε την τιμή της  $a_1$  κ.ο.κ.

$$p(-1) = -7 = a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = -7$$

$$p(1) = -3 = -7 + 2a_2 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 2$$

$$p(2) = -7 = -7 + 6 + 3a_2 = -1 + 3a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 0$$

$$p(3) = 9 = -7 + 8 + 8a_3 = 1 + 8a_3 \quad \Rightarrow \quad a_3 = 1$$

Άρα η πολυωνυμική συνάρτηση  $y = p(x)$  ισούται με:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)(x-1) + a_3(x+1)(x-1)(x-2) = \\ &= -7 + 2(x+1) + 0(x+1)(x-1) + 1(x+1)(x-1)(x-2) = \\ &= -7 + 2x + 2 + x^3 - 2x^2 - x + 2 = \\ &= x^3 - 2x^2 + x - 3 \end{aligned}$$

## Γενική περίπτωση

Στη γενική περίπτωση που έχουμε  $v+1$  σημεία  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ , ...,  $(x_{v+1}, y_{v+1})$ , τότε από αυτά διέρχεται μία πολυωνυμική συνάρτηση  $v$ -οστού βαθμού της μορφής:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1(x-x_1) + a_2(x-x_1)(x-x_2) + a_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) + \dots + \\ &+ a_v(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_v) \end{aligned}$$

και οι συντελεστές του  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_v$  δίνονται από τις σχέσεις:

$$a_0 = y_1$$

$$a_1 = \frac{y_2 - a_0}{x_2 - x_1}$$

$$a_2 = \frac{y_3 - a_0 - a_1(x_3 - x_1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

...

$$a_v = \frac{y_{v+1} - a_0 - a_1(x_{v+1} - x_1)(x_{v+1} - x_2) - \dots - a_{v-1}(x_{v+1} - x_1)(x_{v+1} - x_2)\dots(x_{v+1} - x_{v-1})}{(x_{v+1} - x_1)(x_{v+1} - x_2)(x_{v+1} - x_3)\dots(x_{v+1} - x_v)}$$

## Παράδειγμα

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας της συνάρτησης  $y = \cos(x)$ , για 4 σημεία.

$x$	1.3	1.5	1.7	1.9
$\cos(x)$	0.267499	0.070737	-0.12884	-0.32329

Να υπολογισθεί το συμπτωτικό πολυώνυμο και να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης, του συμπτωτικού πολυωνύμου αλλά και των σημείων σύμπτωσης.

## Λύση

Αρχικά ορίζουμε τη μορφή του συμπτωτικού πολυωνύμου

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) + a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= a_0 + a_1(x - 1.3) + a_2(x - 1.3)(x - 1.5) + a_3(x - 1.3)(x - 1.5)(x - 1.7) \end{aligned}$$

Κάνοντας τις πράξεις εύκολα υπολογίζουμε

$$p(1.3) = 0.267499 \Rightarrow a_0 = 0.267499$$

$$p(1.5) = 0.070737 \Rightarrow a_1 = -0.983808$$

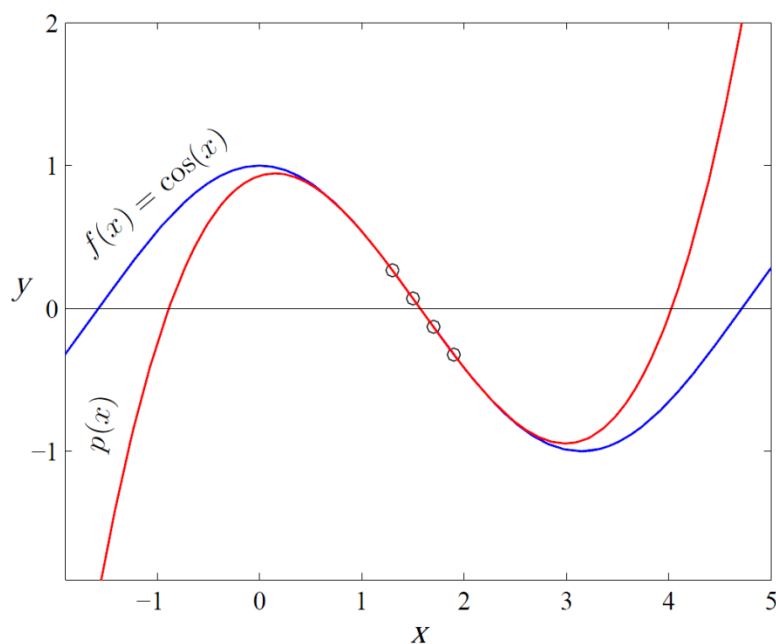
$$p(1.7) = -0.12884 \Rightarrow a_2 = -0.035251$$

$$p(1.9) = -0.32329 \Rightarrow a_3 = 0.165764$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των  $a_j$  στο συμπτωτικό πολυώνυμο έχουμε:

$$\begin{aligned} p(x) &= 0.267499 - 0.983808(x - 1.3) - 0.035251(x - 1.3)(x - 1.5) + \\ &\quad + 0.165764(x - 1.3)(x - 1.5)(x - 1.7) \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση του συμπτωτικού πολυωνύμου  $y = p(x)$  παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.4



**Σχήμα 5.4** Γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης  $y = \cos(x)$  (μπλε) και του συμπτωτικού πολυωνύμου  $p(x)$  (κόκκινη). Τα σημεία σύμπτωσης εμφανίζονται με κύκλους.

Παρατηρούμε πως το συμπτωτικό πολυώνυμο σχεδόν ταυτίζεται με τη συνάρτηση στις περιοχές που είναι σχετικά κοντά στα σημεία σύμπτωσης (για  $1 \leq x \leq 2.5$ ), ενώ εκτός του διαστήματος αυτού οι δύο γραφικές παραστάσεις αποκλίνουν έντονα.

Αντίθετα με το προηγούμενο παράδειγμα, εάν τα σημεία σύμπτωσης είναι πιο απομακρυσμένα μεταξύ τους, τότε η διαφορά τιμών ανάμεσα στη συνάρτηση και το συμπτωτικό πολυώνυμο, στα υπόλοιπα σημεία είναι αισθητά μεγαλύτερη. Αυτό γίνεται φανερό στο παρακάτω γράφημα (Σχήμα 5.5), στο οποίο τα σημεία σύμπτωσης είναι

$x$	-1	1	4	5
$\cos(x)$	0.5403023	0.5403023	-0.65364362	0.28366219

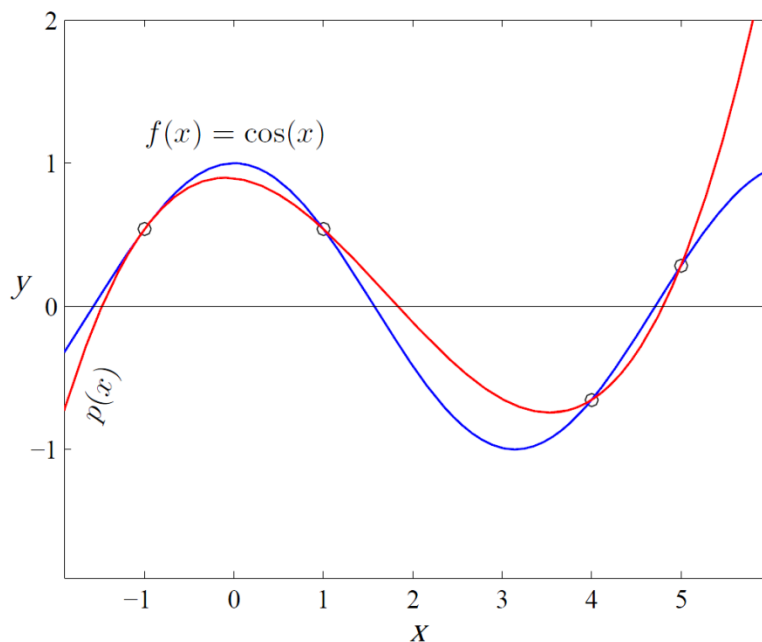
και οι συντελεστές του συμπτωτικού πολυωνύμου:

$$a_0 = 0.540302305868140$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = -0.079596395115450$$

$$a_3 = 0.068903056765245$$



**Σχήμα 5.5** Γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης  $y = \cos(x)$  (μπλε) και του συμπτωτικού πολυωνύμου  $p(x)$  (κόκκινη). Στην περίπτωση αυτή η ταύτιση των δύο συναρτήσεων δεν είναι καλή. Τα σημεία σύμπτωσης εμφανίζονται με κύκλους.

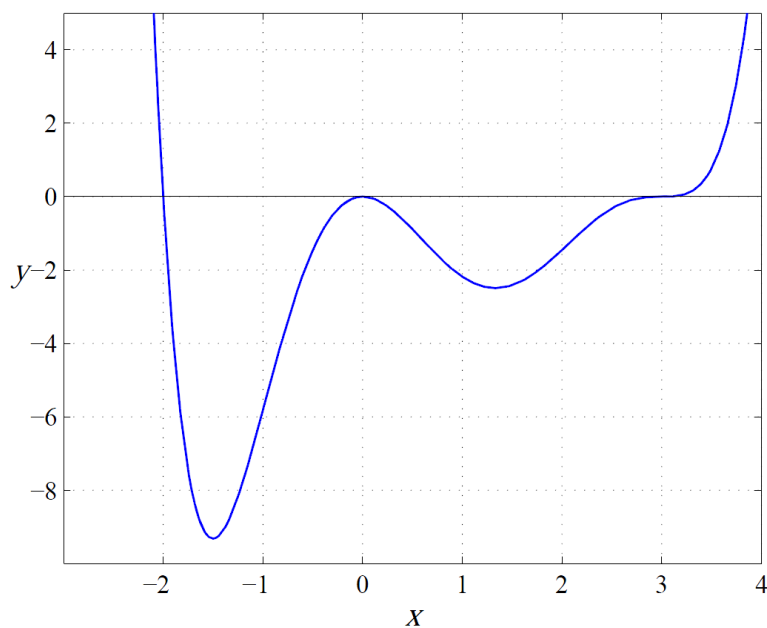


## Κριτήρια αξιολόγησης

### Κριτήριο αξιολόγησης 1

Στη παρακάτω γραφική παράσταση εμφανίζεται μία πολωνυμική συνάρτηση, της οποίας όλες οι ρίζες είναι πραγματικές. Να βρεθούν:

- Ο βαθμός της πολωνυμικής συνάρτησης.
- Το πλήθος και το είδος των ριζών της.



Σχήμα 5.6 Γραφική παράσταση της συνάρτησης του Κριτηρίου αξιολόγησης 1.

### Κριτήριο αξιολόγησης 2

Να υπολογισθεί το συμπτωτικό πολυώνυμο της συνάρτησης του παρακάτω πίνακα

$x$	-1	0	1	2	3
$y$	3	3	-1	-3	3

### Κριτήριο αξιολόγησης 3

Σχεδιάστε, χοντρικά, τη μορφή των πολυώνυμων των οποίων ο βαθμός, καθώς και το πλήθος και το είδος των ριζών τους (οι οποίες είναι όλες πραγματικές) δίνονται στον επόμενο πίνακα (θεωρήστε ότι όλα τα πολυώνυμα ισχύει  $p(10) > 0$ ) :

	<b>Βαθμός</b>	<b>Είδος πραγματικών ριζών</b>
1	2ος	1 (διπλή) στο $x=1$
2	3ος	1 (απλή) στο $x=1$ και 1 (διπλή) στο $x=2$
3	3ος	1 (τριπλή) στο $x=1$
4	4ος	2 (διπλές) στο $x=1$ και στο $x=2$
5	4ος	1 (απλή) στο $x=1$ και 1 (τριπλή) στο $x=3$



## Κεφάλαιο 6. Αριθμητική παρεμβολή

### Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η μέθοδος της Αριθμητικής Παρεμβολής, δηλαδή η εύρεση της τιμής  $y_k$  μιας συνάρτησης για ένα δεδομένο  $x_k$ , όταν δεν γνωρίζουμε την αναλυτική μορφή (εξίσωση) της συνάρτησης, αλλά γνωρίζουμε τις τιμές της,  $y_i$ , σε κάποια δεδομένα  $x_i$ , διαφορετικά του  $x_k$ . Παρουσιάζεται η ιδέα του πίνακα πεπερασμένων διαφορών και η αριθμητική παρεμβολή με τη μέθοδο Newton. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι μέθοδοι της απλής και διπλής γραμμικής παρεμβολής στις περιπτώσεις που η συνάρτηση μας είναι συνάρτηση μιας ή αντίστοιχα δύο μεταβλητών. Τέλος παρουσιάζονται οι μέθοδοι Lagrange και Newton με διαιρεμένες διαφορές, στην περίπτωση που έχουμε παρεμβολή σε πίνακα μη ισαπεχόντων ορισμάτων.

### Προαπαιτούμενη γνώση

Το κεφάλαιο προϋποθέτει ότι ο αναγνώστης έχει γνώσεις Μαθηματικών I του Α' Εξαμήνου σπουδών και έχει μελετήσει το Κεφάλαιο 5 για το Συμπτωτικό Πολυώνυμο. Για την κατανόηση της υλοποίησης των μεθόδων σε MATLAB απαιτούνται βασικές γνώσεις προγραμματισμού και χρήσης του προγράμματος MATLAB.

### 6.1. Η έννοια της παρεμβολής

Πολλές φορές συγχέουμε την έννοια της συνάρτησης με την ύπαρξη ενός Μαθηματικού τύπου, που να καθορίζει την τιμή της συνάρτησης σε κάθε σημείο του Πεδίου Ορισμού της. Συνήα όμως, στις πρακτικές εφαρμογές, μία συνάρτηση μπορεί να ορισθεί με έναν πίνακα τιμών ή τη γραφική της παράσταση. Αυτό συμβαίνει γιατί ο Μαθηματικός τύπος με τον οποίο ορίζεται η συνάρτηση είτε είναι πολύπλοκος, είτε δεν υπάρχει, όπως στην περίπτωση που η συνάρτηση περιγράφει κάποια πειραματικά αποτελέσματα.

Στις περιπτώσεις αυτές η τιμή της συνάρτησης δεν ορίζεται με τρόπο συνεχή πάνω στο πεδίο ορισμού της, αλλά διαθέτουμε την τιμή της συνάρτησης, έστω της  $f(x)$ , για κάποιες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής  $x$ , όπως συμβαίνει στον επόμενο πίνακα:

$x$	0	2	4	6	8	10	12
$y=f(x)$	1.099	1.609	1.946	2.197	2.398	2.565	2.708

Τίθεται λοιπόν το πρόβλημα του (προσεγγιστικού) υπολογισμού της τιμής της συνάρτησης  $f$  για κάποια τιμή της μεταβλητής  $x$  που δεν αναφέρεται στον πίνακα. Και αυτός ο υπολογισμός πρέπει να βασίζεται μόνο στις δοσμένες τιμές του πίνακα! Για παράδειγμα, θέλουμε να προσεγγίσουμε την τιμή της  $f(4.8)$ , με μοναδικά δεδομένα τα 7 σημεία  $(x, y)$  του πίνακα. Η πράξη αυτή λέγεται **παρεμβολή** γιατί προσπαθεί να παρεμβάλει νέες τιμές, ανάμεσα στις ήδη υπάρχουσες.

Το πρόβλημα της παρεμβολής έχει απασχολήσει από παλιά τους Μαθηματικούς, μια και οι τομείς στους οποίους μπορεί να εφαρμοσθεί είναι πάρα πολλοί. Στη σημερινή εποχή της τεράστιας τεχνολογικής προόδου και της ανάπτυξης της Πληροφορικής, με βάση τις μεθόδους που προέκυψαν από τη βασική και απλή ιδέα της παρεμβολής, επιλύονται προβλήματα πολύπλοκα, όπως υπολογισμός πολύπλοκων ολοκληρωμάτων, ολοκληρώσεις συστημάτων Διαφορικών Εξισώσεων, διόρθωση και εμπλουτισμός δεδομένων κ.λ.π.

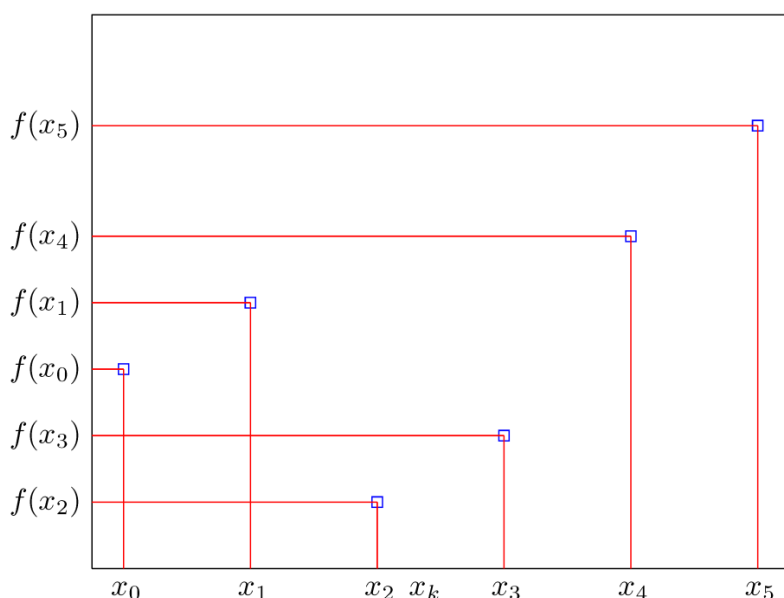
Στη βάση των περισσότερων μεθόδων παρεμβολής υπάρχει η αντικατάσταση της άγνωστης ή πολύπλοκης συνάρτησης με μία πολυωνυμική συνάρτηση. Πρόκειται βέβαια για την πολυωνυμική συνάρτηση που παίρνει τις ίδιες τιμές με την  $f(x)$ , σε κάποια ή σε όλα τα σημεία που αυτή είναι γνωστή και που την ονομάσαμε ήδη **συμπτωτικό πολυώνυμο**.

## 6.2. Εκλογή του συμπτωτικού πολυωνύμου

Παρ' όλον ότι οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι σχετικά απλές, τα προβλήματα που συνοδεύουν την παρεμβολή είναι πολλά και σημαντικά. Έτσι πρέπει:

1. να αποφασίσουμε για τον βαθμό του πολυωνύμου με το οποίο θα παρεμβάλουμε (άρα για τον αριθμό των σημείων σύμπτωσης πολυωνύμου και συνάρτησης),
2. να εκτιμήσουμε το μέγιστο σφάλμα, στο τελικό αποτέλεσμα

Υποθέτουμε λοιπόν πως η συνάρτηση  $f$  δίνεται με την παρακάτω γραφική παράσταση (Σχήμα 6.1) και ζητούμε την τιμή της σε κάποιο  $x_k$  του διαστήματος  $(x_2, x_3)$ . Προσπαθώντας να προσεγγίσουμε την τιμή της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $x_k$  με παρεμβολή, έχουμε τη δυνατότητα να επιλέξουμε τον βαθμό του πολυωνύμου σύμπτωσης, άρα και τον αριθμό των σημείων σύμπτωσης, καθώς και τα συγκεκριμένα σημεία σύμπτωσης.



**Σχήμα 6.1** Τα σημεία  $(x_0, x_1, \dots, x_5)$  στα οποία μας είναι γνωστή η τιμή της συνάρτησης και το σημείο  $x_k$  στο οποίο θέλουμε να βρούμε την τιμή της.

Αν επιλέξουμε να παρεμβάλουμε με πολυώνυμο 1<sup>ου</sup> βαθμού (ευθεία), είναι σαν να αντικαθιστούμε, στο διάστημα  $(x_2, x_3)$ , τη συνάρτηση  $f$  με το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα δύο σημεία. Από το τμήμα αυτό θα “δανειστούμε” την τιμή του  $f(x_k)$ . Εάν θελήσουμε να χρησιμοποιήσουμε και τα 7 σημεία που μας δίνονται, θα χρειαστούμε το συμπτωτικό τους πολυώνυμο, το οποίο θα είναι 6<sup>ου</sup> βαθμού. Όμως οι πράξεις που απαιτούνται για τον καθορισμό των 7 παραμέτρων του πολυωνύμου αυτού είναι ασύγκριτα περισσότερες σε σύγκριση μ’ αυτές του πρωτοβαθμίου, ενώ η ακρίβεια του τελικού αποτελέσματος μπορεί να μην είναι αντίστοιχα σημαντικότερη. Χρειαζόμαστε λοιπόν κάποια ένδειξη που να μας βοηθάει στην εκλογή του βαθμού του συμπτωτικού πολυωνύμου, που αποτελεί τη χρυσή τομή ανάμεσα στην ακρίβεια του υπολογισμού και στην ποσότητα των πράξεων που πρέπει να γίνουν.

### 6.2.1. Παράδειγμα

Στο παρακάτω πίνακα δίνονται τέσσερις τιμές μιας συνάρτησης  $y = f(x)$  και πρέπει να υπολογίσουμε, με πολυωνυμική παρεμβολή, κάποιες ενδιάμεσες τιμές.

$x$	0	1	4	9
$y=f(x)$	0	1	2	3

Θα δοθούν δύο λύσεις. Στην πρώτη θα διαλέξουμε πρωτοβάθμια πολυώνυμα (ευθείες), ενώ στη δεύτερη θα υπολογίσουμε το τριτοβάθμιο συμπτωτικό πολυώνυμο, που ορίζεται από τα τέσσερα σημεία του πίνακα.

### i) Πρωτοβάθμια πολυώνυμα $p_1(x)$ .

(α) Για το διάστημα  $[0,1]$  τα σημεία  $(0,0)$  και  $(1,1)$  ορίζουν το σύστημα:

$$\left. \begin{array}{l} 0a + b = 0 \\ 1a + b = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \end{array}$$

Άρα η ευθεία είναι η  $y = x$

(β) Για το διάστημα  $[1,4]$  τα σημεία  $(1,1)$  και  $(4,2)$  ορίζουν το σύστημα:

$$\left. \begin{array}{l} 1a + b = 1 \\ 4a + b = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{2}{3} \end{array}$$

Άρα η ευθεία είναι η  $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

(γ) Για το διάστημα  $[4,9]$  τα σημεία  $(4,2)$  και  $(9,3)$  ορίζουν το σύστημα:

$$\left. \begin{array}{l} 4a + b = 2 \\ 9a + b = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = \frac{1}{5} \\ b = \frac{6}{5} \end{array}$$

Άρα η ευθεία είναι η  $y = \frac{1}{5}x + \frac{6}{5}$

Επομένως η συνάρτηση του πολυωνύμου παρεμβολής που δίνει την τιμή της συνάρτησης του πίνακα στην τυχαία τιμή  $x_k$  της μεταβλητής, είναι η συνάρτηση

$$y_k = p_1(x_k) = \begin{cases} x & 0 \leq x_k \leq 1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} & 1 \leq x_k \leq 4 \\ \frac{1}{5}x + \frac{6}{5} & 4 \leq x_k \leq 9 \end{cases}$$

### ii) Τριτοβάθμιο πολυώνυμο $p_3(x)$ .

Ακολουθώντας τη μέθοδο της παραγράφου 5.3, ορίζουμε το πολυώνυμο:

$$p_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

υιοθετώντας τα εξής  $x$ :  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$  και  $x_2 = 4$ . Έτσι το προηγούμενο πολυώνυμο παίρνει τη μορφή:

$$p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x(x-1) + a_3x(x-1)(x-4)$$

οπότε αντικαθιστώντας τα 4 σημεία του πίνακα, υπολογίζουμε τις τιμές των αγνώστων παραμέτρων:

$$\begin{aligned}
p_3(0) &= 0 = a_0 & \Rightarrow & a_0 = 0 \\
p_3(1) &= 1 = a_1 & \Rightarrow & a_1 = 1 \\
p_3(4) &= 2 = 4 + 12 \cdot a_2 & \Rightarrow & a_2 = -1/6 \\
p_3(9) &= 3 = 9 - 9 \cdot \frac{8}{6} + 9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot a_3 & \Rightarrow & a_3 = 1/20
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των παραμέτρων  $a_0, a_1, a_2$  και  $a_3$  στη σχέση του πολυνύμου και κάνοντας τις πράξεις, βρίσκουμε:

$$p_3(x) = \frac{1}{60}(x^3 - 15x^2 + 74x)$$

Ας υπολογίσουμε στη συνέχεια την τιμή  $f(2)$  με τα δύο είδη παρεμβολής:

**Με την πρωτοβάθμια (γραμμική παρεμβολή).**

$$f(2) = \left[ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \right]_{x=2} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = 1.3333333$$

**Με την τριτοβάθμια (πλήρη παρεμβολή).**

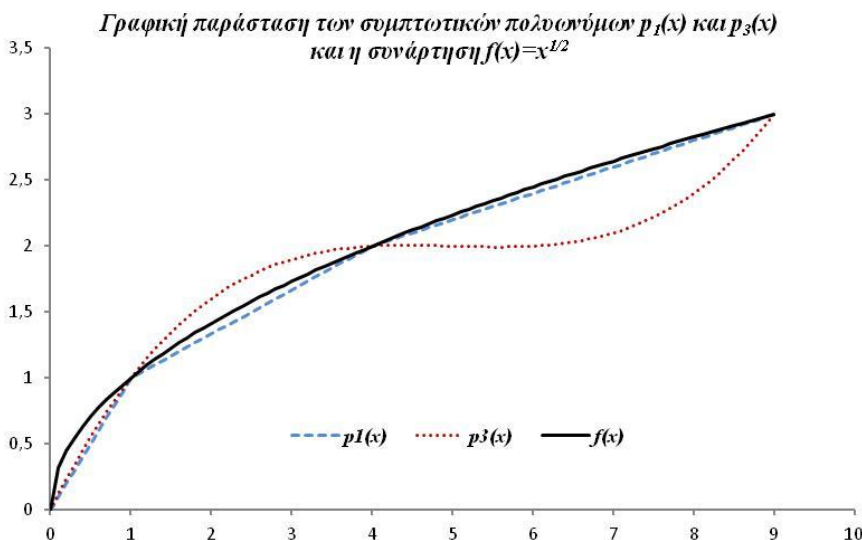
$$f(2) = \left[ \frac{1}{60}(x^3 - 15x^2 + 74x) \right]_{x=2} = \frac{8 - 15 \cdot 4 + 74 \cdot 2}{60} = \frac{96}{60} = 1.6$$

### Παρατήρηση:

Παρατηρώντας τον πίνακα τιμών της  $f(x)$ , υποπτευόμαστε πως η συνάρτηση που δίνει τις τιμές αυτές είναι η:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Στο επόμενο γράφημα έχουμε τη γραφική παράσταση των συμπτωτικών πολυνόμων  $p_1(x)$ ,  $p_3(x)$  και της συνάρτησης  $f(x)$ .



Το πιο πάνω γράφημα δείχνει πως στην ιδιαίτερη αυτή περίπτωση, όπου τα σημεία του πίνακα τιμών απέχουν πολύ, η προσέγγιση της συνάρτησης  $f(x)$  με πρωτοβάθμια πολυώνυμα είναι κάποιες φορές ακριβέστερη της προσέγγισης με τριτοβάθμιες πολυωνυμικές συναρτήσεις. Όμως θα επανέλθουμε στο παράδειγμα αυτό, στο Παράδειγμα 1 της παραγράφου 6.8.1.



### 6.3. Οι πεπερασμένες διαφορές

Υποθέτουμε πως γνωρίζουμε τη συνάρτηση  $f(x)$  με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών, στον οποίο οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής ισαπέχουν (ισχύει δηλαδή  $x_{i+1} - x_i = h = \text{σταθ.}$ ).

$x$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	...	...	$x_{v-1}$	$x_v$
$y$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	...	...	$y_{v-1}$	$y_v$

Ένας τέτοιος πίνακας καλείται **πίνακας ισαπεχόντων ορισμάτων**.

Προσπαθώντας να κατανοήσουμε τη φύση, τη συμπεριφορά και τις ιδιότητες αυτής της συνάρτησης, ορίζουμε τις διαφορές των τιμών της. Αφαιρούμε λοιπόν από κάθε επόμενη τιμή την αμέσως προηγούμενη και τη γράφουμε από κάτω τους και ανάμεσά τους. Τις διαφορές αυτές τις ονομάζουμε **διαφορές πρώτης τάξης**. Στη συνέχεια, με όμοιο τρόπο, ορίζουμε τις διαφορές των διαφορών (τις οποίες ονομάζουμε διαφορές δεύτερης τάξης). Με τον ίδιο τρόπο ορίζονται οι διαφορές μεγαλύτερης τάξης.

**Πίνακας πεπερασμένων διαφορών της συνάρτησης  $y=f(x)$**

$x$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$y$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
$\Delta y$	$\Delta y_0$	$\Delta y_1$	$\Delta y_1$	$\Delta y_3$	
$\Delta^2 y$	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^2 y_1$		
$\Delta^3 y$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^3 y_1$			
$\Delta^4 y$	$\Delta^4 y_0$				

όπου έχουμε τις σχέσεις

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = (y_{i+3} - 2y_{i+2} + y_{i+1}) - (y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i$$

$$\begin{aligned} \Delta^4 y_i &= \Delta^3 y_{i+1} - \Delta^3 y_i = (y_{i+4} - 3y_{i+3} + 3y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i) = \\ &= y_{i+4} - 4y_{i+3} + 6y_{i+2} - 4y_{i+1} + y_i \end{aligned}$$

$$\Delta^5 y_i = \Delta^4 y_{i+1} - \Delta^4 y_i = \dots = y_{i+5} - 5y_{i+4} + 10y_{i+3} - 10y_{i+2} + 5y_{i+1} - y_i$$

κ.ο.κ.

#### Σημείωση:

Στο σημείο αυτό απλώς παρατηρήστε ότι οι συντελεστές των  $y_i, y_{i+1}, y_{i+2}$  κ.λ.π. στα  $\Delta^n y_i$  είναι οι ίδιοι με τους συντελεστές των  $a$  και  $b$  στο ανάπτυγμα του  $(a-b)^n$ .

### Παράδειγμα:

Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές μιας συνάρτησης  $f(x)$ , για 9 τιμές του ορίσματος  $x$ . Από κάτω έχουμε υπολογίσει τον πίνακα των πεπερασμένων διαφορών.

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y$	86	13	-2	-1	-2	1	38	163	454
$\Delta y$	-73	-15	1	-1	3	37	125	291	
$\Delta^2 y$		58	16	-2	4	34	88	166	
$\Delta^3 y$			-42	-18	6	30	54	78	
$\Delta^4 y$				24	24	24	24	24	
$\Delta^5 y$					0	0	0	0	



#### 6.3.1. Ιδιότητες των πεπερασμένων διαφορών.

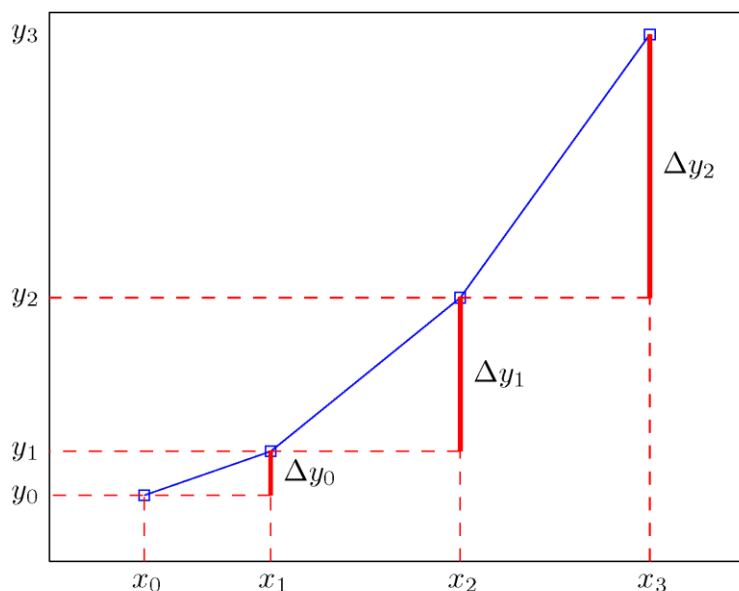
Οι πεπερασμένες διαφορές έχουν κάποιες σημαντικές ομοιότητες με τις παραγώγους. Αναφέρουμε στη συνέχεια κάποιες ιδιότητες, τις οποίες αναλύουμε χωρίς όμως να τις αποδεικνύουμε:

1. Όταν οι διαφορές πρώτης τάξης ( $\Delta y_i$ ) είναι μεγαλύτερες του μηδενός, τότε οι τιμές της συνάρτησης  $y_i$  είναι αύξουσες (να θυμηθούμε πως ακριβώς το ίδιο συμβαίνει και με την πρώτη παράγωγο). Άλλωστε δεν θα πρέπει να ξεχνούμε πως το κλάσμα  $\Delta y_i / h$ , είναι μια πρώτη προσέγγιση της τιμής της παραγώγου της  $f$  στο σημείο  $x_i$ .
2. Αντίστοιχα, εάν οι δεύτερης τάξης διαφορές είναι θετικές (αρνητικές), τότε οι τιμές  $y_k$  δημιουργούν ένα γράφημα που στρέφει τα κοίλα άνω (κάτω).
3. Εάν οι τιμές  $y_i$  δίνονται από μία πολωνυμική συνάρτηση  $n$ -οστού βαθμού, τότε οι διαφορές πρώτης τάξης δίνονται από κάποια πολωνυμική συνάρτηση  $n-1$  βαθμού, οι διαφορές δεύτερης τάξης δίνονται από κάποια πολωνυμική συνάρτηση  $n-2$  βαθμού, κ.ο.κ.. (Η ιδιότητα αυτή ισχύει για τις παραγώγους:  $y = x^4 \Rightarrow y' = 4x^3 \Rightarrow y'' = 12x^2 \Rightarrow y''' = 24x \dots$ )
4. Πόρισμα της προηγούμενης είναι ότι: Εάν οι τιμές  $y_i$  δίνονται από μία πολωνυμική συνάρτηση  $n$ -οστού βαθμού, τότε οι διαφορές  $n$ -οστής τάξης δίνονται από κάποια πολωνυμική συνάρτηση μηδενικού βαθμού, δηλαδή είναι σταθερές. Μάλιστα, η τιμή των σταθερών διαφορών  $n$ -τάξης, διηρημένη με το βήμα  $h$  του πίνακα υψωμένο εις τη  $n$ ,

$$\Delta^n y_i / h^n$$

είναι ακριβώς ίση με την τιμή της παραγώγου  $n$ -οστής τάξης, η οποία είναι επίσης σταθερή.

5. Εάν οι τιμές  $y_i$  δίνονται από μία μη πολωνυμική συνάρτηση  $n$ -οστού βαθμού, τότε δεν καταλήγουμε ποτέ σε σταθερές διαφορές (αντίστοιχα μία μη πολωνυμική συνάρτηση έχει άπειρες, μη μηδενικές, παραγώγους).



**Σχήμα 6.2** Σχηματική παράσταση των πεπερασμένων διαφορών όταν οι διαφορές 1<sup>ης</sup> και 2<sup>ης</sup> τάξης είναι θετικές.

Στη παραπάνω γραφική παράσταση (Σχήμα 6.2) έχουμε:

- Οι διαφορές 1<sup>ης</sup> τάξης είναι θετικές, με αποτέλεσμα οι τιμές  $y_j=f(x_j)$  να είναι αύξουσες.
- Οι διαφορές 2<sup>ης</sup> τάξης είναι θετικές, με αποτέλεσμα οι τιμές των διαφορών 1<sup>ης</sup> τάξης να είναι αύξουσες.

Παρατηρούμε λοιπόν πως η συνάρτηση  $f$  είναι:

- αύξουσα και
- στρέφει τα κοίλα προς τα άνω.

### Παρατήρηση:

Επειδή ο πίνακας μιας συνάρτησης έχει πεπερασμένου πλήθους σημεία (έστω  $n$ ), ο πίνακας διαφορών μπορεί να φθάσει μέχρι τις διαφορές  $n-1$  τάξης. Εάν λοιπόν οι αρχικές τιμές  $y_i$  δίνονται από πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου του  $n$ , τότε δεν θα συναντήσουμε πουθενά τις σταθερές διαφορές. Επομένως δεν θα μπορούμε να αποφανθούμε για το εάν οι τιμές  $y_i$  προέρχονται από πολυωνυμική ή μη πολυωνυμική συνάρτηση.

### Παράδειγμα.

Δίνεται ο πίνακας τιμών της συνάρτησης:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	157	44	13	10	5	-8	-11	38	205

Να γίνει ο πίνακας πεπερασμένων διαφορών και να απαντηθούν τα παρακάτω:

1. Είναι πολωνυμική; Εάν είναι πολωνυμική, τότε ποιος είναι ο βαθμός της και ποιος είναι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου της;
2. Να υπολογισθεί το εν λόγω πολυώνυμο.

### Λύση:

Κάνουμε τον πίνακα διαφορών.

<b>x</b>	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
<b>y</b>	157	44	13	10	5	-8	-11	38
<b>Δy</b>	-113	-31	-3	-5	-13	-3	49	
<b>Δ<sup>2</sup>y</b>		82	28	-2	-8	10	52	
<b>Δ<sup>3</sup>y</b>			-54	-30	-6	18	42	
<b>Δ<sup>4</sup>y</b>				24	24	24	24	

1. Παρατηρούμε ότι οι τέταρτης τάξης διαφορές είναι σταθερές, άρα οι τιμές  $y_i$  προέρχονται από μία πολωνυμική συνάρτηση 4ου βαθμού

Η τέταρτη παράγωγος της πολωνυμικής συνάρτησης του πίνακα είναι σταθερή και η τιμή της δίνεται από τη σχέση  $\Delta^4 y_i / h^4$  και είναι ίση με το 24. Υπολογίζοντάς τη θεωρητικά και ορίζοντας τον τεταρτοβάθμιο όρο σαν:  $a_4 x^4$ , και ενθυμούμενοι πως οι όροι μικρότερης τάξης θα χαθούν κατά την παραγωγή, έχουμε:

$$y = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \Rightarrow$$

$$y' = 4a_4 x^3 + 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1 \Rightarrow$$

$$y'' = 12a_4 x^2 + 6a_3 x + 2a_2 \Rightarrow$$

$$y''' = 24a_4 x + 6a_3 \Rightarrow$$

$$y'''' = 24a_4$$

Εξισώνοντας τη σταθερή 4η παράγωγο με τη σταθερή 4η διαφορά  $\Delta^4 y_i / h^4$  έχουμε:

$$24a_4 = 24 \Rightarrow a_4 = 1$$

2. Για να ορίσουμε ένα πολυώνυμο 4ου βαθμού χρειαζόμαστε 5 σημεία. Διαλέγουμε λοιπόν 5 (οποιαδήποτε) από τα σημεία του πίνακα (τα οποία ονομάζουμε  $x_0, x_1, x_2, x_3$  και  $x_4$ ), μ' όποια σειρά θέλουμε. Επιλέγουμε συνήθως σημεία τα οποία έχουν  $x$  (κατ' απόλυτη τιμή) μικρό έτσι ώστε να γίνουν ευκολότερες οι πράξεις.

Όπως κάναμε σε ανάλογο πρόβλημα του προηγούμενου κεφαλαίου, ορίζουμε το συμπτωτικό πολυώνυμο με τη βοήθεια των τεσσάρων, εκ των πέντε, τιμών (των  $x_0, x_1, x_2$  και  $x_3$ ).

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + a_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Επιλέγοντας ως σημεία τα  $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$  και  $x_4 = 3$ , έχουμε

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x(x-1) + a_3 x(x-1)(x+1) + a_4 x(x-1)(x+1)(x-2)$$

Τοποθετούμε τις 5 τιμές  $(x_i, y_i)$  στο παραπάνω συμπτωτικό πολυώνυμο και υπολογίζουμε τις τιμές των συντελεστών του:



$$\begin{aligned}
p(0) &= 10 = a_0 & \Rightarrow a_0 &= 10 \\
p(1) &= 5 = 10 + a_1 & \Rightarrow a_1 &= -5 \\
p(-1) &= 13 = 10 + 5 + 2a_2 & \Rightarrow a_2 &= -1 \\
p(2) &= -8 = 10 - 10 - 2 + 6a_3 & \Rightarrow a_3 &= -1 \\
p(3) &= -11 = 10 - 15 - 6 - 24 + 24a_4 & \Rightarrow a_4 &= 1
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στο συμπτωτικό πολυώνυμο και κάνοντας τις πράξεις έχουμε

$$\begin{aligned}
p(x) &= 10 - 5x - x(x-1) - x(x-1)(x+1) + x(x-1)(x+1)(x-2) = \\
&= 10 - 5x - x(x-1) - x(x^2-1) + x(x^2-1)(x-2) = \\
&= 10 - 5x - (x^2-x) - (x^3-x) + (x^3-x)(x-2) = \\
&= 10 - 5x - x^2 + x - x^3 + x + x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = \\
&= x^4 - 3x^3 - 2x^2 - x + 10
\end{aligned}$$



## 6.4. Το συμπτωτικό πολυώνυμο του Newton

Ο προηγούμενος προσδιορισμός του συμπτωτικού πολυωνύμου είναι επίπονος και αρκετά δύσκολος στο να προγραμματισθεί. Για τον λόγο αυτό πιο βολικός είναι ο προσδιορισμός του με τη βοήθεια των πεπερασμένων διαφορών.

Ας υποθέσουμε πως το συμπτωτικό πολυώνυμο γράφεται υπό τη μορφή:

$$y_k = p(x_k)$$

όπου με το  $x_k$  συμβολίζουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή του, αλλά και της συνάρτησης. Κατά τον υπολογισμό του συμπτωτικού πολυωνύμου εμφανίζεται η παράσταση  $(x_k - x)/h$ , οπότε εκτελούμε την αλλαγή μεταβλητής:

$$\frac{x_k - x_0}{h} = k$$

όπου  $h$  είναι το σταθερό βήμα του πίνακα τιμών. Λύνοντας τη σχέση αυτή ως προς  $x_k$  έχουμε:

$$x_k = x_0 + kh$$

Για ακέραιες τιμές του  $k$  το  $x_k$  συμπίπτει με τα σημεία  $x$  του πίνακα πεπερασμένων διαφορών (π.χ.  $x_3 = x_0 + 3h$ ). Έτσι, εφόσον το πολυώνυμο  $p(x_k)$  είναι συνάρτηση του  $x_k$  και το  $x_k$  είναι συνάρτηση του  $k$ , συμπεραίνουμε ότι το πολυώνυμο  $p$  είναι συνάρτηση του  $k$ , δηλαδή  $p(k)$ . Επομένως, γίνεται φανερό το γιατί αντικαθιστούμε την κανονική μεταβλητή  $x_k$  με το δείκτη της  $k$ .

Ο βαθμός του συμπτωτικού πολυωνύμου του Newton μπορεί να επιλεγεί από το χρήστη. **Το σκεπτικό σύμφωνα με το οποίο επιλέγεται θα παρουσιαστεί στο παράδειγμα της παραγράφου 6.5.** Η τελική μορφή του πολυωνύμου δίνεται από τη σχέση:

$$y_k = p(x_k) = p(k) = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots$$

Το πολυώνυμο αυτό του Newton είναι όντως το συμπτωτικό, μια και παίρνει τις ίδιες τιμές με τη συνάρτηση του πίνακα:  $y_k = f(x_k) = p(x_k) = p(k)$ . Πράγματι:

$$p(0) = y_0$$

$$p(1) = y_0 + \Delta y_0 = y_0 + (y_1 - y_0) = y_1$$

$$\begin{aligned} p(2) &= y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 = y_0 + 2(y_1 - y_0) + (\Delta y_1 - \Delta y_0) = \\ &= y_0 + 2(y_1 - y_0) + [(y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)] = \\ &= y_0 + 2y_1 - 2y_0 + y_2 - y_1 - y_1 + y_0 = y_2 \end{aligned}$$

κ.λ.π.

#### 6.4.1. Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του συμπτωτικού πολωνύμου του Newton

Αρχικά να ορίσουμε την έννοια των Συνδυασμών και τον τύπο που υπολογίζει το πλήθος τους: Ονομάζουμε «**συνδυασμούς των ν στοιχείων ανά μ**» το πλήθος όλων των διαφορετικών ομάδων από μ στοιχεία, που δημιουργούνται από ν στοιχεία. Για κάθε ομάδα δεν ενδιαφερόμαστε για τη σειρά με την οποία επιλέγονται τα στοιχεία της μ-άδας, δηλαδή η ομάδα με στοιχεία π.χ. τα (1,3,4) είναι η ίδια με την (3,1,4).

Το πλήθος των συνδυασμών των ν στοιχείων ανά μ δίνεται από τον τύπο:

$$\binom{\nu}{\mu} = \frac{\nu!}{\mu!(\nu - \mu)!}$$

όπου, φυσικά  $\mu \leq \nu$ . Θυμίζουμε ότι εξ' ορισμού ισχύει  $0! = 1$ . Έτσι ισχύει και η προφανής ισότητα:

$$\binom{\nu}{\nu} = \binom{\nu}{0} = 1$$

Ο τύπος των συνδυασμών δίνει την πολύ ενδιαφέρουσα σχέση του διωνύμου του Newton:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^\nu &= \binom{\nu}{0} \alpha^\nu + \binom{\nu}{1} \alpha^{\nu-1} \beta + \binom{\nu}{2} \alpha^{\nu-2} \beta^2 + \binom{\nu}{3} \alpha^{\nu-3} \beta^3 + \dots \\ &\quad + \binom{\nu}{\nu-1} \alpha \beta^{\nu-1} + \binom{\nu}{\nu} \beta^\nu \end{aligned}$$

όπου, με τη βοήθεια των συνδυασμών δίνονται οι διωνυμικοί συντελεστές. Π.χ.

$$(\alpha + \beta)^4 = \binom{4}{0} \alpha^4 + \binom{4}{1} \alpha^3 \beta + \binom{4}{2} \alpha^2 \beta^2 + \binom{4}{3} \alpha \beta^3 + \binom{4}{4} \beta^4$$

Δηλαδή:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^4 &= \frac{4!}{0! \cdot 4!} \alpha^4 + \frac{4!}{1! \cdot 3!} \alpha^3 \beta + \frac{4!}{2! \cdot 2!} \alpha^2 \beta^2 + \frac{4!}{3! \cdot 1!} \alpha \beta^3 + \frac{4!}{4! \cdot 0!} \beta^4 = \\ &= \alpha^4 + 4\alpha^3 \beta + 6\alpha^2 \beta^2 + 4\alpha \beta^3 + \beta^4 \end{aligned}$$

Βέβαια αυτοί δίνονται και από το γνωστό τρίγωνο του Pascal:

						1						$(\alpha+\beta)^0=1$					
							1		1			$(\alpha+\beta)^1=\alpha+\beta$					
							1		2		1	$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$					
							1		3		3	1	$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$				
							1		4		6		4	1	$(\alpha+\beta)^4=\alpha^4+4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3+\beta^4$		
							1		5		10		10		5	1	$(\alpha+\beta)^5=\alpha^5+5\alpha^4\beta+10\alpha^3\beta^2+10\alpha^2\beta^3+5\alpha\beta^4+\beta^5$

Στο τρίγωνο αυτό, από την τρίτη σειρά και κάτω, ξεκινούμε με μονάδα, συνεχίζουμε με το άθροισμα των δύο συντελεστών που βρίσκονται από πάνω και τελειώνουμε με μονάδα.

Τα παραπάνω σχετίζονται με το πώς μπορεί να γραφεί το  $y_k$ , συναρτήσει των διαφορών  $\Delta^j y_k$ .

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = (y_0 + \Delta y_0) + (\Delta y_0 + \Delta^2 y_0) = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0$$

$$y_3 = y_2 + \Delta y_2 = \dots y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0$$

$$y_4 = y_3 + \Delta y_3 = \dots y_0 + 4\Delta y_0 + 6\Delta^2 y_0 + 4\Delta^3 y_0 + \Delta^4 y_0$$

κ.ο.κ.

Παρατηρούμε πως εμφανίζονται οι διωνυμικοί συντελεστές, οι συντελεστές δηλαδή του αναπτύγματος  $(\alpha + \beta)^k$ . Έτσι λοιπόν γράφουμε:

$$\begin{aligned}
 y_k &= y_{k-1} + \Delta y_{k-1} = \dots = \binom{k}{0} y_0 + \binom{k}{1} \Delta y_0 + \binom{k}{2} \Delta^2 y_0 + \binom{k}{3} \Delta^3 y_0 + \dots + \\
 &\quad + \binom{k}{k-1} \Delta^{k-1} y_0 + \binom{k}{k} \Delta^k y_0 \quad \Rightarrow \\
 y_k &= y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots + k\Delta^{k-1} y_0 + \Delta^k y_0
 \end{aligned}$$

Εάν στον παραπάνω τύπο θέσουμε στον δείκτη  $k$  μια ενδιάμεση τιμή, δηλαδή μια μη ακέραια τιμή (άρα ο  $k$  πάψει να αντιστοιχεί σε κάποιο από τα  $x$  του πίνακα), τότε ο προηγούμενος τύπος γίνεται το συμπτωτικό πολυώνυμο του Newton.

#### 6.4.2. Παρεμβολή με το συμπτωτικό πολυώνυμο του Newton.

Με τη χρήση του συμπτωτικού πολυωνύμου του Newton, η πλήρης παρεμβολή γίνεται απλούστερη. Ας υποθέσουμε λοιπόν πως έχουμε ένα πίνακα τιμών της συνάρτησης  $f$  και ζητούμε την τιμή της συνάρτησης σε κάποιο ενδιάμεσο σημείο του πίνακα  $x_k$ . Εργαζόμαστε λοιπόν ως εξής:

- Επιλέγουμε το βαθμό του συμπτωτικού πολυωνύμου που θα χρησιμοποιήσουμε για παρεμβολή, σύμφωνα με τη λογική που περιγράφεται **στο παράδειγμα της παραγράφου 6.5**. Ο βαθμός του πολυωνύμου μας επιβάλλει και το πλήθος των σημείων σύμπτωσης (τα οποία, συνήθως, είναι πολύ λιγότερα από το σύνολο των σημείων του πίνακα).
- Επιλέγουμε τα σημεία σύμπτωσης από τον πίνακα έτσι ώστε: (α) να είναι διαδοχικά και (β) το σημείο παρεμβολής ( $x_k$ ) να βρίσκεται όσο πιο κεντρικότερα γίνεται, ανάμεσα στα σημεία αυτά.

- Ονομάζουμε το πρώτο από τα επιλεγμένα σημεία  $x_0$  (το οποίο προφανώς δεν είναι αναγκαίο να ταυτίζεται με το πρώτο σημείο του πίνακα), και ορίζουμε την τιμή του δείκτη  $k$  του σημείου παρεμβολής από τη σχέση:

$$k = \frac{(x_k - x_0)}{h}$$

- Υπολογίζω την τιμή  $y_k$ , από τον τύπο του Newton.

## 6.5. Γραμμική παρεμβολή

Η γραμμική παρεμβολή είναι μία μερική περίπτωση της πλήρους παρεμβολής. Χρησιμοποιεί τους δύο πρώτους όρους του συμπτωτικού πολυωνύμου του Newton.

$$y_k = p(x_k) = p(k) = y_0 + k\Delta y_0$$

όπου και πάλι:

$$k = \frac{(x_k - x_0)}{h}$$

Ο τύπος της γραμμικής παρεμβολής προκύπτει πολύ εύκολα και με απλές πράξεις (απλή μέθοδος των τριών). Έστω πως γνωρίζουμε τις τιμές της συνάρτησης στα σημεία :

$$\Sigma_0 (x_0, y_0) \text{ και } \Sigma_1 (x_1, y_1)$$

και ζητούμε την τιμή της συνάρτησης  $y_k$  στο σημείο  $x_k$ .

Ενώνουμε (Σχήμα 6.3) τα δύο γνωστά σημεία με ένα ευθύγραμμο τμήμα (το  $\Sigma_0\Sigma_1$ ) και υπολογίζουμε, με τη βοήθειά του, το  $y_k$  του σημείου της ευθείας  $\Sigma_k (x_k, y_k)$ . Επομένως στη γραμμική παρεμβολή αντικαθιστούμε τη συνάρτηση του πίνακα τιμών, με μία ευθεία (ένα πρωτοβάθμιο πολυώνυμο).

Έχουμε λοιπόν:

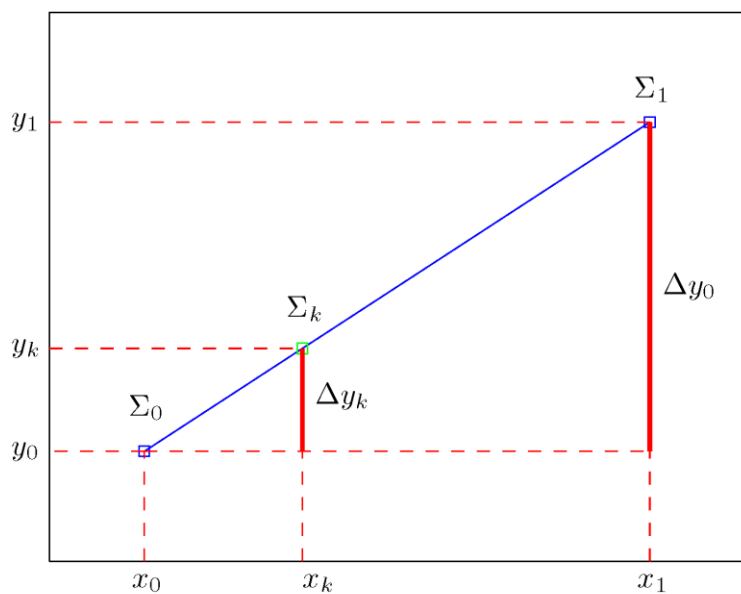
$$\text{Για } \Delta x = x_1 - x_0 \text{ έχουμε } \Delta y = \Delta y_0 = y_1 - y_0$$

$$\text{Για } \Delta x = x_k - x_0 \text{ έχουμε } \Delta y = \Delta y_k = y_k - y_0 = ?$$

$$\Delta y_k = \Delta y_0 \frac{x_k - x_0}{x_1 - x_0} = \Delta y_0 \frac{x_k - x_0}{h} = \Delta y_0 \cdot k$$

οπότε:

$$y_k = y_0 + k \cdot \Delta y_0$$



**Σχήμα 6.3** Η μέθοδος της γραμμικής παρεμβολής.

**Παράδειγμα:**

Η συνάρτηση  $f$  ορίζεται με τον παρακάτω πίνακα:

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	0				
		9950			
0.1	0.09950		-299		
		9651		-293	
0.2	0.19601		-592		8
		9059		-285	
0.3	0.28660		-877		17
		8182		-268	
0.4	0.36842		-1145		17
		7037		-251	
0.5	0.43879		-1396		25
		5641		-226	
0.6	0.4952		-1622		
		4019			
0.7	0.53539				

όπου οι διαφορές έχουν γραφεί σαν ακέραιες για ευκολία (έχουν πολλαπλασιαστεί με το  $10^5$ ). Επομένως, η διαφορά  $-294$  είναι στην πραγματικότητα  $-294 \times 10^{-5} = -0,00294$ .

1. Τι βαθμού είναι το πολυώνυμο με το οποίο θα παρεμβάλετε ανάμεσα στις τιμές του πίνακα;
2. Να υπολογίσετε την τιμή  $f(0.43)$  χρησιμοποιώντας την πλήρη παρεμβολή.
3. Να υπολογίσετε την τιμή  $f(0.43)$  χρησιμοποιώντας τη γραμμική παρεμβολή.
4. Εάν η συνάρτηση του πίνακα είναι η  $f(x) = x \cos(x)$ , να υπολογίσετε το σχετικό σφάλμα των δύο προσεγγιστικών υπολογισμών του  $f(0.43)$ .

### Λύση:

1) Στο ερώτημα αυτό υπάρχουν δύο απαντήσεις:

- Εάν γράψουμε τις διαφορές τρίτης τάξης με τρία δεκαδικά ψηφία διαπιστώνουμε πως είναι σχεδόν ίσες (κυμαίνονται από  $-0,003$  έως το  $-0,002$ ). Εάν τις θεωρήσουμε λοιπόν σταθερές, είναι σαν να δεχόμαστε πως η εν λόγω συνάρτηση προσεγγίζεται από ένα τριτοβάθμιο πολυώνυμο (μια και το τριτοβάθμιο πολυώνυμο παρουσιάζει σταθερές τις διαφορές τρίτης τάξης).
- Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε σαν σταθερές τις διαφορές 4ης τάξης, των οποίων οι τιμές (με 4 δεκαδικά) κυμαίνονται από το  $0,0001$  έως το  $0,0003$ , οπότε θα υιοθετήσουμε τεταρτοβάθμιο πολυώνυμο για να παρεμβάλουμε στο εσωτερικό του πίνακα.

2) Επιλέγουμε να παρεμβάλουμε με τη βοήθεια του τριτοβάθμιου συμπτωτικού πολυωνύμου, οπότε θα χρειασθούμε 4 σημεία, το οποία θα είναι διαδοχικά και θα έχουν στο κέντρο τους το σημείο παρεμβολής (0.43). Προφανώς, θα επιλέξουμε δύο σημεία αριστερά και δύο δεξιά του σημείου παρεμβολής.

$$x_0 = 0.3, \quad x_1 = 0.4, \quad x_2 = 0.5 \quad \text{και} \quad x_3 = 0.6$$

οπότε

$$k = \frac{x_k - x_0}{h} = \frac{0.43 - 0.3}{0.1} = \frac{0.13}{0.1} = 1.3$$

και

$$\begin{aligned} y_k &= p(k=1.3) = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0 = \\ &= 0.2866 + 1.3 \cdot 0.08182 + \frac{1.3 \cdot 0.3}{2!}(-0.01146) + \frac{1.3 \cdot 0.3 \cdot (-0.7)}{3!}(-0.0025) = \\ &= 0.390845 \end{aligned}$$

3) Για τη γραμμική παρεμβολή έχουμε:

$$x_0 = 0.4 \quad \text{και} \quad x_1 = 0.5$$

οπότε

$$k = \frac{x_k - x_0}{h} = \frac{0.43 - 0.4}{0.1} = \frac{0.03}{0.1} = 0.3$$

Άρα:

$$\begin{aligned}y_k &= p(k=1.3) = y_0 + k\Delta y_0 = \\&= 0.36842 + 0.3 \cdot 0.07037 = \\&= 0.389531\end{aligned}$$

4) Η ακριβής τιμή δίνεται από τη σχέση:

$$y_k = f(0.43) = [x \cos x]_{x=0.43} = 0.390855$$

οπότε το σχετικό σφάλμα των προηγούμενων υπολογισμών για την πλήρη παρεμβολή:

$$\sigma_{\sigma\chi} = \frac{0.390855 - 0.390845}{0.390855} = 0.0000263 = 0.00263\%$$

και για τη γραμμική:

$$\sigma_{\sigma\chi} = \frac{0.390855 - 0.389531}{0.390855} = 0.0033881 = 0.33881\%$$

Είναι φανερό πως η γραμμική παρεμβολή είναι πράξη λιγότερο ακριβής απ' ό τι η πλήρης παρεμβολή. Ήταν κάτι που το περιμέναμε, μια και δεν είναι δυνατό ένα ευθύγραμμο τμήμα να ακολουθεί την καμπύλη μιας συνάρτησης με την ίδια ακρίβεια που την ακολουθεί η καμπύλη ενός τριτοβάθμιου πολυωνύμου.



## 6.6. Η παρεμβολή στο Excel.

Οι υπολογισμοί που απαιτούνται για την παρεμβολή, προγραμματίζονται ιδιαίτερα εύκολα με το Excel. Ας υποθέσουμε λοιπόν πως έχουμε τον πίνακα τιμών μιας συνάρτησης  $f$ , στο εσωτερικό του οποίου θέλουμε να παρεμβάλλουμε, σε κάποιο σημείο  $x_k$ . Στο παράδειγμα που ακολουθεί παρουσιάζεται ένα φύλλο του Excel, όπου:

- Υπάρχουν 6 τιμές από τον πίνακα τιμών της συνάρτησης  $f$  (προφανώς περιέχονται σημεία γύρω από το σημείο παρεμβολής).
- Υπολογίζεται ο πίνακας διαφορών της συνάρτησης  $f$ , ο οποίος φθάνει μέχρι και τη διαφορά πέμπτης τάξης.
- Δίνεται το σημείο παρεμβολής  $x_k$  (στο παράδειγμα το 0.485).
- Υπολογίζεται ο δείκτης  $k$  του σημείου παρεμβολής ( $k=2.425$ ).
- Υπολογίζεται η τιμή  $f(x_k)$ , με τη βοήθεια του πολυωνύμου του Newton, πέμπτου βαθμού (αφού έχουμε 6 σημεία).

Έχοντας το παρακάτω φύλλο σε κάποιο αρχείο του Excel, μπορούμε να παρεμβάλλουμε σε οποιοδήποτε άλλο πίνακα. Απλώς, πληκτρολογούμε τις νέες τιμές του πίνακα, καθώς και το νέο  $x_k$ . Αυτόματα, στη θέση του  $y_k$  εμφανίζεται το νέο αποτέλεσμα.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Παρεμβολή					
2								
3		Πίνακας Διαφορών της πινακοποιημένης συνάρτησης						
4								
5	x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	
6	f(x)	1	0.960789	0.852144	0.697676	0.527292	0.367879	
7	$\Delta y$	-0.03921	-0.10865	-0.15447	-0.17038	-0.15941		
8	$\Delta^2 y$	-0.06944	-0.04582	-0.01592	0.010971			
9	$\Delta^3 y$	0.023613	0.029905	0.026887				
10	$\Delta^4 y$	0.006292	-0.00302					
11	$\Delta^5 y$	-0.00931						
12								
13			$X_k =$	0.485	$k =$	2.425		
14			$Y_k =$	0.790399				
15								

## 6.7. Διπλή γραμμική παρεμβολή

Έστω η συνάρτηση δύο μεταβλητών  $z = g(x, y)$ , η οποία ορίζεται με έναν πίνακα τιμών, σαν τον παρακάτω.

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	...	$x_v$
$y_0$	$g(x_0, y_0)$	$g(x_1, y_0)$	$g(x_2, y_0)$	...	$g(x_v, y_0)$
$y_1$	$g(x_0, y_1)$	$g(x_1, y_1)$	$g(x_2, y_1)$	...	$g(x_v, y_1)$
$y_2$	$g(x_0, y_2)$	$g(x_1, y_2)$	$g(x_2, y_2)$	...	$g(x_v, y_2)$
...	...	...	...	...	...
$y_v$	$g(x_0, y_v)$	$g(x_1, y_v)$	$g(x_2, y_v)$	...	$g(x_v, y_v)$

Η διπλή γραμμική παρεμβολή χρησιμοποιείται για να παρεμβάλουμε ανάμεσα στις τιμές του πίνακα αυτού. Ας υποθέσουμε πως ζητούμε την τιμή της  $g$  στο σημείο  $(x_k, y_\lambda)$ .



Αρχικά επιλέγουμε την τετράδα των σημείων του πίνακα που βρίσκονται πλησιέστερα στο σημείο παρεμβολής. Προφανώς, από τις τιμές  $x_i$  του πίνακα, θα διαλέξουμε σαν  $x_0$  και  $x_1$ , το προηγούμενο και το επόμενο σημείο του  $x_k$ , ενώ σαν  $y_0$  και  $y_1$ , το προηγούμενο και το επόμενο σημείο του  $y_\lambda$ .

	$x_0$	$x_1$
$y_0$	$g(x_0, y_0)$	$g(x_1, y_0)$
$y_1$	$g(x_0, y_1)$	$g(x_1, y_1)$

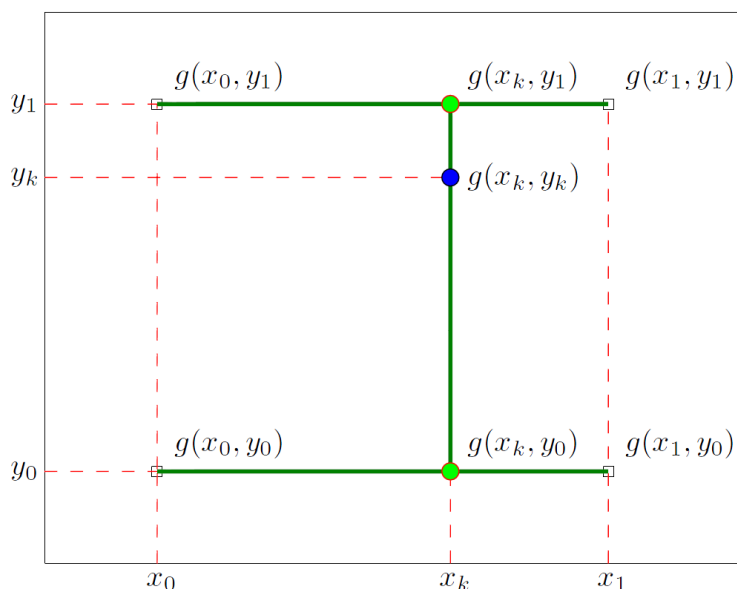
Ο υπολογισμός του  $g(x_k, y_\lambda)$  γίνεται με τη βοήθεια τριών γραμμικών παρεμβολών, δύο ως προς  $x$  και μιας ως προς  $y$  (βλέπε και Σχήμα 6.4), ή δύο ως προς  $y$  και μιας ως προς  $x$ .

Αρχικά υπολογίζουμε την τιμή των δεικτών του σημείου παρεμβολής:

$$k = \frac{x_k - x_0}{h_x}$$

$$\lambda = \frac{y_\lambda - y_0}{h_y}$$

όπου  $h_x$  και  $h_y$  είναι το βήμα του πίνακα στο  $x$  και στο  $y$  αντίστοιχα (δηλαδή  $h_x = x_1 - x_0$  και  $h_y = y_1 - y_0$ ).



**Σχήμα 6.4** Η μέθοδος της διπλής γραμμικής παρεμβολής.

Εκτελώντας δύο παρεμβολές ως προς  $x$  και μία ως προς  $y$ , καταλήγουμε εύκολα στις σχέσεις:

$$g(x_k, y_0) = g(x_0, y_0) + k[g(x_1, y_0) - g(x_0, y_0)]$$

$$g(x_k, y_1) = g(x_0, y_1) + k[g(x_1, y_1) - g(x_0, y_1)]$$

$$g(x_k, y_\lambda) = g(x_k, y_0) + \lambda[g(x_k, y_1) - g(x_k, y_0)]$$

### Παράδειγμα.

Η συνάρτηση  $z = f(x, y)$  δίνεται από τον παρακάτω πίνακα.

$x \rightarrow$ $y \downarrow$	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1
2	5.3069	5.4115	5.5245	5.6445	5.7704	5.3069
2.2	6.2515	6.3762	6.5092	6.6492	6.7951	6.2515
2.4	7.2845	7.4292	7.5822	7.7422	7.9081	7.2845
2.6	8.4045	8.5692	8.7422	8.9221	9.1080	8.4045
2.8	9.6104	9.7951	9.9881	10.1880	10.3939	9.6104

1. Να υπολογισθεί η τιμή της  $f(1.13, 2.44)$ .
2. Με δεδομένο πως η έκφραση της συνάρτησης του πίνακα είναι  $f(x, y) = xy + y^2 - \ln(xy)$  να υπολογισθεί το σχετικό σφάλμα της παρεμβολής.

### Λύση.

1. Ξεκινούμε διαλέγοντας την τετράδα των σημείων πάνω στα οποία θα στηριχθεί η διπλή παρεμβολή:

	$x_0=1.1$	$x_1=1.2$
$y_0=2.4$	7.4292	7.5822
$y_1=2.6$	8.5692	8.7422

Υπολογίζουμε τους δείκτες  $k$  και  $\lambda$ :

$$k = \frac{x_k - x_0}{h_x} = \frac{1.13 - 1.1}{0.1} = 0.3$$

$$\lambda = \frac{y_\lambda - y_0}{h_y} = \frac{2.44 - 2.4}{0.2} = 0.2$$

και στη συνέχεια εφαρμόζουμε τους τύπους της διπλής παρεμβολής:

$$f(x_k, y_0) = f(x_0, y_0) + k[f(x_1, y_0) - f(x_0, y_0)] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} f(1.13, 2.4) &= f(1.1, 2.4) + 0.3[f(1.2, 2.4) - f(1.1, 2.4)] \Rightarrow \\ &= 7.4292 + 0.3(7.5822 - 7.4292) = 7.4752 \end{aligned}$$

$$f(x_k, y_1) = f(x_0, y_1) + k[f(x_1, y_1) - f(x_0, y_1)]$$

$$f(1.13, 2.6) = f(1.1, 2.6) + 0.3[f(1.2, 2.6) - f(1.1, 2.6)] \Rightarrow \\ = 8.5692 + 0.3(8.7422 - 8.5692) = 8.6211$$

$$f(x_k, y_\lambda) = f(x_k, y_0) + \lambda[f(x_k, y_1) - f(x_k, y_0)]$$

$$f(1.13, 2.44) = f(1.13, 2.4) + 0.3[f(1.13, 2.6) - f(1.13, 2.4)] \Rightarrow \\ = 7.4752 + 0.2(8.6211 - 7.4752) = 7.7044$$

Καταλήγουμε λοιπόν, με τη διπλή γραμμική παρεμβολή, ότι η τιμή της  $f(1.13, 2.44) = 7.7044$

2. Η ακριβής τιμή της  $f$ :

$$f(1.13, 2.44) = [xy + y^2 - \ln(xy)]_{x=1.13, y=2.44} = 7.6966$$

οπότε το σχετικό σφάλμα της παρεμβολής είναι ίσο με:

$$\sigma_{\sigma\lambda} = \left| \frac{7.6966 - 7.7044}{7.6966} \right| = 0.00062 = 0.062\%$$



## 6.8. Παρεμβολή σε πίνακα μη ισαπεχόντων ορισμάτων.

Συχνά αναγκάζομαστε να παρεμβάλλουμε σε πίνακες με μεταβλητό βήμα (όπου δηλαδή το βήμα  $h$  δεν είναι σταθερό). Στην περίπτωση αυτή είναι δυνατή η γραμμική παρεμβολή, όπως τη γνωρίσαμε στην περίπτωση των ισαπεχόντων ορισμάτων! Πολλές φορές όμως η απαιτούμενη ακρίβεια της παρεμβολής μας επιβάλλει τη χρήση πολυωνύμων με βαθμό μεγαλύτερο του 1 (ακρίβεια βέβαια που δεν είναι σίγουρο πως θα επιτευχθεί). Την περίπτωση αυτή καλύπτει η μέθοδος του Lagrange και η μέθοδος του Newton με διαιρεμένες διαφορές.

Έστω ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας συνάρτησης  $f(x)$ , όπου τα ορίσματα  $x_j$  δεν ισαπέχουν:

<b>x</b>	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	...	...	$x_{v-1}$	$x_v$
<b>y</b>	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	...	...	$y_{v-1}$	$y_v$

Τα  $v+1$  σημεία του πίνακα ορίζουν, στη γενική περίπτωση, μία πολυωνυμική συνάρτηση  $v$ -οστού βαθμού.

### 6.8.1 Μέθοδος Lagrange

Το συμπτωτικό αυτό πολύωνυμο δίνεται από την επόμενη σχέση του Lagrange:

$$p_L(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2 + \dots + L_{v-1}(x)y_{v-1} + L_v(x)y_v = \\ = \sum_{j=0}^v L_j(x)y_j$$

όπου οι  $v+1$  συντελεστές  $L_j(x)$  είναι πολύωνυμα  $v$ -οστού βαθμού, με μεταβλητή το  $x$ . Το καθένα από αυτά αντιστοιχεί στην τιμή  $x_j$ , που δίνει την τιμή  $y_j$  του πίνακα. Δηλαδή το  $L_0(x)$ , που είναι συντελεστής του  $y_0$ , αντιστοιχεί στο  $x_0$  που είναι το όρισμα της τιμής  $y_0$ . Οι συντελεστές  $L_j(x)$  ορίζονται από τη γενική σχέση:

$$L_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_{v-1})(x-x_v)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_{v-1})(x_j-x_v)} =$$

$$= \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^v \frac{x-x_i}{x_j-x_i}$$

όπου με το σύμβολο  $\prod_{i=1}^n A_i$  εννοούμε το γινόμενο των όρων  $A_i$  (π.χ.  $\prod_{i=1}^4 A_i = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$ )

### Παρατηρήσεις:

**1<sup>η</sup>)** Ο συντελεστής  $L_j(x)$  που πολλαπλασιάζει το  $y_j$  και αντιστοιχεί στο  $x_j$  είναι ένα κλάσμα όπου ο αριθμητής είναι το γινόμενο των  $(v-1)$  διαφορών της μεταβλητής  $x$ , με το κάθε  $x_i$  του πίνακα τιμών, εκτός από το  $x_j$  ( $i \neq j$ ). Όμοια, ο παρονομαστής είναι το γινόμενο των  $(v-1)$  διαφορών της τιμής  $x_j$  με το κάθε  $x_i$  του πίνακα τιμών, εκτός (και πάλι) από το  $x_j$  (αλλιώς θα μηδενίζονταν ο παρονομαστής). Σαν παράδειγμα ας γράψουμε το  $L_3(x)$ :

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\dots(x-x_{v-1})(x-x_v)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\dots(x_3-x_{v-1})(x_3-x_v)}$$

**2<sup>η</sup>)** Εάν οι τιμές  $y_j$  του πίνακα τιμών προέρχονται από μία πολωνυμική συνάρτηση βαθμού  $\mu$  μικρότερου του  $v$  ( $\mu < v$ ), τότε, παρ' όλο που οι συντελεστές  $L_j(x)$  είναι  $v$ -οστού βαθμού, στην τελική έκφραση του πολωνύμου θα γίνουν οι ανάλογες απλοποιήσεις, έτσι ώστε να καταλήξει σε ένα πολυώνυμο  $\mu$ -ου βαθμού.

**3<sup>η</sup>)** Θα θέλαμε να δείξουμε πως, πράγματι, το πολυώνυμο του Lagrange είναι συμπτωτικό. Θα το δείξουμε με ένα παράδειγμα. Έχουμε τη συνάρτηση  $y(x)$  που δίνεται με τον επόμενο πίνακα τιμών, όπου τα ορίσματα δεν ισαπέχουν υποχρεωτικά (προφανώς το πολυώνυμο Lagrange είναι το συμπτωτικό, ακόμη και στην ειδική περίπτωση των ισαπεχόντων ορισμάτων). Θα πρέπει να δείξουμε πως είναι το συμπτωτικό, δηλαδή πως ισχύουν οι ισότητες  $p_L(x_i) = y_i$ .

<b>x</b>	$x_0$	$x_1$	$x_2$
<b>y</b>	$y_0$	$y_1$	$y_2$

Για τον πίνακα αυτό των τριών σημείων το πολυώνυμο Lagrange είναι το παρακάτω:

$$p_L(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2 = \sum_{j=0}^2 L_j(x)y_j =$$

$$= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

Τώρα θα δείξουμε πως ισχύει ότι  $p_L(x_1) = y_1$ . Πράγματι:

$$p_L(x_1) = \frac{(x_1 - x_1)(x_1 - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x_1 - x_0)(x_1 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2 =$$

$$= 0 + 1y_1 + 0 = y_1$$

Παρόμοια δείχνουμε πως ισχύουν και οι ισότητες:

$$p_L(x_0) = y_0 \text{ και } p_L(x_2) = y_2$$

οπότε γίνεται φανερό πως πρόκειται για το συμπτωτικό πολυώνυμο.

### Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>:

Δίνεται ο επόμενος πίνακας τιμών μιας συνάρτησης  $f(x)$ .

$x$	-1	0	2	5
$y$	5	1	-1	11

Να υπολογισθεί το πολυώνυμο Lagrange που αντιστοιχεί στον πίνακα αυτό.

### Λύση:

Αρχικά υπολογίζουμε τους συντελεστές  $L_j(x)$ :

$$L_{-1}(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(-1-0)(-1-2)(-1-5)} = \frac{x^3 - 7x^2 + 10x}{-18}$$

$$L_0(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-5)}{(0+1)(0-2)(0-5)} = \frac{x^3 - 6x^2 + 3x + 10}{10}$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-5)}{(2+1)(2-0)(2-5)} = \frac{x^3 - 4x^2 - 5x}{-18}$$

$$L_5(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(5+1)(5-0)(5-2)} = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{90}$$

Αντικαθιστώντας τους συντελεστές αυτούς στο πολυώνυμο του Lagrange έχουμε:

$$p_L(x) = 5 \cdot L_{-1} + L_0 - 1 \cdot L_2 + 11 \cdot L_5 =$$

$$= 5 \frac{x^3 - 7x^2 + 10x}{-18} + \frac{x^3 - 6x^2 + 3x + 10}{10} - \frac{x^3 - 4x^2 - 5x}{-18} + 11 \frac{x^3 - x^2 - 2x}{90} =$$

$$= \frac{5(-5)(x^3 - 7x^2 + 10x) + 9(x^3 - 6x^2 + 3x + 10) + 5(x^3 - 4x^2 - 5x) + 11(x^3 - x^2 - 2x)}{90} =$$

$$= \frac{90x^2 - 270x + 90}{90} = x^2 - 3x + 1$$

Εδώ βλέπουμε την επαλήθευση της 2<sup>ης</sup> παρατήρησης. Ενώ περιμέναμε ένα τριτοβάθμιο πολυώνυμο, τελικά αποδείχθηκε πως η συνάρτηση της οποίας οι τιμές αναγράφονταν στον πίνακα τιμών ήταν πολυωνμική 2<sup>ου</sup> βαθμού, παρ' όλον ότι τα πολυώνυμα  $L_j(x)$  ήταν τρίτου βαθμού.



## Παράδειγμα 2<sup>ο</sup>:

Δίνεται ο επόμενος πίνακας τιμών μιας συνάρτησης  $f(x)$ .

$x$	0	1	4	9
$y$	0	1	2	3

1. Να υπολογισθεί το πολυώνυμο Lagrange που αντιστοιχεί στον πίνακα αυτό.
2. Με γραμμική παρεμβολή να εκτιμηθεί η τιμή  $f(5)$ .
3. Με το πολυώνυμο του Lagrange να εκτιμηθεί η τιμή  $f(5)$ .
4. Εάν  $f(x) = \sqrt{x}$ , να υπολογισθεί η ακριβής τιμή, καθώς και το σχετικό σφάλμα των δύο προσεγγιστικών τιμών.
5. Να γίνει η γραφική παράσταση που να αιτιολογεί τα προηγούμενα αποτελέσματα.

## Λύση:

### 1. Πολυώνυμο Lagrange.

Αρχικά υπολογίζουμε τους συντελεστές  $L_j(x)$ :

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-4)(x-9)}{(0-1)(0-4)(0-9)} = \frac{x^3 - 14x^2 + 49x - 36}{-36}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-4)(x-9)}{(1-0)(1-4)(1-9)} = \frac{x^3 - 13x^2 + 36x}{24}$$

$$L_4(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-9)}{(4-0)(4-1)(4-9)} = \frac{x^3 - 10x^2 + 9x}{-60}$$

$$L_9(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(9-0)(9-1)(9-4)} = \frac{x^3 - 5x^2 + 4x}{360}$$

Αντικαθιστώντας τους συντελεστές αυτούς στο πολυώνυμο του Lagrange έχουμε:

$$\begin{aligned}
 p_L(x) &= 0 \cdot L_0 + L_1 + 2 \cdot L_4 + 3 \cdot L_9 = \\
 &= 0 \cdot \frac{x^3 - 14x^2 + 49x - 36}{-36} + \frac{x^3 - 13x^2 + 36x}{24} + 2 \cdot \frac{x^3 - 10x^2 + 9x}{-60} + 3 \cdot \frac{x^3 - 5x^2 + 4x}{360} = \\
 &= \frac{15(x^3 - 13x^2 + 36x) - 12(x^3 - 10x^2 + 9x) + 3(x^3 - 5x^2 + 4x)}{360} = \\
 &= \frac{6x^3 - 90x^2 + 444x}{360} = \frac{1}{60}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{37}{30}x
 \end{aligned}$$

## 2. Γραμμική παρεμβολή.

Εφόσον ζητούμε την τιμή  $f(5)$ , θα επιλέξουμε τα δύο σημεία του πίνακα που βρίσκονται εκατέρωθεν του σημείου παρεμβολής: το  $(4,2)$  και το  $(9,3)$ . Έχουμε λοιπόν:

$$x_0 = 4, \quad x_1 = 9, \quad h = 5 \quad \text{και} \quad x_k = 5$$

οπότε

$$k = \frac{x_k - x_0}{h} = \frac{5 - 4}{5} = \frac{1}{5} = 0.2$$

Άρα

$$y(5) = p_L(k=0.2) = [y_0 + k\Delta y_0]_{k=0.2} = 2 + 0.2 \cdot 1 = 2.2$$

## 3. Παρεμβολή με το πολυώνυμο του Lagrange.

$$y(5) = p_L(x=5) = \left[ \frac{1}{60}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{37}{30}x \right]_{x=5} = 2$$

## 4. Σύγκριση των αποτελεσμάτων.

Με δεδομένο πως η ακριβής τιμή της συνάρτησης  $f$  είναι η:

$$y(5) = f(5) = \sqrt{5} = 2.23607$$

έχουμε τα σχετικά σφάλματα:

α) Γραμμική παρεμβολή:

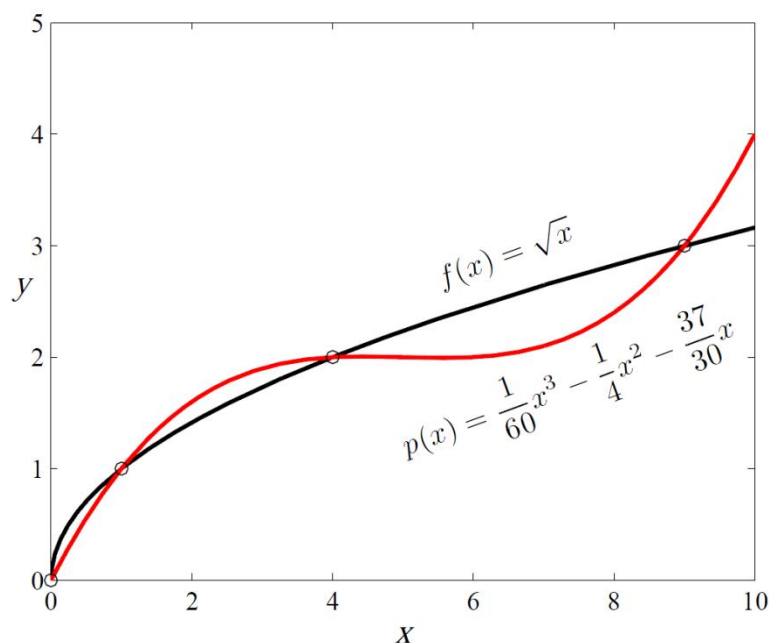
$$\sigma_{\sigma_{\text{χετ.}}}(\%) = 100 \frac{(y(\text{ακριβές}) - y(\text{προσεγγιστικό}))}{y(\text{ακριβές})} = 100 \frac{(2.23607 - 2.2)}{2.23607} = 1.613\%$$

β) Παρεμβολή με το πολυώνυμο Lagrange:

$$\sigma_{\sigma_{\text{χετ.}}}(\%) = 100 \frac{(y(\text{ακριβές}) - y(\text{προσεγγιστικό}))}{y(\text{ακριβές})} = 100 \frac{(2.23607 - 2)}{2.23607} = 10.557\%$$

Παρατηρούμε με σχετική έκπληξη πως η τριτοβάθμια παρεμβολή πέτυχε πολύ χειρότερα αποτελέσματα από τη γραμμική (πρωτοβάθμια)! Το γεγονός αυτό θα γίνει πιο εμφανές με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων.

## 5. Γραφική παράσταση.



**Σχήμα 6.5** Γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x)$  και του συμπτωτικού πολυωνύμου. Τα σημεία σύμπτωσης έχουν σημειωθεί με μικρούς κύκλους.

Από τη γραφική παράσταση (Σχήμα 6.5) του τριτοβάθμιου συμπτωτικού πολυωνύμου γίνεται εμφανές πως το αποτέλεσμα της παρεμβολής μέσω αυτού έχει μεγάλο σφάλμα, πολύ μεγαλύτερο της γραμμικής παρεμβολής! Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα: *Η παρεμβολή με πολυώνυμα μεγάλου βαθμού κρύβει κινδύνους, όταν το βήμα του πίνακα είναι ιδιαίτερα μεγάλο, ιδιαίτερα στην περίπτωση όπου, στο διάστημα όπου επιχειρείται η παρεμβολή, η «καμπυλότητα» της συνάρτησης του πίνακα μεταβάλλεται έντονα.* Για τον λόγο αυτό, κάποιος που δημιουργεί έναν πίνακα τιμών φροντίζει οι αποστάσεις ανάμεσα στα ορίσματα του πίνακα να έχουν τέτοιες αποστάσεις μεταξύ τους, που να επιτρέπουν ικανοποιητική ακρίβεια σε παρεμβολές.



### 6.8.2 Μέθοδος Newton με διαιρεμένες διαφορές

Η μέθοδος Newton με διαιρεμένες διαφορές για την εύρεση του συμπτωτικού πολυωνύμου στηρίζεται στη δημιουργία ενός πίνακα πεπερασμένων διαφορών, όπως αυτός που είδαμε στην παράγραφο 6.3, με τη διαφορά ότι στην περίπτωση αυτή οι διαφορές στα  $y$  διαιρούνται με τις αντίστοιχες διαφορές στα  $x$ .

Έτσι οι διαφορές του πρώτου επιπέδου  $\Delta y$  που είναι οι διαφορές δύο διαδοχικών  $y$  διαιρούνται με τις διαφορές των δύο αντίστοιχων διαδοχικών  $x$ . Έστω, δηλαδή,  $\Delta y$  η διαφορά του  $y_i$  και του  $y_{i+1}$ ,  $\Delta y = y_{i+1} - y_i$ , η διαφορά αυτή θα διαιρεθεί με την αντίστοιχη των  $x_i$  και  $x_{i+1}$ ,  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ . Στο δεύτερο επίπεδο έχουμε τη διαφορά δύο διαδοχικών διαφορών πρώτου επιπέδου που είναι οι διαφορές των  $y_{i+1} - y_i$  και των  $y_{i+2} - y_{i+1}$ . Άρα η διαφορά θα διαιρεθεί με τη διαφορά  $x_{i+2} - x_i$ . Αντίστοιχα οι διαφορές του τρίτου επιπέδου θα διαιρεθούν με τη διαφορά των  $x_{i+3} - x_i$  κ.ο.κ.

Ένας καλός τρόπος για να βρίσκουμε εύκολα με ποια διαφορά των  $x$  θα διαιρέσουμε κάθε επίπεδο είναι: Για το πρώτο επίπεδο παίρνουμε τα  $x$  ανά δύο και βρίσκουμε τις διαφορές του, δηλαδή  $x_1 - x_0$ ,  $x_2 - x_1$ ,  $x_3 - x_2$  κ.λ.π. Για το δεύτερο επίπεδο παίρνουμε τα  $x$  ανά τρία και βρίσκουμε τη διαφορά του τελευταίου (του τρίτου δηλαδή) από το πρώτο, δηλαδή  $x_2 - x_0$ ,  $x_3 - x_1$ ,  $x_4 - x_2$  κ.λ.π. Για το τρίτο επίπεδο παίρνουμε τα  $x$  ανά



τέσσερα και βρίσκουμε τη διαφορά του τελευταίου από το πρώτο, δηλαδή  $x_3 - x_0$ ,  $x_4 - x_1$ ,  $x_5 - x_2$  κ.λ.π. Αντίστοιχα βρίσκουμε τις διαφορές και για τα υπόλοιπα επίπεδα.

Έτσι δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα (στον οποίο υποθέσαμε ότι έχουμε πέντε ζεύγη  $x$  και  $y$ ).

$x$	$y$	$Dy$	$D^2y$	$D^3y$	$D^4y$
$x_0$	$y_0$	$Dy_0=(y_1-y_0)/(x_1-x_0)$			
$x_1$	$y_1$	$Dy_1=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$	$D^2y_0=(Dy_1-Dy_0)/(x_2-x_0)$	$D^3y_0=(D^2y_1-D^2y_0)/(x_3-x_0)$	
$x_2$	$y_2$	$Dy_2=(y_3-y_2)/(x_3-x_2)$	$D^2y_1=(Dy_2-Dy_1)/(x_3-x_1)$	$D^3y_1=(D^2y_2-D^2y_1)/(x_4-x_1)$	$D^4y_0=(D^3y_1-D^3y_0)/(x_4-x_0)$
$x_3$	$y_3$	$Dy_3=(y_4-y_3)/(x_4-x_3)$	$D^2y_2=(Dy_3-Dy_2)/(x_4-x_2)$		
$x_4$	$y_4$				

Αφού υπολογίσουμε τις διαιρεμένες διαφορές και κατασκευάσουμε τον παραπάνω πίνακα, το πολώνυμο Newton υπολογίζεται από την εξίσωση

$$p_N(x) = y_0 + Dy_0(x-x_0) + D^2y_0(x-x_0)(x-x_1) + D^3y_0(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + D^4y_0(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

### 6.8.3 Υλοποίηση μεθόδων με το MATLAB

#### Μέθοδος Lagrange

Η συνάρτηση `sp_Lagrange`, που ακολουθεί, έχει παραμέτρους

- `xp` = τον πίνακα τιμών του  $x$
- `yp` = τον πίνακα τιμών του  $y$

Η έξοδος της

- `p` = το πολώνυμο παρεμβολής σε συμβολική μορφή

Η μέθοδος χρησιμοποιεί το συμβολικό πακέτο του MATLAB για τον υπολογισμό των συντελεστών Lagrange και του συμπτωτικού πολωνύμου.

```
function p=sp_Lagrange(xp,yp)
N=length(xp);
M=length(yp);
```

```

if N~=M
    error('myApp:argChk', 'Οι πίνακες x και y δεν έχουν ίδια
διάσταση')
end

syms x

for i=1:N
    L(i)=1+0*x;
    for j=1:N
        if i~=j
            L(i)=L(i)*(x-xp(j))/(xp(i)-xp(j));
        end
    end
    disp(sprintf('L(%d) = %s',i-1,char(expand(L(i)))))
end

p=0*x;
for i=1:N
    p=p+L(i)*yp(i);
end
p=expand(p);

```

### Μέθοδος Newton με διαιρεμένες διαφορές

Η συνάρτηση `sp_Newton`, που ακολουθεί, έχει παραμέτρους

- `xp` = τον πίνακα τιμών του  $x$
- `yp` = τον πίνακα τιμών του  $y$

Η έξοδος της

- `p` = το πολυώνυμο παρεμβολής σε συμβολική μορφή

Η μέθοδος χρησιμοποιεί το συμβολικό πακέτο του MATLAB για τον υπολογισμό του συμπτωτικού πολυωνύμου.

```

function p=sp_Newton(xp,yp)
N=length(xp);
M=length(yp);
if N~=M
    error('myApp:argChk', 'Οι πίνακες x και y δεν έχουν ίδια
διάσταση')

```

```

end

syms x

for i=1:N
    dy(i,1)=yp(i);
end

for j=2:N
    for i=1:N-j+1
        dy(i,j)=(dy(i+1,j-1)-dy(i,j-1))/(xp(i+j-1)-xp(i));
    end
end

L=1;
p=dy(1,1);

for j=2:N
    L=L*(x-xp(j-1));
    p=p+dy(1,j)*L;
end
p=expand(p);

```

## Κριτήρια αξιολόγησης

### Κριτήριο αξιολόγησης 1

Η συνάρτηση  $f$  ορίζεται με τον παρακάτω πίνακα:

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
5	8.04719	0.65851			
5.25	8.70570	0.67041	0.01190	-0.00052	
5.5	9.37611	0.68179	0.01138	-0.00051	0.00001
5.75	10.05790	0.69266	0.01087	-0.00046	0.00005
6	10.75056	0.70307	0.01041	-0.00040	0.00006
6.25	11.45363	0.71308	0.01001	-0.00039	0.00001
6.5	12.16671	0.72270	0.00962		
6.75	12.88941				

1. Τι βαθμού είναι το πολυώνυμο με το οποίο θα παρεμβάλετε ανάμεσα στις τιμές του πίνακα;
2. Να υπολογίσετε την τιμή  $f(5.68)$  χρησιμοποιώντας την πλήρη παρεμβολή.
3. Να υπολογίσετε την τιμή  $f(5.68)$  χρησιμοποιώντας τη γραμμική παρεμβολή.
4. Εάν η συνάρτηση του πίνακα είναι η  $f(x) = x \ln x$ , να υπολογίσετε το σχετικό σφάλμα των δύο προσεγγιστικών υπολογισμών του  $f(5.68)$ .

## Κριτήριο αξιολόγησης 2

Δίνεται ο επόμενος πίνακας τιμών μιας συνάρτησης  $f$ .

$x$	0	1	2	5
$y$	0	1	1	1

1. Να υπολογισθεί το πολυώνυμο Lagrange που αντιστοιχεί στον πίνακα αυτό.
2. Με γραμμική παρεμβολή να εκτιμηθεί η τιμή  $f(4)$ .
3. Με το πολυώνυμο του Lagrange να εκτιμηθεί η τιμή  $f(4)$ .
4. Να γίνει η γραφική παράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής. Πιστεύετε πως θα δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα κατά την παρεμβολή;

## Κριτήριο αξιολόγησης 3

Να λυθεί το προηγούμενο κριτήριο αξιολόγησης με τη μέθοδο Newton με διαιρεμένες διαφορές. Καταλήγουμε στο ίδιο πολυώνυμο ;

## Κριτήριο αξιολόγησης 4

Να βρεθεί ένα συμπτωτικό πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, που, για  $x = 0, 1, 2$ , να παίρνει τις ίδιες τιμές με την  $y(x) = x^3$ .

## Κριτήριο αξιολόγησης 5

Στην περίπτωση που έχουμε πίνακα ισαπεχόντων ορισμάτων, ξεκινώντας από τον τύπο του συμπτωτικού πολυωνύμου του Newton με διαιρεμένες διαφορές (παράγραφος 6.8.2) καταλήξτε στον τύπο του συμπτωτικού πολυωνύμου του Newton (παράγραφος 6.4) .

## Κεφάλαιο 7. Αριθμητική παραγωγή.

### Σύνοψη

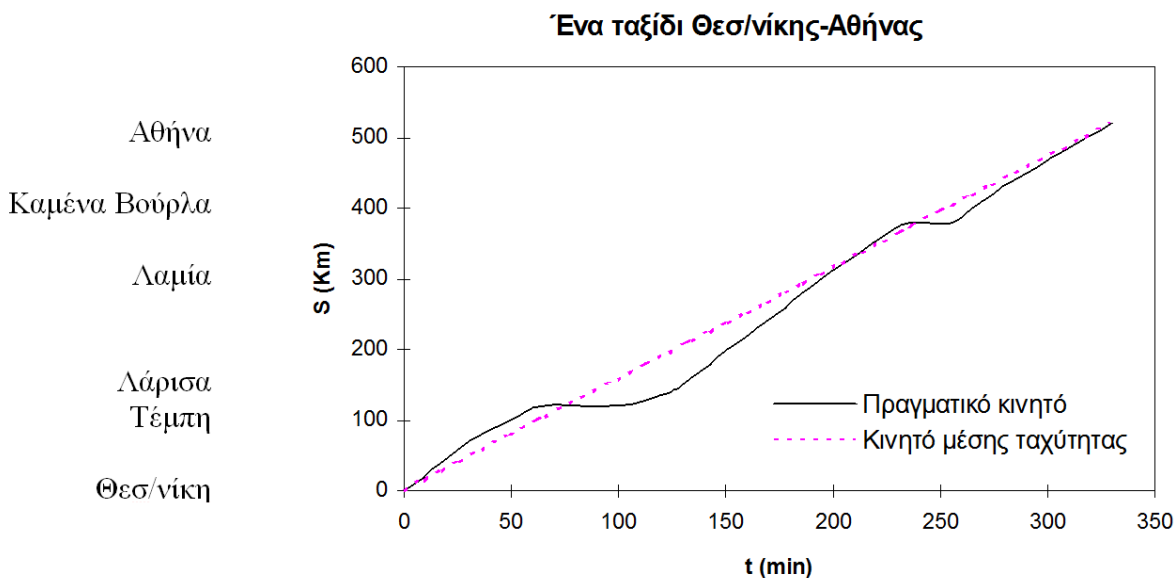
Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι τρόποι αριθμητικού υπολογισμού της παραγώγου μιας συνάρτησης. Παρουσιάζονται οι μέθοδοι του γραμμικού υπολογισμού, της πλήρους αριθμητικής παραγωγής και της παραγωγής με τη βοήθεια των πεπερασμένων διαφορών.

### Προαπαιτούμενη γνώση

Το κεφάλαιο προϋποθέτει ότι ο αναγνώστης έχει γνώσεις Μαθηματικών I του Α' Εξαμήνου σπουδών και έχει μελετήσει το Κεφάλαιο 6, ιδιαίτερα τα περί πεπερασμένων διαφορών.

### 7.1. Γενικά.

Η παραγωγή είναι μια πολύ σημαντική πράξη των συναρτήσεων. Η σημαντικότητά της έγκειται στο ότι αποτελεί στα Μαθηματικά τη γενίκευση της έννοιας της ταχύτητας. Στο επόμενο σχήμα δίνουμε ένα πολύ απλό παράδειγμα, της μετακίνησης ενός αυτοκινήτου από τη Θεσσαλονίκη στην Αθήνα.



**Σχήμα 7.1** Γραφική παράσταση της μετακίνησης ενός αυτοκινήτου από τη Θεσσαλονίκη στην Αθήνα ως συνάρτηση του χρόνου.

### Παρατηρήσεις:

- Η μετακίνηση του κινήτου λαμβάνει χώρα πάνω στον άξονα των διαστημάτων  $S$  και όχι πάνω στην καμπύλη  $c$ , η οποία βοηθά στο να γνωρίζουμε τη θέση του κινήτου ανά πάσα χρονική στιγμή. Η συνάρτηση που αντιστοιχεί στην καμπύλη  $c$ , η  $s=s(t)$ , ονομάζεται συνάρτηση θέσης του κινήτου.

- Διαιρώντας την απόσταση που διανύθηκε συνολικά,  $S$ , με το συνολικό χρόνο που απαιτήθηκε για τη μετακίνηση,  $T$ , υπολογίζουμε τη μέση ταχύτητα του κινητού:

$$\bar{v} = \frac{S}{T}$$

- Η μέση ταχύτητα στο γράφημα ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας την οποία σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα (των  $t$ ), το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία αρχής και τέλους της μετακίνησης.
- Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία εκκίνησης και τέλους της μετακίνησης είναι το γράφημα που αντιστοιχεί στην κίνηση ενός φανταστικού κινητού που κινείται διαρκώς με τη μέση ταχύτητα και διανύει τη συνολική απόσταση στον ίδιο χρόνο με το πραγματικό κινητό.
- Η κλίση της ευθείας  $\varepsilon$  ισούται με την ταχύτητα μετακίνησης (του φανταστικού κινητού).
- Η ταχύτητα του πραγματικού κινητού μεταβάλλεται διαρκώς. Η ταχύτητά του σε κάποια χρονική στιγμή ονομάζεται στιγμιαία ταχύτητα, και είναι η κλίση της συνάρτησης θέσης (της καμπύλης  $c$ ) στο αντίστοιχο  $t$ . Η κλίση όμως μιας καμπύλης σε ένα σημείο ορίζεται ως η κλίση της ευθείας που εφάπτεται στην καμπύλη, στο εν λόγω σημείο.

Στα Μαθηματικά, ονομάζουμε παράγωγο συνάρτηση μιας συνάρτησης  $f(x)$ , μιαν άλλη συνάρτηση, που ονομάζεται παράγωγος της  $f$  και συμβολίζεται με το  $f'(x)$ , η οποία δίνει σε κάθε σημείο  $x$  την κλίση της  $f$ .

### Παράδειγμα:

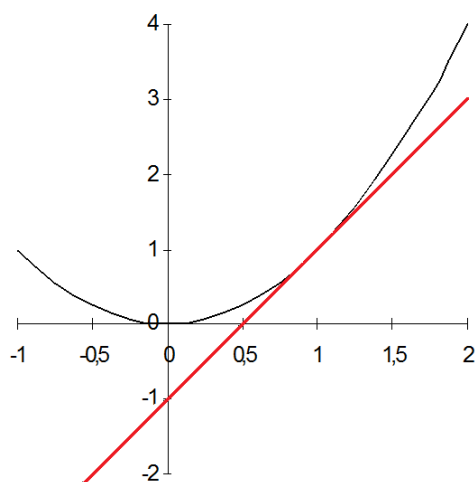
Έστω πως  $f(x) = x^2$ . Αναζητούμε τη συνάρτηση η οποία να “δίνει” τις κλίσεις της  $f$ . Αυτή είναι η παράγωγος της  $f$ , δηλαδή η:

$$f'(x) = (x^2)' = 2x$$

Άρα η κλίση της  $f$  στο σημείο  $x=1$  ισούται με:

$$f'(1) = [2x]_{x=1} = 2$$

Αυτή ακριβώς είναι η κλίση της ευθείας που εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης.

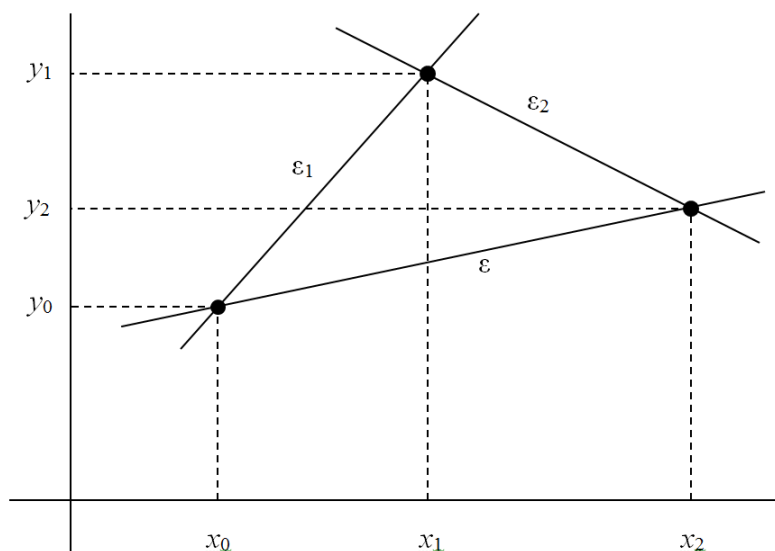


**Σχήμα 7.2** Γραφική παράσταση της συνάρτησης  $x^2$  και της εφαπτομένης στο σημείο της  $(1, 1)$ .

## 7.2. Γραμμικός υπολογισμός της παραγώγου.

Συνήθως υπολογίζουμε με αριθμητικές μεθόδους την παράγωγο μιας συνάρτησης, όταν η συνάρτηση αυτή είναι ορισμένη μ' έναν πίνακα τιμών. Το συνηθέστερο πρόβλημα είναι να αναζητούμε την παράγωγο σε κάποιο από τα σημεία του πίνακα (και όχι κάπου ενδιάμεσα).

Επιλέγουμε λοιπόν τα τρία πρώτα σημεία ενός πίνακα  $n$ -σημείων που περιέχει τις τιμές μια συνάρτησης  $y(x)$ , των  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  και  $(x_2, y_2)$ , και αναζητούμε την τιμή της παραγώγου της  $y(x)$  στο σημείο  $x_1$ . Ο αριθμητικός υπολογισμός στηρίζεται σε τρεις απλούστατους τύπους, οι οποίοι υπολογίζουν την κλίση ευθειών και εφαρμόζονται, ο πρώτος στην αρχή του πίνακα, ο δεύτερος στο τέλος και ο τρίτος σε όλα τα ενδιάμεσα σημεία (μια και δίνει τα ακριβέστερα αποτελέσματα).



**Σχήμα 7.3** Οι τρεις ευθείες για τον προσεγγιστικό υπολογισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης στο σημείο  $x_1$ .

Οι προσεγγιστικοί τύποι είναι:

κλίση της  $\varepsilon_1$  :

$$y'(x_1) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

κλίση της  $\varepsilon_2$  :

$$y'(x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

κλίση της  $\varepsilon$  :

$$y'(x_1) = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}$$

Γίνεται φανερό πως ο τρίτος τύπος πρέπει να είναι πλησιέστερα στην πραγματική τιμή της παραγώγου. Πράγματι, εάν προσπαθήσουμε να φανταστούμε τη μορφή της καμπύλης της  $y(x)$ , και να φέρουμε την ευθεία που εφάπτεται στην  $y(x)$  στο σημείο  $x_1$ , τότε θα δούμε πως είναι πιο πιθανό η κλίση της να πλησιάζει την κλίση της ευθείας  $\varepsilon$ .



### 7.3. Πλήρης αριθμητική παραγωγήιση.

Στην πλήρη αριθμητική παραγωγήιση επαναλαμβάνουμε τη λογική της πλήρους παρεμβολής. Αντικαθιστούμε τη συνάρτηση του πίνακα με το συμπτωτικό πολυώνυμο και παραγωγίζουμε το πολυώνυμο στη θέση της συνάρτησης. Μάλιστα για να μην ταλαιπωρούμαστε με τον υπολογισμό του συμπτωτικού πολυωνύμου, παραγωγίζουμε κατευθείαν το πολυώνυμο του Newton:

$$y_k = p(x_k) = p(k) = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} + \dots$$

Δεν πρέπει να ξεχνούμε βέβαια πως η προηγούμενη σχέση προέκυψε με την αλλαγή μεταβλητής (από την κανονική  $x_k$  στον δείκτη της  $k$ ), μέσω της σχέσης:

$$k = \frac{x_k - x_0}{h}$$

Επομένως, στη συνέχεια το πολυώνυμο του Newton (που θα παραγωγισθεί, φυσικά, ως προς  $x_k$ ) θα παραγωγισθεί ως σύνθετη συνάρτηση, οπότε θα ισχύει:

$$\frac{dy_k}{dx_k} = \frac{dp(k)}{dk} \frac{dk}{dx_k} = \frac{dp(k)}{dk} \frac{d}{dx_k} \left( \frac{x_k - x_0}{h} \right) = \frac{1}{h} \frac{dp(k)}{dk}$$

Έχουμε επομένως:

$$\begin{aligned} \frac{dy_k}{dx_k} &= \frac{dp(k)}{dk} \frac{dk}{dx_k} = \frac{1}{h} \frac{d}{dk} \left[ y_0 + k \frac{1}{h} + \frac{k(k-1)}{2!} + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{h} \left[ \Delta y_0 + \frac{2k-1}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{3k^2-6k+2}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots \right] \end{aligned}$$

#### Παράδειγμα:

Επανερχόμαστε στη συνάρτηση του παραδείγματος της παρεμβολής:

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	0	9950			
0.1	0.09950	9651	-299		
0.2	0.19601	9059	-592	-293	
0.3	0.28660	8182	-877	-285	8
0.4	0.36842	7037	-1145	-268	17
0.5	0.43879	5641	-1396	-251	17
0.6	0.4952	4019	-1622	-226	25
0.7	0.53539				

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παραγώγου της  $f$ , στο σημείο  $x_k = 0.4$ , χρησιμοποιώντας τους τρεις τύπους της γραμμικής προσέγγισης.
2. Να υπολογίσετε την τιμή της παραγώγου της  $f$ , στο σημείο  $x_k = 0.4$ , χρησιμοποιώντας την παράγωγο του συμπτωτικού πολυωνύμου του Newton.
3. Με δεδομένο πως η συνάρτηση του πίνακα είναι η  $f(x) = x \cos x$ , να υπολογισθεί η ακριβής τιμή της παραγώγου καθώς και τα σχετικά σφάλματα των υπολογισμών.

**Λύση:**

1) Όπως ήδη εξηγήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, ο πρώτος τύπος στηρίζεται στο τρέχον σημείο (το 0.4) και στο προηγούμενο, ο δεύτερος στο τρέχον και στο επόμενο, ενώ ο τρίτος στο προηγούμενο και στο επόμενο του τρέχοντος σημείου. Υπολογίζουμε λοιπόν:

Α τύπος:

$$f'(0.4) = \frac{0.36842 - 0.28660}{0.1} = 0.8182$$

Β τύπος:

$$f'(0.4) = \frac{0.43879 - 0.36842}{0.1} = 0.7037$$

Γ τύπος:

$$f'(0.4) = \frac{0.43879 - 0.28660}{0.2} = 0.76095$$

2) Όπως ειπώθηκε στο παράδειγμα της παρεμβολής, επιλέγουμε τριτοβάθμιο συμπτωτικό πολυώνυμο, θεωρώντας τις τρίτης τάξης διαφορές περίπου σταθερές. Επιλέγουμε επομένως από τον πίνακα τέσσερα σημεία σύμπτωσης (διαδοχικά που έχουν κεντρικό το σημείο 0.4), ξεκινώντας από το. Βέβαια, θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε από το  $x_0 = 0.3$ . Έχουμε λοιπόν:

$$x_0 = 0.2, \quad x_k = 0.4 \text{ και } h = 0.1$$

οπότε:

$$k = \frac{0.4 - 0.2}{0.1} = 2$$

άρα:

$$\begin{aligned} f'(0.4) &= \frac{1}{h} \left[ \Delta y_0 + \frac{2k-1}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{3k^2-6k+2}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots \right]_{k=2} = \\ &= \frac{1}{0.1} \left[ 0.09059 + \frac{3}{2}(-0.00876) + \frac{2}{6}(-0.00269) + \dots \right] = \\ &= 0.76508 \end{aligned}$$

3) Η ακριβής τιμή της παραγώγου:

$$f'(0.4) = [x \cos x]'_{x=0.4} = [\cos x - x \sin x]_{x=0.4} = 0.76529$$

Εκτιμούμε λοιπόν τα σχετικά σφάλματα των τεσσάρων προσεγγιστικών υπολογισμών:

**A τύπος:**

$$\sigma_{\sigma\chi} = 100 \frac{0.76529 - 0.8182}{0.76529} = 6.91\%$$

**B τύπος:**

$$\sigma_{\sigma\chi} = 100 \frac{0.76529 - 0.7037}{0.76529} = 6.16\%$$

**Γ τύπος:**

$$\sigma_{\sigma\chi} = 100 \frac{0.76529 - 0.76095}{0.76529} = 0.57\%$$

**Συμπτωτικό πολυώνυμο:**

$$\sigma_{\sigma\chi} = 100 \frac{0.76529 - 0.76508}{0.76529} = 0.027\%$$

Παρατηρούμε το πόσο σημαντικότερα ακριβής είναι ο τρίτος γραμμικός τύπος σε σχέση με τους προηγούμενους δύο. Αντίθετα, ήταν απόλυτα αναμενόμενη η ακρίβεια του τύπου που προήλθε από την παραγωγή του συμπτωτικού πολυωνύμου.



#### **7.4. Αριθμητική παραγωγή με τη βοήθεια των πεπερασμένων διαφορών.**

Όταν μιλήσαμε για τις ιδιότητες των διαφορών, αναφερθήκαμε στη σχέση πεπερασμένων διαφορών και παραγών. Τώρα θα το αναλύσουμε διεξοδικότερα. Έστω λοιπόν ο επόμενος πίνακας τιμών:

$x_j$	$y_j$	$\Delta y_j$	$\Delta^2 y_j$	$\Delta^3 y_j$	$\Delta^4 y_j$
$x_0$	$y_0$	$\Delta y_0$	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
$x_1$	$y_1$	$\Delta y_1$	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$
$x_2$	$y_2$	$\Delta y_2$	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_2$
$x_3$	$y_3$	$\Delta y_3$	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_3$	$\Delta^4 y_3$
$x_4$	$y_4$	$\Delta y_4$	$\Delta^2 y_4$	$\Delta^3 y_4$	$\Delta^4 y_4$
$x_5$	$y_5$	$\Delta y_5$	$\Delta^2 y_5$	$\Delta^3 y_5$	$\Delta^4 y_5$

Είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο πως ο πλέον ακριβής τύπος για την εκτίμηση της πρώτης παραγώγου στο σημείο  $x_1$  είναι αυτός που αντιστοιχούσε στον τύπο:

$$y'(x_1) = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = \frac{y_2 - y_0}{2h}$$

Εύκολα μπορούμε να φτάσουμε στα επόμενα τρία συμπεράσματα:

1. Ο τύπος αυτός θα μπορούσε να γραφεί με τη βοήθεια των δύο διαφορών, στο κέντρο των οποίων βρίσκεται το σημείο υπολογισμού της παραγώγου (το  $x_1$ ):

$$y'(x_1) = \frac{\frac{\Delta y_0 + \Delta y_1}{2}}{h} = \frac{\Delta y_0 + \Delta y_1}{2h} = \frac{y_1 - y_0 + y_2 - y_1}{2h} = \frac{y_2 - y_0}{2h}$$

2. Άρα, οι τύποι που χρησιμοποιούν μία από τις διαφορές (έστω τη  $\Delta y_0$ ), ουσιαστικά υπολογίζουν την παράγωγο στο ενδιάμεσο σημείο, δηλαδή στο μέσον του διαστήματος  $(x_0, x_1)$ .

$$y'(x_{1/2}) = y'\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) = \frac{\Delta y_0}{h}$$

3. Γενικεύοντας τη λογική αυτή συμπεραίνουμε πως η εκτίμηση των παραγώγων μεγαλύτερης τάξης αποδίδει τη ν-οστή παράγωγο της  $y(x)$ , στο σημείο που αντιστοιχεί η διαφορά που χρησιμοποιείται ( $\Delta^v y_k$ ) και δίνεται από τον τύπο:

$$y^{(v)}(x_j) = \frac{\Delta^v y_k}{h^v}$$

### Παραδείγματα:

Με βάση τις πιο πάνω παρατηρήσεις, και χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο πίνακα τιμών, έχουμε:

$$y''(x_2) = \frac{\Delta^2 y_1}{h^2},$$

$$y'''(x_{1.5}) = y'''(x_{3/2}) = \frac{\Delta^3 y_0}{h^3},$$

$$y'''(x_2) = \frac{\frac{\Delta^3 y_0 + \Delta^3 y_1}{2}}{h^3},$$

$$y^{(4)}(x_3) = \frac{\Delta^4 y_1}{h^4} \quad \text{κλπ.}$$

### Παρατήρηση:

Η αριθμητική εκτίμηση για την πρώτη παράγωγο στα δύο άκρα του πίνακα, με τη χρήση των τύπων:

$$y'(x_1) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

για το αριστερό άκρο, και

$$y'(x_v) = \frac{y_v - y_{v-1}}{h}$$

για το δεξί άκρο είναι ιδιαίτερα χαμηλής ακρίβειας. Για τον λόγο αυτό, **εκεί που δεν έχουμε δυνατότητα υπολογισμού με τη βοήθεια των διαφορών**, είτε πρόκειται για την πρώτη παράγωγο είτε για παραγώγους μεγαλύτερης τάξης, **χρησιμοποιούμε την παράγωγο του συμπτωτικού πολωνύμου του Newton.**

### Παράδειγμα:

Επανερχόμαστε στη συνάρτηση του παραδείγματος της προηγούμενης παραγράφου, στον πίνακα της συνάρτησης  $y(x) = x \cos x$ , εκτιμώντας κάποιες παραγώγους και συγκρίνοντας τα προσεγγιστικά αποτελέσματα με τα ακριβή:

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	0	9950			
0.1	0.09950	9651	-299	-293	
0.2	0.19601	9059	-592	-285	8
0.3	0.28660	8182	-877	-268	17
0.4	0.36842	7037	-1145	-251	17
0.5	0.43879	5641	-1396	-226	25
0.6	0.4952	4019	-1622		
0.7	0.53539				

Αρχικά υπολογίζουμε αναλυτικά τις παραγώγους:

$$y(x) = x \cos x$$

$$y'(x) = \cos x - x \sin x$$

$$y''(x) = -2 \sin x - x \cos x$$

$$y'''(x) = -3 \cos x + x \sin x$$

$$y^{(4)}(x) = 4 \sin x + x \cos x$$

Υπολογισμός των παραγώγων:

Προσεγγιστική λύση	Ακριβής λύση
$y'(0) = \frac{\Delta y_0}{h} = \frac{0.09950}{0.1} = 0.995$	$y'(0) = [\cos x - x \sin x]_{x=0} = 1$
$y'(0.05) = \frac{\Delta y_0}{h} = \frac{0.09950}{0.1} = 0.995$	$y'(0.05) = [\cos x - x \sin x]_{x=0.05} = 0.99625$
$y'(0.1) = \frac{\Delta y_0 + \Delta y_1}{2h} = \frac{0.09950 + 0.09651}{0.2} = 0.98007$	$y'(0.1) = [\cos x - x \sin x]_{x=0.1} = 0.98502$
$y''(0.1) = \frac{\Delta^2 y_0}{h^2} = \frac{-0.00299}{0.01} = -0.299$	$y''(0.1) = [-2 \sin x - x \cos x]_{x=0.1} = -0.29917$
$y'''(0.2) = \frac{\Delta^3 y_0 + \Delta^3 y_1}{2h^3} = \frac{-0.00294 - 0.00284}{0.002} = -2.89$	$y'''(0.2) = [-3 \cos x + x \sin x]_{x=0.2} = -2.90047$
$y^{(4)}(0.2) = \frac{\Delta^4 y_0}{h^4} = \frac{0.00010}{0.0001} = 1$	$y^{(4)}(0.2) = [4 \sin x + x \cos x]_{x=0.2} = 0.99069$



## Κριτήρια αξιολόγησης

### Κριτήριο αξιολόγησης 1

Με τη βοήθεια του επόμενου πίνακα τιμών, να εκτιμήσετε αριθμητικά και αναλυτικά την πρώτη, δεύτερη, τρίτη και τέταρτη παράγωγο της συνάρτησης  $f(x) = x \sin x$ .

$x_j$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$y_j$	0	0.00998	0.03973	0.08866	0.15577	0.23971
$\Delta y_j$	998	2975	4892	6711	8395	
$\Delta^2 y_j$		1977	1917	1819	1683	
$\Delta^3 y_j$			-60	-98	-135	
$\Delta^4 y_j$			-39	-37		

## Κεφάλαιο 8. Αριθμητικός υπολογισμός ορισμένου ολοκληρώματος

### Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι αριθμητικές μέθοδοι τον υπολογισμό των ορισμένων ολοκληρωμάτων. Παρουσιάζονται οι μέθοδοι του παραλληλογράμμου, του τραπεζίου (μέθοδος Simpson) και η γενίκευση της μεθόδου του Cotes.

### Προαπαιτούμενη γνώση

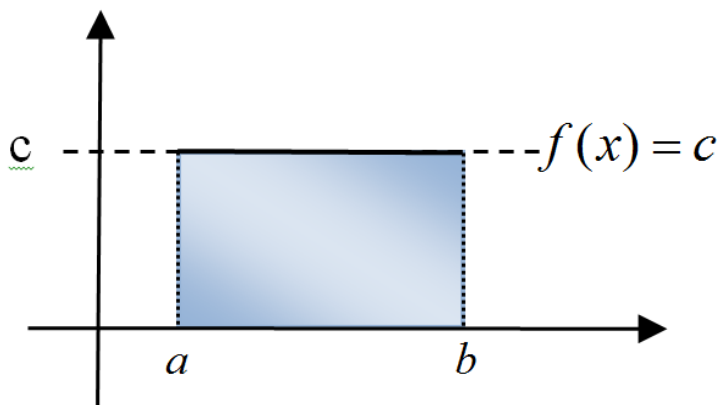
Το κεφάλαιο προϋποθέτει ότι ο αναγνώστης έχει γνώσεις Μαθηματικών I του Α' Εξαμήνου σπουδών. Επίσης απαραίτητη είναι η βασική γνώση χρήσης του προγράμματος Excel. Για την κατανόηση της υλοποίησης των μεθόδων σε MATLAB απαιτούνται βασικές γνώσεις προγραμματισμού και χρήσης του προγράμματος MATLAB.

### 8.1. Γενικά.

Μάθαμε την αόριστη ολοκλήρωση ως την αντίστροφη πράξη της παραγώγισης. Είδαμε πως επειδή η παράγωγος της συνάρτησης  $F(x) = x^2 + c$  είναι η  $f(x) = 2x$ , αντίστροφα το αόριστο ολοκλήρωμα (ή η “παράγουσα”) της  $f(x) = 2x$  είναι η  $F(x) = x^2 + c$ .

Στη συνέχεια μάθαμε για την ορισμένη ολοκλήρωση, η αρχή της οποίας στηρίζεται στον υπολογισμό του εμβαδού που περικλείεται από τη συνάρτηση  $f(x)$ , τον άξονα των  $x$  και τις δύο κάθετες ευθείες  $x=a$  και  $x=b$ , όπου το διάστημα  $(a, b)$ , είναι υποσυνόλου του πεδίου ορισμού της.

Στην ειδική περίπτωση που η συνάρτηση  $f(x)$  είναι σταθερή, ο υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος είναι ένα ιδιαίτερα απλό πρόβλημα!



**Σχήμα 8.1** Υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος σταθερής συνάρτησης σε ένα διάστημα  $(a, b)$ .

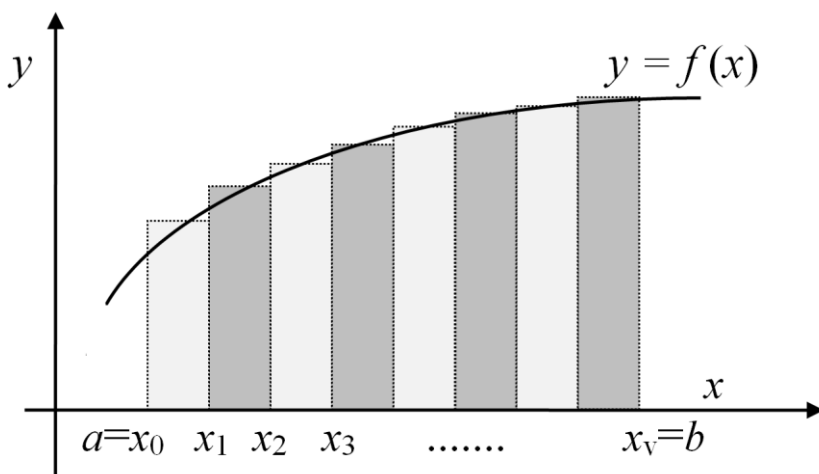
Τότε, το εμβαδό (το ορισμένο ολοκλήρωμα) δίνεται από τη σχέση του εμβαδού ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου:

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$$

Όταν όμως η  $f(x)$  δεν είναι σταθερή, τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα ορίζεται από μια πολλαπλή άθροιση στοιχειωδών εμβαδών ορθογωνίων παραλληλογράμμων, το καθένα από τα οποία αναφέρεται σε ένα



πολύ μικρό υποδιάστημα  $\Delta x$ , του διαστήματος  $(a, b)$  για το οποίο θεωρούμε πως η τιμή της συνάρτησης παραμένει σταθερή.



**Σχήμα 8.2** Υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος με πολλαπλή άθροιση στοιχειωδών εμβαδών ορθογωνίων παραλληλογράμμων.

Αναλύοντας το διάστημα ολοκλήρωσης  $(a, b)$  σε  $n$  υποδιαστήματα μήκους  $\Delta x$ , με τη βοήθεια των  $n+1$  σημείων:

$$x_0 = a$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x = x_0 + 2\Delta x$$

$$x_3 = x_2 + \Delta x = x_0 + 3\Delta x$$

...

$$x_n = x_{n-1} + \Delta x = x_0 + n\Delta x$$

Σε κάθε υποδιάστημα ορίζουμε το γινόμενο του μήκους του επί την τιμή της συνάρτησης  $f(x)$  σε ένα σημείο  $\xi$  του υποδιαστήματος. Το σημείο αυτό, στην πραγματικότητα, επιλέγεται από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής με τρόπο ώστε το εμβαδό του παραλληλογράμμου που προκύπτει να είναι ακριβώς ίσο με το εμβαδό που ορίζει το ολοκλήρωμα της  $f(x)$  στο εν λόγω υποδιάστημα. Έτσι στο τυχαίο  $i$ -οστό διάστημα έχουμε το γινόμενο:

$$S_i = f(\xi_i)\Delta x$$

Αθροίζοντας τα γινόμενα αυτά υπολογίζουμε, προσεγγιστικά, το ορισμένο ολοκλήρωμα της  $f(x)$  στο διάστημα  $(a, b)$ , ενώ η ακριβής τιμή του προκύπτει όταν το πλήθος  $n$  των υποδιαστημάτων τείνει στο άπειρο. Προφανώς, όταν το πλήθος  $n$  των υποδιαστημάτων τείνει στο άπειρο, το μήκος  $\Delta x$  των υποδιαστημάτων τείνει στο μηδέν. Έχουμε λοιπόν:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{j=1}^n f(\xi_j)\Delta x \right]$$

Καταλήξαμε λοιπόν στη γεωμετρική ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος  $I$ :

«Το ορισμένο ολοκλήρωμα  $I$  μιας συνεχούς και παντού θετικής συνάρτησης, στο διάστημα  $(a, b)$ , είναι ίσο με το εμβαδό της επιφάνειας που ορίζεται από την καμπύλη της  $f(x)$ , τον άξονα των  $x$  και τις ευθείες  $x=a$  και  $x=b$ ».

Με τη βοήθεια του θεωρήματος μέσης τιμής είδαμε στο μάθημα των Μαθηματικών Ι του 1<sup>ου</sup> εξαμήνου, πως εάν η  $F(x)$  είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της  $f(x)$ , τότε η τιμή  $I$  του ορισμένου ολοκληρώματος δίνεται από τη σχέση:

$$I = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

### Ιδιότητες:

- Όταν η συνάρτηση που ολοκληρώνεται από το  $a$  έως το  $b$  είναι παντού αρνητική, τότε το τελικό αποτέλεσμα ισούται κατ' απόλυτη τιμή με το αντίστοιχο εμβαδό, έχει όμως αρνητικό πρόσημο.

- Εύκολα γίνονται κατανοητές οι σχέσεις:

$$I = \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- Τέλος, εάν  $f_1(x) \leq f_2(x)$ ,  $\forall x \in (a, b)$ , τότε το εμβαδόν ( $E$ ) που ορίζεται από τις παραστάσεις των δύο συναρτήσεων και τις ευθείες  $x = a$  και  $x = b$ , δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$E = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

## 8.2 Η αριθμητική ολοκλήρωση.

Η αριθμητική ολοκλήρωση περιλαμβάνει μεθόδους οι οποίες προσπαθούν να υπολογίσουν προσεγγιστικά την τιμή ενός ορισμένου ολοκληρώματος. Συνήθως καταφεύγουμε σε τέτοιες μεθόδους στις παρακάτω περιπτώσεις:

- Όταν γνωρίζουμε τη συνάρτηση με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών.
- Όταν δεν είναι δυνατό να υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης που ολοκληρώνεται.
- Όταν η κλασσική μέθοδος ολοκλήρωσης είναι ιδιαίτερα δύσκολη και χρονοβόρα.

Ήδη γνωρίσαμε μία μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης, στο κεφάλαιο των αναπτυγμάτων Taylor και Mac Laurin. Εκεί αντικαθιστούσαμε το μη πολυωνυμικό τμήμα της υπό το ολοκλήρωμα συνάρτησης με το ανάπτυγμά της και ολοκληρώναμε το ανάπτυγμα που προκύπτει. Για παράδειγμα:

$$I = \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx = \int_a^b \left[ \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots}{x} \right] dx =$$

$$= \int_a^b \left[ 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \dots \right] dx = \left[ x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} + \dots \right]_a^b =$$

$$= \left( b - \frac{b^3}{3!3} + \frac{b^5}{5!5} + \dots \right) - \left( a - \frac{a^3}{3!3} + \frac{a^5}{5!5} + \dots \right)$$

όπου αντικαταστήσαμε τη συνάρτηση  $\sin x$  με το ανάπτυγμά της κατά Mac Laurin, έχοντας ως δεδομένο πως τα σημεία  $a$  και  $b$  δεν είναι πολύ μακριά από το 0.

Στο κεφάλαιο αυτό θα εφαρμόσουμε μια μέθοδο, η οποία στηρίζεται στην ίδια αρχή στην οποία στηρίζονταν η παρεμβολή και η αριθμητική παραγωγή. **Αντικαθιστούμε τη συνάρτηση που ολοκληρώνεται με το συμπτωτικό της πολυώνυμο και αντί για τη συνάρτηση ολοκληρώνουμε το πολυώνυμο.**

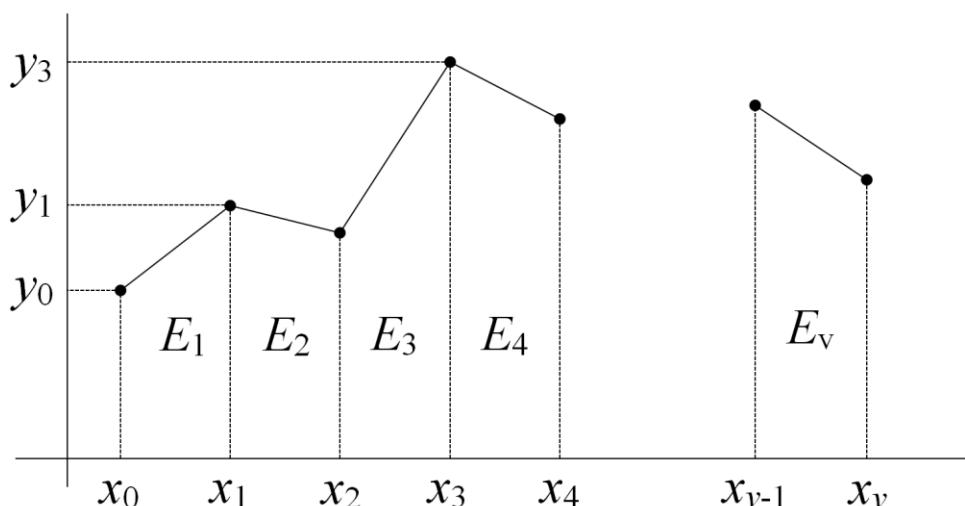
Για να συμβούν τα παραπάνω θα πρέπει να υπάρχει ο πίνακας τιμών της συνάρτησης. Εάν αυτός δεν υπάρχει, τότε πρέπει να τον κατασκευάσουμε.

Στην επόμενη παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε πρωτοβάθμιο πολυώνυμο, πράγμα που σημαίνει πως θα «ενώσουμε» τα  $(n+1)$  δοσμένα σημεία του πίνακα τιμών με  $(n)$  ευθύγραμμα τμήματα, δημιουργώντας έναν τύπο που λέγεται «τύπος του τραπεζίου».

### 8.3. Ολοκλήρωση με τη μέθοδο του τραπεζίου (μέθοδος Simpson).

Υποθέτουμε πως χωρίζουμε το διάστημα ολοκλήρωσης  $(a, b)$ , σε  $n$  ίσα υποδιαστήματα, πλάτους  $h$ , με τη βοήθεια  $n+1$  σημείων:

$$(x_0 = a, y_0 = f(x_0)), (x_1 = a + h, y_1 = f(x_1)), (x_2 = a + 2h, y_2 = f(x_2)), \dots, (x_n = a + nh = b, y_n = f(x_n))$$



**Σχήμα 8.3** Υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος με τη μέθοδο του τραπεζίου.

Ενώνοντας τα σημεία αυτά (αντικαθιστώντας δηλαδή στο ενδιαμέσο τη συνάρτηση με ευθύγραμμα τμήματα – πρωτοβάθμια πολυώνυμα), δημιουργούμε  $n$  τραπέζια.

Θεωρούμε πως η τιμή του αόριστου ολοκληρώματος δίνεται προσεγγιστικά από το άθροισμα των εμβαδών των τραpezίων:

$$I = \int_a^b f(x)dx = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_v =$$

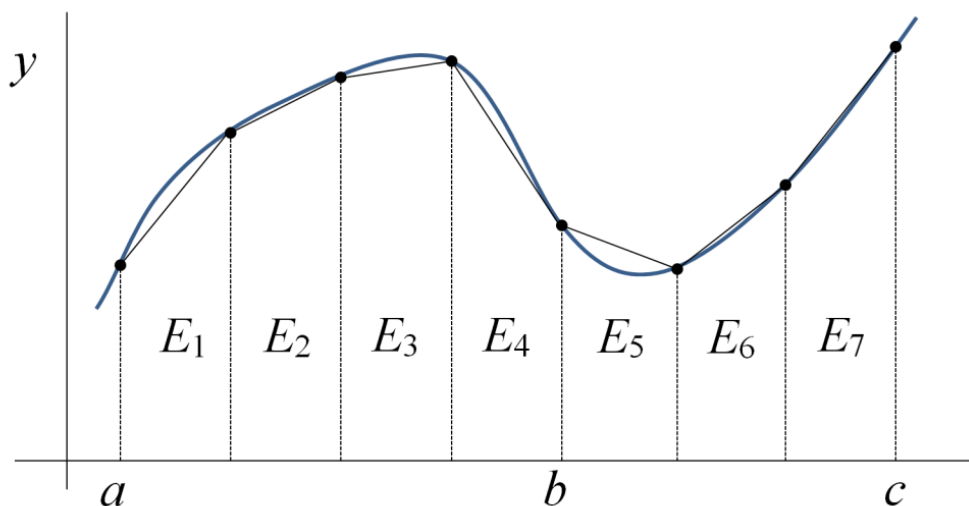
$$= h \frac{y_0 + y_1}{2} + h \frac{y_1 + y_2}{2} + h \frac{y_2 + y_3}{2} + \dots + h \frac{y_{v-1} + y_v}{2}$$

Καταλήγουμε δηλαδή στον παρακάτω “τύπο του τραpezίου” που μας δίνει την προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος  $I$ .

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \dots + 2y_{v-1} + y_v)$$

### Παρατηρήσεις:

- Όσο μικρότερο είναι το πλάτος  $h$  των υποδιαστημάτων (το οποίο το ονομάσαμε προηγουμένως «βήμα του πίνακα τιμών» και η επιλογή του  $h$  ως σταθερό για όλον τον πίνακα σημαίνει πως έχουμε πίνακα ισαπεχόντων ορισμάτων), τόσο ακριβέστερος είναι ο προσεγγιστικός υπολογισμός του ολοκληρώματος.
- Όταν οι τιμές της συνάρτησης  $y_i$  είναι αρνητικές, τότε η τιμή του ολοκληρώματος που υπολογίζεται από τον τύπο του τραpezίου είναι κι’ αυτή αρνητική.
- Όταν η συνάρτηση που ολοκληρώνεται, στο διάστημα ολοκλήρωσης  $(a, b)$  στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, ο τύπος του τραpezίου δίνει μία τιμή μικρότερη της πραγματικής. Στην αντίθετη περίπτωση, δηλαδή όταν στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω, ο τύπος του τραpezίου δίνει μια τιμή μεγαλύτερη της πραγματικής. Πράγματι, παρατηρούμε στο Σχήμα 8.4 πως στο διάστημα  $(a, b)$  ο τύπος του τραpezίου δεν λαμβάνει υπ’ όψη του όλο το «εμβαδόν» που υπάρχει ανάμεσα στην πάνω πλάγια πλευρά του τραpezίου και στην καμπύλη της συνάρτησης, ενώ αντίθετα, στο διάστημα  $(b, c)$ , όπου τα κοίλα στρέφονται προς τα άνω, προσθέτει στο ολοκλήρωμα το αντίστοιχο εμβαδόν.



Σχήμα 8.4 Ολοκλήρωση μιας συνάρτησης με τη μέθοδο του τραpezίου.

## 8.4. Οι τύποι του Cotes.

Η γενίκευση της μεθόδου του τραpezίου αναφέρεται,

α) στην αντικατάσταση της συνάρτησης  $f(x)$  που ολοκληρώνεται, από το συμπτωτικό πολυώνυμο  $p(x_k)$ , που αντιστοιχεί στις τιμές του πίνακα, και

β) στην ολοκλήρωση του πολυωνύμου αυτού.

Ο Cotes συστηματοποίησε τη μέθοδο αυτή. Υπολόγισε τον τύπο που προκύπτει κατά την ολοκλήρωση πρωτοβαθμίων πολυωνύμων (και φυσικά κατέληξε στον τύπο του τραπεζίου), καθώς και τον τύπο που προκύπτει από την ολοκλήρωση πολυωνύμων 2ου, 3ου, 4ου και 6ου βαθμού.

Υπολόγισε δηλαδή (μέσω του συμπτωτικού πολυωνύμου του Newton), το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{x_0}^{x_v} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_v} p(x_k) dx_k$$

Η ολοκλήρωση γίνεται στο διάστημα  $(a = x_0, b = x_v)$  που είναι χωρισμένο σε  $n$  υποδιαστήματα ίσου μήκους  $(h)$ , με τη βοήθεια  $n+1$  ισαπεχόντων σημείων. Είναι φανερό πως το συμπτωτικό αυτό πολυώνυμο, που αντιστοιχεί στα  $n+1$  σημεία, θα είναι  $n$ -οστού βαθμού.

Όμως το συμπτωτικό πολυώνυμο του Newton:

$$y_k = p(x_k) = p(k) = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots$$

χρησιμοποιεί ως μεταβλητή τον δείκτη  $k$  αντί της υπάρχουσας μεταβλητής  $x_k$ , σύμφωνα με τον τύπο αλλαγής μεταβλητής:

$$k = \frac{x_k - x_0}{h}$$

Φυσικά, η αλλαγή μεταβλητής προκάλεσε και την αντίστοιχη αλλαγή του διαφορικού:

$$dk = d\left[\frac{x_k - x_0}{h}\right] = \frac{1}{h} dx_k \Rightarrow dx_k = h dk$$

καθώς και των ορίων ολοκλήρωσης. Έχουμε λοιπόν:

$$I = \int_{x_0}^{x_v} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_v} p(x_k) dx_k = h \int_0^v p(k) dk$$

Ας επιλύσουμε λοιπόν το πιο πάνω ολοκλήρωμα για την περίπτωση πρωτοβαθμίου πολυωνύμου, φθάνοντας στον τύπο του τραπεζίου:

$$\begin{aligned} I &= \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} p(x_k) dx_k = h \int_0^1 [y_0 + k\Delta y_0] dk = h \left[ y_0 k + \frac{k^2}{2} \Delta y_0 \right]_0^1 = \\ &= h \left[ y_0 + \frac{1}{2} \Delta y_0 - 0 \right] = h \left[ y_0 + \frac{1}{2} (y_1 - y_0) \right] = \frac{h}{2} [y_0 + y_1] \end{aligned}$$

Εφόσον το διάστημα ολοκλήρωσης χωρίζεται σε  $n$  υποδιαστήματα, μέσω των ισαπεχόντων σημείων, θα πρέπει να εφαρμόσουμε  $n$  φορές τον παραπάνω τύπο:

$$\begin{aligned} I &= \int_{x_0}^{x_v} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{v-1}}^{x_v} f(x) dx = \\ &= \frac{h}{2} [y_0 + y_1] + \frac{h}{2} [y_1 + y_2] + \dots + \frac{h}{2} [y_{v-1} + y_v] = \\ &= \frac{h}{2} [y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{v-1} + y_v] \end{aligned}$$

καταλήγοντας στον τύπο του τραπεζίου.

### Ορισμός και οι τύποι:

Ολοκληρώνοντας το συμπτωτικό πολυώνυμο του  $n$ -οστού βαθμού, χρησιμοποιώντας  $n+1$  σημεία καταλήγουμε στον τύπο:

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_n} \pi(x_k) dx_k = Ch [c_0 y_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n]$$

όπου οι συντελεστές  $C$  και  $c_i$ , καθώς και το μέγιστο σφάλμα αποκοπής του κάθε τύπου, δίνονται από τον παρακάτω πίνακα:

n	C	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$	Σφάλμα αποκοπής
1 τραπεζίου	$\frac{1}{2}$	1	1						$\frac{h^3}{12} f''(\xi)$
2 Simpson	$\frac{1}{3}$	1	4	1					$\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$
3	$\frac{3}{8}$	1	3	3	1				$\frac{3h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$
4	$\frac{2}{45}$	7	32	12	32	7			$\frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\xi)$
5	$\frac{5}{288}$	19	75	50	50	75	19		$\frac{275h^7}{12096} f^{(6)}(\xi)$
6	$\frac{1}{140}$	41	216	27	272	27	216	41	$\frac{9h^9}{1400} f^{(8)}(\xi)$

### Παρατηρήσεις:

- Το σφάλμα αποκοπής δείχνει να μειώνεται, όσο ο βαθμός του πολυωνύμου αυξάνεται, ιδιαίτερα εάν το πλάτος  $h$  των υποδιαστημάτων στα οποία χωρίζεται το διάστημα ολοκλήρωσης είναι μικρότερο της μονάδας.
- Οι τύποι του σφάλματος περιέχουν την παράγωγο της συνάρτησης που ολοκληρώνεται, σε κάποιο σημείο  $\xi$  που είναι συνήθως άγνωστο. Για τον λόγο αυτό επιλέγουμε ως  $\xi$ , το σημείο του διαστήματος ολοκλήρωσης για το οποίο μεγιστοποιείται η τιμή της παραγώγου (δηλαδή δυσμενέστερο για την εκτίμηση του σφάλματος).
- Ας υποθέσουμε πως επιλέξαμε τον τύπο για  $n=4$ , και ότι γνωρίζουμε την τιμή της 6ης παραγώγου στον τύπο του σφάλματος. Εξισώνοντας το μέγιστο αυτό σφάλμα, με την απαιτούμενη ακρίβεια προκύπτει μία οριακή τιμή για το πλάτος  $h$  των υποδιαστημάτων. Εάν το τελικό  $h$  που επιλέγουμε είναι μικρότερο του οριακού, τότε το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης θα είναι μέσα στα πλαίσια της απαιτούμενης ακρίβειας.
- Εάν το διάστημα ολοκλήρωσης είναι ιδιαίτερα μεγάλο, αναγκάζομαστε να περάσουμε τον τύπο ολοκλήρωσης περισσότερες από μία φορές (όπως θα δούμε στα επόμενα παραδείγματα). Για παράδειγμα, ο τύπος του Cotes για  $n=2$  εάν επαναληφθεί 3 φορές γίνεται:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \int_{x_4}^{x_6} f(x) dx = \\
&= \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + y_2] + \frac{h}{3} [y_2 + 4y_3 + y_4] + \frac{h}{3} [y_4 + 4y_5 + y_6] = \\
&= \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6]
\end{aligned}$$

### Τρόπος δουλειάς:

Αρχικά θα υποθέσουμε πως πρέπει να ολοκληρώσουμε μια συνάρτηση  $f$ , η οποία δίνεται με έναν πίνακα τιμών. Η συνέχεια εξαρτάται από το πλήθος των σημείων του πίνακα που υπάρχουν στο εσωτερικό του διαστήματος ολοκλήρωσης. Εάν για παράδειγμα ολοκληρώνουμε από το  $x_0$  μέχρι το  $x_6$ , τότε χρησιμοποιούμε τον τύπο  $n=6$ . Αντίθετα, εάν ολοκληρώνουμε από το  $x_0$  έως το  $x_9$ , τότε μας βολεύει να χρησιμοποιήσουμε δύο φορές τον τύπο για  $n=4$  (μία φορά από το  $x_0$  έως το  $x_5$ , και μία δεύτερη από το  $x_5$  έως το  $x_9$ ).

Γενικά, αποφεύγουμε να χρησιμοποιήσουμε 2 είδη τύπων, μια και το άθροισμα των αποτελεσμάτων θα έχει σαν ακρίβεια, αυτήν του πιο ανακριβούς αποτελέσματος. Έτσι, όταν έχουμε 9 σημεία προτιμούμε να επαναλάβουμε 2 φορές τον τύπο του Cotes για  $n=4$ , παρά μια φορά τον τύπο του  $n=6$  και άλλη μία αυτόν του  $n=3$ .

Αντίθετα, όταν η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση ορίζεται με μαθηματικό τύπο, τότε είμαστε υποχρεωμένοι να δημιουργήσουμε τον πίνακα τιμών. Κάνουμε λοιπόν τις παρακάτω εργασίες:

- Επιλέγουμε τον τύπο του Cotes με τον οποίο θα εργαστούμε (συνήθως τον ακριβέστερο  $n=6$ ).
- Υπολογίζουμε την οριακή τιμή ( $h_{op}$ ) του βήματος του πίνακα τιμών.
- Δημιουργούμε έναν πίνακα τιμών, του οποίου το πλήθος των σημείων του δίνεται από τον τύπο  $j = \kappa n + 1$ , όπου  $n$  είναι η τάξη του τύπου που χρησιμοποιούμε, ενώ το  $\kappa$  ισούται με το πλήθος των φορών που επαναλαμβάνουμε τον τύπο. Προφανώς, τα  $j$  σημεία ορίζουν  $j-1$  ( $=\kappa n$ ) υποδιαστήματα των οποίων το πλάτος είναι:  $h = (b-a)/(\kappa \cdot n)$
- Υπολογίζουμε την τιμή του ολοκληρώματος από τον τύπο του Cotes.

### Παράδειγμα 1ο.

Στο παρακάτω πίνακα εμφανίζεται ο πίνακας τιμών μιας συνάρτησης  $f$ .

$x_k$	$y_k$
0	0,00000
0,5	0,38940
1	0,36788
1,5	0,15810
2	0,03663

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^2 f(x) dx$$

- 1) Με τη βοήθεια του τύπου του τραπεζίου.
- 2) Όσο το δυνατόν ακριβέστερα.
- 3) Εάν η συνάρτηση που ολοκληρώνεται είναι η:

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

να υπολογίσετε το σχετικό σφάλμα των υπολογισμών

### Λύση.

- 1) Αρχικά υπολογίζουμε με τον τύπο του τραπεζίου:

$$\begin{aligned} I &= \frac{h}{2} [f(0) + 2f(0.5) + 2f(1) + 2f(1.5) + f(2)] = \\ &= (0.25) \cdot 1.86739 = 0.46685 \end{aligned}$$

- 2) Εφόσον έχουμε στη διάθεσή μας πέντε σημεία, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο για  $n=4$ :

$$\begin{aligned} I &= \frac{2h}{45} [7f(0) + 32f(0.5) + 12f(1) + 32f(1.5) + 7f(2)] = \\ &= \left(\frac{1}{45}\right) \cdot 22.19095 = 0.49313 \end{aligned}$$

- 3) Ολοκληρώνοντας θεωρητικά έχουμε:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^2 e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2} [e^{-x^2}]_0^2 = \\ &= -0.0091578 + 0.5 = 0.49084 \end{aligned}$$

οπότε έχουμε τα σχετικά σφάλματα:

$$\text{για } n=1, \sigma_{\%} = 100(0.49084 - 0.46685) / 0.49084 = 4.89 \%$$

$$\text{για } n=4, \sigma_{\%} = 100(0.49084 - 0.49313) / 0.49084 = 0.47 \%$$

Τελειώνοντας, αξίζει να παρατηρήσουμε πως ο τύπος για  $n=4$  είναι ακριβέστερος του τύπου του τραπεζίου, παρ' όλων ότι και οι δύο τύποι απαιτούν το ίδιο πλήθος πράξεων.



### Παράδειγμα 2ο.

Να υπολογισθεί αριθμητικά το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^2 xe^{-x^2} dx$$

με ακρίβεια  $\varepsilon=0.0001$ , όταν δίνεται πως

$$|f^{(8)}(\xi)| \leq 1500$$



### Λύση.

Αρχικά να τονίσουμε πως ένας εύκολος τρόπος για την εκτίμηση της  $8^{\text{ης}}$  παραγώγου της συνάρτησης  $f(x)$  που ολοκληρώνεται στηρίζεται στη χρήση της  $8^{\text{ης}}$  διαφοράς, από τον πίνακα διαφορών, μέσω του τύπου:

$$f^{(8)}(x) = \frac{\Delta^8 y_0}{h^8}$$

(i) Ξεκινούμε με τον υπολογισμό του οριακού βήματος του πίνακα, έτσι ώστε να επιτευχθεί η απαιτούμενη ακρίβεια:

$$(9h^9/1400)f^{(8)}(\xi) \leq (9h^9/1400) 1500 = 0,0001$$

απ' όπου προκύπτει:  $h \leq 0,2794$ , πράγμα που σημαίνει πως επιλέγοντας το βήμα του πίνακα μικρότερο του 0,28 θα επιτύχουμε την ακρίβεια που μας ζητείται.

(ii) Επιλέγουμε τον τύπο του Cotes για  $n=6$ . Εάν τον εφαρμόσουμε μία μόνο φορά πάνω στο διάστημα ολοκλήρωσης (0,2), τότε θα το υποδιαιρέσουμε σε 6 υποδιαστήματα, οπότε το βήμα του πίνακα θα είναι:  $h=(b-a)/6=2/6=0,33333$ , το οποίο ξεπερνά το οριακό βήμα που υπολογίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Αναγκαζόμαστε λοιπόν να εφαρμόσουμε δύο φορές τον τύπο, οπότε:

$$h = (b-a)/(2 \times 6) = 1/6 \quad (\leq h_{op}) \text{ δεκτό!}$$

(iii) Δημιουργούμε στη συνέχεια τον πίνακα τιμών, με τη βοήθεια του οποίου υπολογίζουμε την τιμή του ολοκληρώματος.

Πίνακας τιμών	
$x_k$	$y_k$
0	0
1/6	0,16210
2/6	0,29828
3/6	0,38940
4/6	0,42745
5/6	0,41613
1	0,36788
7/6	0,29911
8/6	0,22535
9/6	0,15810
10/6	0,10363
11/6	0,06361
2	0,03663

$$I = \int_0^2 x e^{-x^2} dx = \int_0^1 x e^{-x^2} dx + \int_1^2 x e^{-x^2} dx =$$

$$= \frac{h}{140} \left[ 41y(0) + 216y\left(\frac{1}{6}\right) + 27y\left(\frac{2}{6}\right) + 272y\left(\frac{3}{6}\right) + 27y\left(\frac{4}{6}\right) + 216y\left(\frac{5}{6}\right) + 41y(1) \right] +$$

$$+ \frac{h}{140} \left[ 41y(0) + 216y\left(\frac{7}{6}\right) + 27y\left(\frac{8}{6}\right) + 272y\left(\frac{9}{6}\right) + 27y\left(\frac{10}{6}\right) + 216y\left(\frac{11}{6}\right) + 41y(2) \right]$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές και μετά από τις πράξεις καταλήγουμε

$$I = \frac{1/6}{140} 412.30867 = 0.49084$$

Συγκρίνοντας το αποτέλεσμα αυτό με το ακριβές αποτέλεσμα που υπολογίσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, διαπιστώνουμε πως η ακρίβεια του προσεγγιστικού υπολογισμού είναι απόλυτη.



## 8.5. Εφαρμογή στο Excel.

Αξίζει να προσπαθήσουμε να καθορίσουμε με τέτοιο τρόπο το φύλλο εργασίας μας, έτσι ώστε να μπορούμε εύκολα να μεταβάλλουμε το πλήθος κ των φορών επανάληψης του τύπου.

Ας υποθέσουμε πως θέλουμε να υπολογίσουμε το επόμενο ολοκλήρωμα:

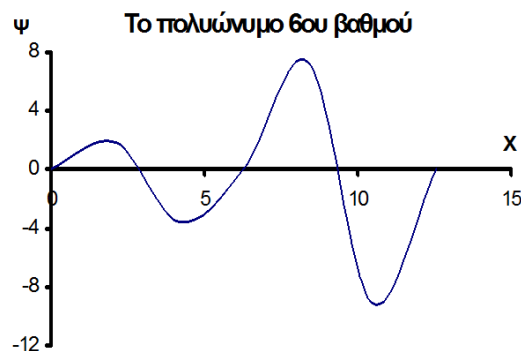
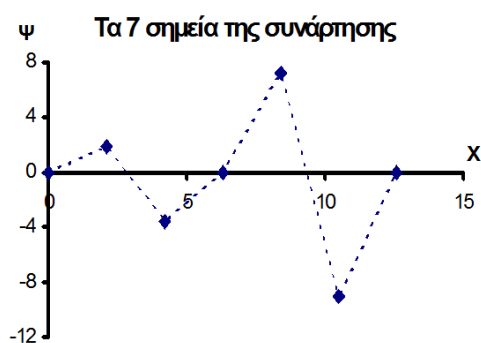
$$I = \int_0^{4\pi} x \sin x dx$$

Η μορφή του φύλλου εργασίας θα είναι κατά βάση η επόμενη (υιοθετούμε k=1):

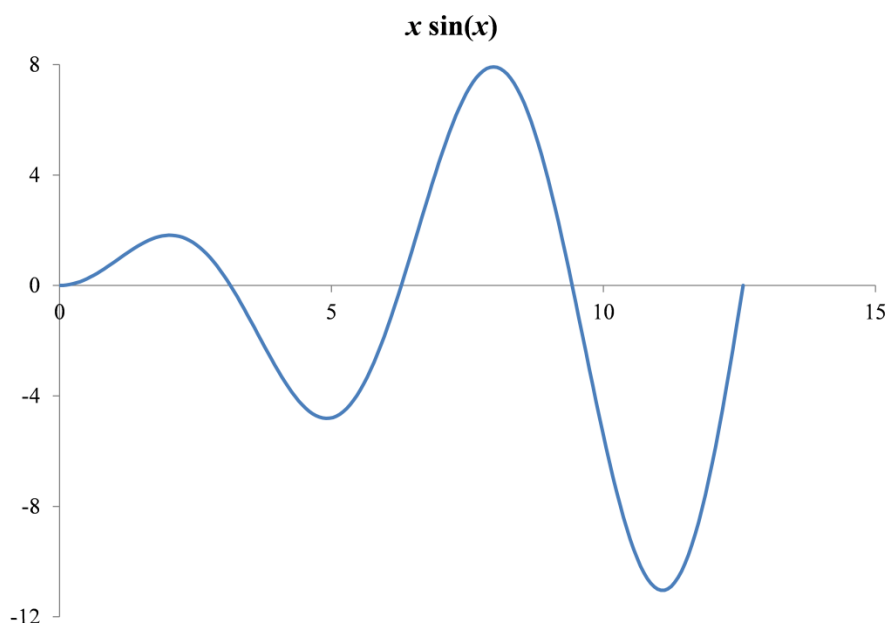
	A	B	C	D	E	F
1						
2		α=	0			
3		β=	12,56637061	h=	=(C3-C2)/(6*C4)	
4		κ=	1			
5						
6		x	f(x)	Συν/στης c	c*f(x)	
7						
8		αρχ.τιμή α	Η τιμή της	41	Τα γινόμενα	
9		προηγ.+ h	συνάρτησης	216	που θα	
10		κ.λ.π.	που	27	αθροιστούν	
11			αντιστοιχεί	272		
12			στα διπλανά x	27		
13				216		
14				41		
15		.....	.....	.....	.....	
16					Άθροισμα	
17						
18		Τελ.αποτέλ.	....			
19						

Εάν οι πράξεις τοποθετηθούν σωστά στο φύλλο εργασίας, τότε το τελικό αποτέλεσμα θα είναι:  $I = -21,98$ . Το ακριβές όμως αποτέλεσμα είναι ίσο με  $I_{\text{ακρ.}} = -12,566$ . Διαπιστώνουμε λοιπόν πως η προσέγγιση που επιτύχαμε είναι κάκιστη. Για να ερμηνεύσουμε αυτό το προσεγγιστικό σφάλμα παρατηρούμε αρχικά το βήμα ολοκλήρωσης ( $h=2,09$ ) το οποίο είναι τεράστιο. Στη συνέχεια κάνουμε τη γραφική παράσταση της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης στηριζόμενοι στα επτά σημεία του πίνακα ολοκλήρωσης.

Στην αριστερή από τις δύο επόμενες γραφικές παραστάσεις (Σχήμα 8.5) εμφανίζονται τα επτά σημεία ολοκλήρωσης της συνάρτησης  $f(x) = x \sin x$ . Παρατηρούμε πως τα σημεία αυτά δυσκολεύονται να εκφράσουν την υπό ολοκλήρωση συνάρτηση που παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.6. Στη δεξιά γραφική παράσταση παρατηρούμε το πολυώνυμο έκτου βαθμού που ορίζεται από τα προηγούμενα επτά σημεία. Η προσέγγιση τώρα είναι εμφανώς καλύτερη αλλά και πάλι απέχει από την ακριβή λύση.



**Σχήμα 8.5** Τα επτά σημεία της συνάρτησης που ολοκληρώνεται (αριστερά) και το πολυώνυμο 6ου βαθμού που τα προσεγγίζει (δεξιά).



**Σχήμα 8.6** Η πραγματική γραφική παράσταση της συνάρτησης  $x \sin(x)$ .

Αντίθετα, εάν εφαρμόσουμε τρεις φορές τον τύπο ολοκλήρωσης (εάν δηλαδή διαμερίσουμε σε 18 υποδιαστήματα το διάστημα ολοκλήρωσης, με τη βοήθεια 19 σημείων) τότε υπολογίζουμε την προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος:

$$I = -12,568 \text{ αντί του ακριβούς } I_{\text{ακρ.}} = -12,566$$

Για ευκολία ενοποιούμε τον τελευταίο συντελεστή του πρώτου περάσματος με τον πρώτο του δεύτερου, όπως και τον τελευταίο συντελεστή του δεύτερου περάσματος με τον πρώτο του τρίτου. Αντί να έχουμε δηλαδή:

$$[41y_0 + \dots + 216y_5 + 41y_6] + [41y_6 + \dots + 216y_{11} + 41y_{12}] + [41y_{12} + \dots + 216y_{17} + 41x_{18}]$$

έχουμε:

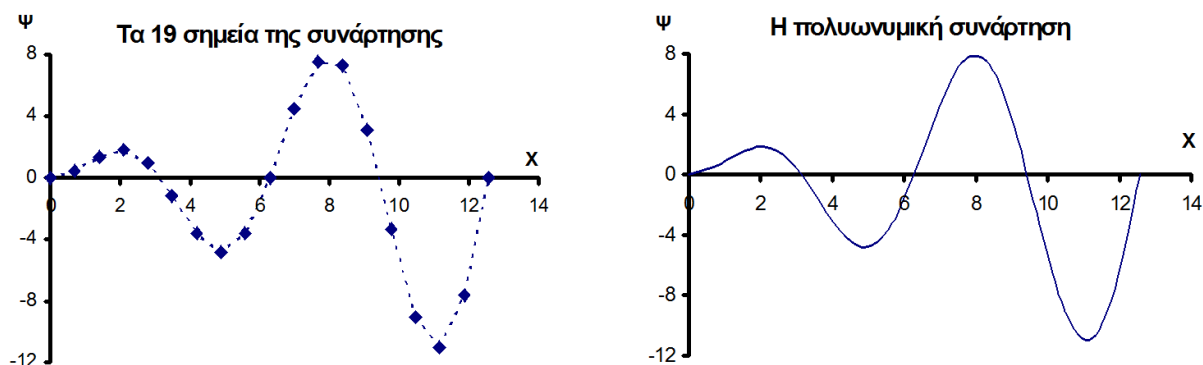
$$[41y_0 + \dots + 216y_5 + 82y_6 + \dots + 216y_{11} + 82y_{12} + \dots + 216y_{17} + 41x_{18}]$$

όπως δείχνει και ο παρακάτω πίνακας.

i	Συντελεστές 1 <sup>ο</sup> περάσματος	Συντελεστές 2 <sup>ο</sup> περάσματος	Συντελεστές 3 <sup>ο</sup> περάσματος	Τελικοί συντελεστές
0	41			41
1	216			216
2	27			27
3	272			272
4	27			27
5	216			216
6	41	41		<b>82</b>
7		216		216
8		27		27
9		272		272
10		27		27
11		216		216
12		41	41	<b>82</b>
13			216	216
14			27	27
15			272	272
16			27	27
17			216	216
18			41	41

Τα παρακάτω γραφήματα φανερώνουν το «μυστικό της επιτυχίας». Παρατηρούμε πως η προσέγγιση της συνάρτησης  $f(x) = x \sin x$  με τη βοήθεια των 19 σημείων είναι πολύ ακριβέστερη, οπότε και τα τρία πολυώνυμα 6ου βαθμού που προσαρμόζονται πάνω σ' αυτά ακολουθούν πιστά τη συνάρτηση. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται ένα ακριβέστατο αποτέλεσμα.

Να παρατηρήσουμε πως επαναλαμβάνοντας μερικές φορές τον τύπο του Cotes, επιτυγχάνουμε εντυπωσιακή ακρίβεια. Το πόσες επαναλήψεις χρειάζονται υπολογίζεται θεωρητικά από τον τύπο του σφάλματος. Στην πράξη, για τις τρέχουσες ανάγκες, και εφόσον πρόκειται για συναρτήσεις που δεν έχουν πολύ γρήγορες και μεγάλες αυξομειώσεις τιμών, αρκεί να διατηρούμε ένα βήμα  $h$  μικρότερο του 0,5.



**Σχήμα 8.7** Τα 19 σημεία της συνάρτησης που ολοκληρώνεται (αριστερά) και τα τρία πολώνυμα 6ου βαθμού που τα προσεγγίζουν (δεξιά).

Τέλος, να παρατηρήσουμε πως χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή η ολοκλήρωση συναρτήσεων που ταλαντώνονται γύρω από τον άξονα των  $x$  (οπότε το ολοκλήρωμά τους είναι κοντά στο μηδέν). Στην περίπτωση αυτή το σχετικό σφάλμα του αποτελέσματος μπορεί να γίνει πολύ μεγάλο.

### Παράδειγμα 2<sup>ο</sup>:

Στο παράδειγμα αυτό θα δούμε μία πρακτική μέθοδο εξακρίβωσης της ακρίβειας του υπολογισμού ενός ολοκληρώματος, ενώ ταυτόχρονα θα περιγράψουμε μία μέθοδο αυτόματης αλλαγής του αριθμού επαναλήψεων του τύπου του Cotes, σε ένα φύλλο του Excel.

Η βασική ιδέα στηρίζεται στην αρχή πως όσο μικρότερο βήμα χρησιμοποιείται κατά την αριθμητική ολοκλήρωση, τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια επιτυγχάνεται. Κατά τη λύση λοιπόν του ολοκληρώματος:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

προσπαθώντας να υλοποιήσουμε την προφανή αυτή αρχή, προβαίνουμε στις εξής ενέργειες:

- Αρχικά επιλέγουμε τη μέθοδο του Cotes για  $n=6$ , που εκφράζει την ολοκλήρωση ενός συμπτωτικού πολυωνύμου έκτου βαθμού, διαμερίζοντας το διάστημα στο οποίο εφαρμόζεται σε 6 υποδιαστήματα (ίσου μήκους).
- Στη συνέχεια αποφασίζουμε για το αρχικό πλήθος ( $k$ ) των επαναλήψεων του τύπου του Cotes, καλύπτοντας το διάστημα ολοκλήρωσης ( $a, b$ ). Επομένως, το συνολικό διάστημα θα διαμεριστεί σε  $n=6k$  διαστήματα, των οποίων το μήκος θα είναι ίσο με  $h=(b-a)/n$ . Στη συνέχεια υπολογίζουμε την τιμή  $I_k$  του ολοκληρώματος.
- Αμέσως μετά επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία, διπλασιάζοντας το πλήθος των επαναλήψεων του τύπου ( $n=2k$ ) και υπολογίζουμε την τιμή  $I_{2k}$  του ολοκληρώματος.
- Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία αυτή, διπλασιάζοντας διαρκώς το πλήθος των επαναλήψεων του τύπου, δημιουργώντας μια ακολουθία τιμών του ολοκληρώματος:  $I_k, I_{2k}, I_{4k}, I_{8k}, \dots$ , η οποία συγκλίνει στην ακριβή τιμή. Σταματούμε την επανάληψη αυτή όταν η διαφορά της τελευταίας τιμής από την προτελευταία γίνει μικρότερη από την απαιτούμενη ακρίβεια.

Προσπαθούμε να αυτοματοποιήσουμε τη διαδικασία αυτή με τον τρόπο που περιγράφεται στο επόμενο παράδειγμα φύλλου του Excel:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Υπολογισμός του ολοκληρώματος						
2	$\alpha=x_0=$	...		$k=$	...		
3	$b=x_n=$	...		$v=$	$=6 \cdot E2$		
4	$h=$	$=(B3-B2)/E3$					
5						sum=	=
6	$x$	$f(x)$	$c$	$cf(x)$		Intgrl=	=
7	$=B2$	$=if(...)$	41	$=C7 \cdot B7$			
8	$=A7+B\$4$	...	216	...			
9	...	...	27	...			
10	...	...	272	...			
11	...	...	27	...			
12	...	...	216	...			
13	...	...	82	...			
14	...	...	$=if(...)$	...			
15	...	...	...	...			
16	...	...	...	...			

όπου:

- Τοποθετούμε στα κελιά B2 και B3 τα όρια ολοκλήρωσης. Στο κελί E2 το πλήθος των επαναλήψεων του τύπου του Cotes (k). Στο κελί E3 υπολογίζουμε το συνολικό πλήθος των υποδιαστημάτων ( $v=6k$ ).
- Δημιουργούμε τον άξονα (την στήλη) των τιμών του ορίσματος ( $x$ ) σέρνοντας το κελί A8 (όπως είναι γραμμένο) για 3000 θέσεις, μέχρι το κελί A3007 (πράγμα που θα μας επιτρέψει να επιλέξουμε σαν μέγιστη τιμή το  $k=500$ ).
- Δημιουργούμε τον άξονα (την στήλη) των τιμών της συνάρτησης, οι οποίες πρέπει να μηδενίζονται όταν  $x > b$ . Αυτό επιτυγχάνεται με την εντολή:

$=if(abs(A7-B\$3)<0.000001;f(B3);if(A7<B\$3;f(A7);0))$

η οποία ανιχνεύει αρχικά (με την 1<sup>η</sup> if) εάν το τρέχον  $x$  (το A7 θα μεταβάλλεται διαρκώς με το σύρσιμο του τύπου) βρίσκεται πολύ κοντά στην τελική τιμή  $b$  (ακριβώς ίση πολύ σπάνια θα γίνει, για τον λόγο αυτό είμαστε πολύ προσεκτικοί με τις ισότητες). Αν αυτό αληθεύει τότε υπολογίζεται η τιμή της συνάρτησης για  $x=b$ . Αν η λογική πρόταση της 1<sup>ης</sup> if δεν αληθεύει, τότε με τη δεύτερη if ανιχνεύουμε εάν το τρέχον  $x$  είναι μικρότερο του  $b$ , οπότε υπολογίζεται η τιμή της συνάρτησης για το τρέχον  $x$ . Αλλιώς, στο κελί θα τοποθετηθεί το μηδέν.

- Δημιουργούμε τον άξονα (την στήλη) των σταθερών  $c$  του τύπου του Cotes, ως εξής: Αρχικά συμπληρώνουμε στα κελιά C7 έως C13 τις τιμές: 41, 216, 27, 272, 27, 216, 82. Από το κελί C14 και κάτω πρέπει να επαναληφθούν οι τιμές 216, 27, κλπ..., ενώ στο τελευταίο όλων των κελιών θα πρέπει να κλείνει και η τελευταία επανάληψη του τύπου και να τοποθετηθεί η τιμή  $c=41$ . Αυτό επιτυγχάνεται με την εντολή:

$=if(abs(A14-B\$3)<0.000001;41;if(A14<B\$3;C8;0))$

η οποία λειτουργεί (όπως προηγουμένως) ανιχνεύοντας εάν το τρέχον  $x$  είναι ίσο με το  $b$ , οπότε  $c=41$ . Αλλιώς, αν το τρέχον  $x$  είναι μικρότερο του  $b$ , επαναλαμβάνει την τιμή του  $c$  που υπάρχει έξι κελιά πιο πάνω ή θέτει το μηδέν.

### Αριθμητικό παράδειγμα:

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{\pi} x^3 \sin(x^4) dx$$

και να γίνει διερεύνηση για την ακρίβεια του τελικού αποτελέσματος.

### Λύση:

Με τη βοήθεια του φύλλου του Excel που δημιουργήθηκε σύμφωνα με το προηγούμενο υπόδειγμα υπολογίζουμε την ακολουθία τιμών  $I_j$ :

$$I_{10} = -2,28288,$$

$$I_{20} = 2,3294976,$$

$$I_{40} = 0,4633084,$$

$$I_{80} = 0,500087461,$$

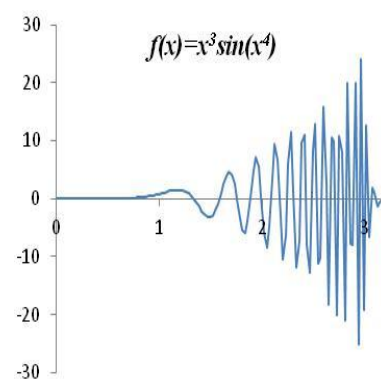
$$I_{160} = 0,49995164,$$

$$I_{320} = 0,499951399,$$

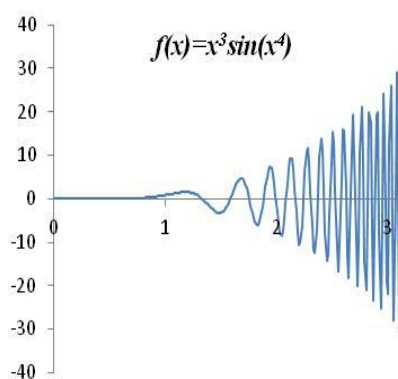
$$I_{500} = 0,499951398$$

η οποία συνέκλινε στην τιμή  $I_{500} = 0,499951398$ , η οποία είναι και η απολύτως ακριβής.

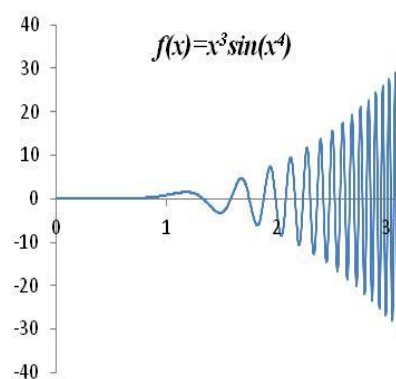
Επειδή η αρχική διακύμανση των τιμών θα φανεί περίεργη στον αναγνώστη, αξίζει μια ματιά στις γραφικές παραστάσεις που παίρνουμε, ανάλογα με τον αριθμό των επαναλήψεων του τύπου:



Επαναλήψεις  $k=20$



Επαναλήψεις  $k=40$



Επαναλήψεις  $k=160$

Στα πιο πάνω γραφήματα παρατηρούμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που παλινδρομεί γύρω από την τιμή  $y=0$ , με ρυθμούς καρδιογραφήματος, πράγμα που μαρτυρά πως η τιμή του θα είναι πολύ κοντά στο μηδέν, το οποίο θα εξάγεται από άθροισμα ισχυρών θετικών και αρνητικών τιμών. Για τον λόγο

αυτό χρειαστήκαμε τόσες επαναλήψεις ενός τόσο ισχυρού τύπου, έτσι ώστε να επιτύχουμε μεγάλη ακρίβεια...

## 8.6. Υλοποίηση μεθόδου Cotes στο MATLAB

Η συνάρτηση `int_Cotes`, που ακολουθεί, έχει παραμέτρους

- `f` = την υπό ολοκλήρωση συνάρτηση π.χ. `'x^2+2*x+sin(x)'`
- `a,b` = τα όρια ολοκλήρωσης
- `Ncotes` = το `n` της μεθόδου Cotes
- `Nsteps` = ο αριθμός επαναλήψεων της μεθόδου

Η έξοδος της

- `integral` = η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος.

Η συνάρτηση υλοποιεί τη μέθοδο Cotes για `n = 1` έως `6`. Το πλήθος των υποδιαστημάτων που θα χωριστεί το διάστημα ολοκλήρωσης είναι `Ncotes × Nsteps`.

```
function integral=int_Cotes(f,a,b,Ncotes,Nsteps)

f=vectorize(inline(f));

if (Ncotes>6)||(Ncotes<1)
    error('myApp:argChk', 'To Ncotes μπορεί να παίρνει τιμές  
από 1 έως 6')
end

N=Ncotes*Nsteps+1;
C=[ 1/2 1/3 3/8 2/45 5/288 1/140 ];

cc = [ 1    1    0    0    0    0    0;
       1    4    1    0    0    0    0;
       1    3    3    1    0    0    0;
       7   32   12   32    7    0    0;
      19   75   50   50   75   19    0;
      41  216   27  272   27  216  41];

%Δημιουργία πίνακα συντελεστών c
for i=1:N
    c(i)=0;
```



```

end
for i=1:Ncotes:N-1
    for j=1:Ncotes+1
        c(i+j-1)=c(i+j-1)+cc(Ncotes,j);
    end
end
end

%Υπολογισμός ολοκληρώματος
dx=(b-a)/(N-1);
s=0;
for i=1:N
    x=a+(i-1)*dx;
    s=s+c(i)*f(x);
end

integral=C(Ncotes)*s*dx;

```

## Κριτήρια αξιολόγησης

### Κριτήριο αξιολόγησης 1

Να αποδείξετε πως εάν ολοκληρώσουμε το δευτεροβάθμιο συμπτωτικό πολυώνυμο του Newton, θα καταλήξουμε στον τύπο:

$$\begin{aligned} I &= \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} p(x_k) dx_k = \\ &= h \int_0^2 \left[ y_0 + k \Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 y_0 \right] dx_k = \\ &= \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + y_2] \end{aligned}$$

### Κριτήριο αξιολόγησης 2

Να υπολογιστεί με τις μεθόδους Cotes n=3 και n=6 το ολοκλήρωμα

$$\int_1^5 \frac{x^2 + \ln(x)}{x} dx$$

χωρίζοντας την περιοχή ολοκλήρωσης σε τουλάχιστον 20 υποδιαστήματα. Χρησιμοποιήστε ίδιο αριθμό υποδιαστημάτων για τις δύο μεθόδους.

### Κριτήριο αξιολόγησης 3

Δίνεται ο πρόβολος, με μήκος  $L=2$  m, με καταναμημένο φορτίο που δίνεται από τη συνάρτηση:

$$q(x) = 3 - (x - 0.6)^2$$

Να υπολογίσετε:

- Το συνολικό φορτίο
- Την οριζόντια συντεταγμένη του κέντρου βάρους του φορτίου

Δίνονται:

$$Q_{ολ} = \int_0^L q(x) dx, \quad x_{κβ} = \frac{\int_0^L x q(x) dx}{Q_{ολ}}$$

Υπόδειξη: Για την ολοκλήρωση, χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Cotes n=2 η με 8 υποδιαστήματα. Οι πράξεις να γίνουν με τουλάχιστον 3 δεκαδικά.

#### Κριτήριο αξιολόγησης 4

Θέλουμε να κατασκευάσουμε μία τσιμεντένια εξέδρα με δύο σκαλοπάτια όπως αυτή του διπλανού σχήματος (1 μονάδα του σχήματος αντιστοιχεί σε 1 m). Το πρώτο σκαλοπάτι (κάτω μέρος του σχήματος) έχει ύψος 50 cm από το έδαφος και η καμπύλη του δίνεται από τη σχέση  $f(x) = 1 - x^2$ . Το δεύτερο σκαλοπάτι έχει ύψος 30 cm από το έδαφος και η καμπύλη του δίνεται από τη σχέση  $g(x) = 2 - 2x^4$ . Να υπολογιστεί πόσα m<sup>3</sup> σκυρόδεμα θα χρειαστούμε. Τα εμβαδά να υπολογιστούν με τις μεθόδους Cotes n=4 και n=6 (για το πρώτο και δεύτερο σκαλοπάτι αντίστοιχα), χρησιμοποιώντας τον ίδιο αριθμό υποδιαστημάτων για τις δύο μεθόδους.

#### Κριτήριο αξιολόγησης 5

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2$  και  $g(x) = \sqrt{x}$ . Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου ανάμεσα στις δύο καμπύλες. Χρησιμοποιείστε τη μέθοδο Cotes n=6 παίρνοντας τουλάχιστον 20 υποδιαστήματα. .

## Κεφάλαιο 9. Αριθμητική επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων

### Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι πιο συνηθισμένες μέθοδοι αριθμητικής επίλυσης διαφορικών εξισώσεων. Ξεκινώντας από τις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης, παρουσιάζονται οι μέθοδοι του Euler, του Taylor και των Runge–Kutta. Στη συνέχεια γίνεται γενίκευση των μεθόδων για διαφορικές εξισώσεις δεύτερης και μεγαλύτερης τάξης, καθώς και για συστήματος διαφορικών εξισώσεων. Τέλος παρουσιάζονται εφαρμογές της αριθμητικής επίλυσης διαφορικών εξισώσεων σε προβλήματα δυναμικής. Συγκεκριμένα μελετώνται οι περιπτώσεις του μονοβάθμιου και του διβάθμιου ταλαντωτή

### Προαπαιτούμενη γνώση

Το κεφάλαιο προϋποθέτει ότι ο αναγνώστης έχει γνώσεις Μαθηματικών I και Μαθηματικών II των Α' και Β' Εξαμήνου σπουδών, καθώς και του κεφαλαίου 3. Επίσης απαραίτητη είναι η βασική γνώση χρήσης του προγράμματος Excel. Για την κατανόηση της υλοποίησης των μεθόδων σε MATLAB απαιτούνται βασικές γνώσεις προγραμματισμού και χρήσης του προγράμματος MATLAB.

## 9.1 Γενικές γνώσεις για τις Διαφορικές Εξισώσεις

### 9.1.1 Το πρόβλημα και οι πρώτοι ορισμοί

Για ευκολία ας ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα. Θα προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε την εξίσωση:

$$y'' = 24x^2 \quad (9.1.1)$$

Η εξίσωση αυτή δηλώνει πως η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης  $y$  (προφανώς εννοεί της  $y(x)$ ) είναι ίση με την πολυωνυμική συνάρτηση  $24x^2$ . Επειδή συνήθως σε μία εξίσωση αναζητούμε την τιμή μιας άγνωστης ποσότητας, έτσι και στην παραπάνω εξίσωση αναζητούμε την άγνωστη συνάρτηση  $y(x)$ , η οποία επαληθεύει την εξίσωση αυτή. Επειδή η εξίσωση περιέχει παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης, ονομάζεται **διαφορική εξίσωση**.

Προφανώς, η συνάρτηση  $y(x)$  υπολογίζεται με δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις:

$$y'(x) = \int 24x^2 dx = 8x^3 + c_1$$

και

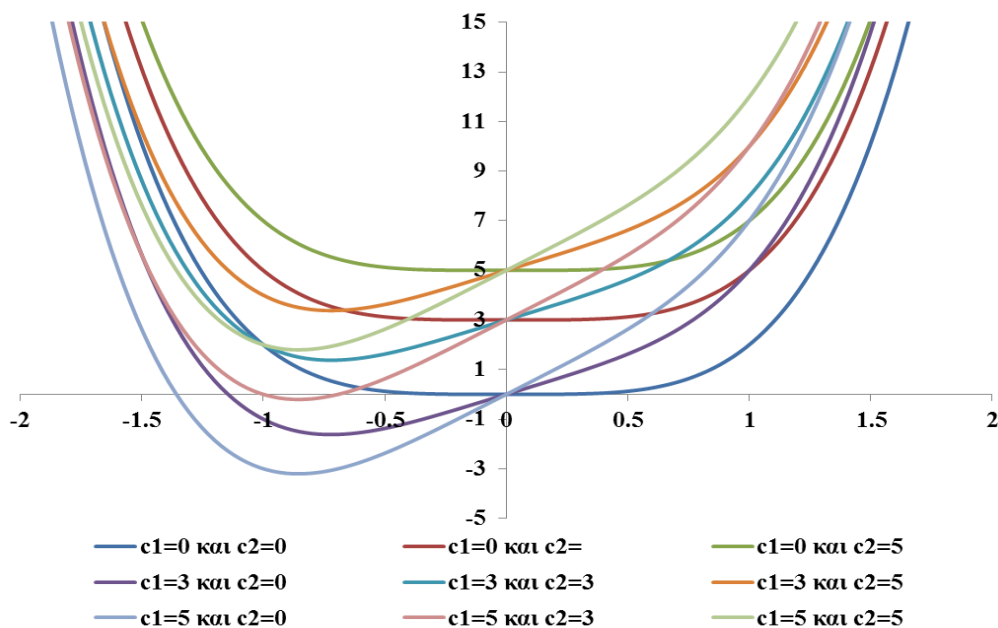
$$y(x) = \int (8x^3 + c_1) dx = 2x^4 + c_1 x + c_2$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, πως η διαφορική εξίσωση έχει σαν λύση ακριβώς μία συνάρτηση που περιέχει δύο αυθαίρετες σταθερές, λόγω των δύο διαδοχικών αόριστων ολοκληρώσεων. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί σε ένα σημαντικό συμπέρασμα:

**Μία εξίσωση που δίνει πληροφορίες για κάποια παράγωγο μιας άγνωστης συνάρτησης, δεν οδηγεί στον υπολογισμό μιας μοναδικής συνάρτησης αλλά σε μία οικογένεια συναρτήσεων που περιέχει μία ή περισσότερες αυθαίρετες σταθερές.**

Αξίζει, μάλιστα, να δούμε μια γραφική παράσταση των λύσεων που παίρνουμε για διάφορες τιμές των  $c_1$  και  $c_2$ .

Παρατηρώντας το γράφημα του σχήματος 9.1, δυσκολευόμαστε να βγάλουμε συμπέρασμα. Όμως, αντιλαμβανόμαστε πως μεταβάλλοντας τις τιμές των αυθαίρετων σταθερών, μπορούμε να καλύψουμε έναν «μεγάλο χώρο» του επιπέδου  $Oxy$ .



**Σχήμα 9.1** Λύσεις της διαφορικής εξίσωσης για διαφορετικές τιμές των αυθαίρετων σταθερών.

Άμεσα, προκύπτει το ερώτημα για το κατά πόσο μπορούμε να υπολογίσουμε, με κάποιο τρόπο, τις δύο αυθαίρετες σταθερές της συνάρτησης που προέκυψε σαν λύση της διαφορικής εξίσωσης. Αντιλαμβανόμαστε πως μας χρειάζονται δύο δεδομένα, έτσι ώστε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση  $y(x)$  κατά μονοσήμαντο τρόπο, δημιουργώντας ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε πως χρειαζόμαστε δύο διαφορετικές τιμές της άγνωστης συνάρτησης, της μορφής:

$$y(x_1)=y_1 \text{ και } y(x_2)=y_2$$

πράγμα που μπορεί να συμβεί. Συνηθέστερο όμως είναι να δίνονται δεδομένα που αφορούν στην τιμή της συνάρτησης και της πρώτης παραγώγου, στο ίδιο  $x$ , όπως φαίνεται στις επόμενες ισότητες:

$$y(x_0)=y_0 \text{ και } y'(x_0)=y_0'$$

Αν, για παράδειγμα υιοθετήσουμε τις ισότητες:

$$y(0)=1 \text{ και } y'(0)=-1$$

τότε, με αντικατάσταση στις εξισώσεις που περιγράφουν την  $y$  και την  $y'$ , έχουμε:

$$-1=0+c_1 \text{ και } 1=0+c_2$$

απ' όπου προκύπτουν οι λύσεις:

$$y(x) = 2x^4 - x + 1 \text{ και } y'(x) = 8x^3 - 1$$



Το παράδειγμα αυτό μας οδηγεί στα παρακάτω συμπεράσματα:

- Η διαφορική εξίσωση, περιείχε πληροφορίες για τη δεύτερη παράγωγο μιας άγνωστης συνάρτησης, της  $y(x)$ .

- Η λύση της περιείχε δύο αυθαίρετες σταθερές (που το πλήθος τους είναι ακριβώς ίσο με την τάξη της παραγώγου). Η λύση αυτή ονομάζεται **Γενική Λύση** της διαφορικής εξίσωσης.
- Για να υπολογίσουμε τις αυθαίρετες σταθερές χρειαστήκαμε δύο δεδομένα, την τιμή της άγνωστης συνάρτησης σε ένα σημείο  $x_0$  και την τιμή της πρώτης παραγώγου της  $y(x)$ , στο ίδιο ακριβώς σημείο. Τις σχέσεις αυτές θα τις καλούμε στη συνέχεια **Αρχικές Συνθήκες**.

Εύλογα, λοιπόν, καταλήγουμε στον Ορισμό:

**Ορισμός:** Η διαφορική εξίσωση (δ.ε.) είναι μία εξίσωση η οποία δίνει πληροφορίες για τις παραγώγους μιας άγνωστης συνάρτησης και ζητά τον υπολογισμό αυτής της άγνωστης συνάρτησης.



Η γενική μορφή μιας δ.ε. είναι η:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(v)}) = 0 \quad (9.1.2)$$

όπου

$x$  είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή,

$y=y(x)$  είναι η άγνωστη συνάρτηση,

$y', y'', \dots, y^{(v)}$  είναι η πρώτη, η δεύτερη, ... και η  $v$ -οστή παράγωγος της άγνωστης συνάρτησης  $y(x)$ ,

$v$  είναι η τάξη της δ.ε. (η τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου που εμφανίζεται στη δ.ε.).

**Ορισμός:** Μία συνάρτηση  $y(x)$  είναι λύση της δ.ε. (9.1.2), όταν την επαληθεύει. Μία συνάρτηση  $y(x)$  επαληθεύει την (9.1.2), εάν η εν λόγω σχέση αληθεύει όταν θέσουμε σ' αυτήν, στη θέση του  $y$  τη συνάρτηση  $y(x)$  και στη θέση των παραγώγων ( $y', y'', \dots, y^{(v)}$ ) τις αντίστοιχες παραγώγους της  $y(x)$ .



**Ορισμός:** Μία συνάρτηση  $y(x, c_1, c_2, \dots, c_v)$  (η οποία περιέχει  $v$  αυθαίρετες σταθερές) είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης (9.1.2), όταν την επαληθεύει και ονομάζεται **Γενική Λύση** της.



**Ορισμός:** Ο υπολογισμός των  $v$  αυθαίρετων σταθερών της γενικής λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης  $v$ -οστού βαθμού γίνεται με τη βοήθεια  $v$  δεδομένων της μορφής:

$$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0', y''(x_0)=y_0'', \dots, y^{(v-1)}(x_0)=y_0^{(v-1)}$$

και λέγονται **Αρχικές Συνθήκες** της διαφορικής εξίσωσης.



**Ορισμός:** Αντικαθιστώντας στη γενική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης, την τιμή των  $v$  αυθαίρετων σταθερών που υπολογίσαμε με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών, καταλήγουμε σε μία συνάρτηση της μορφής  $y=y(x)$ , η οποία λέγεται «**Μερική Λύση της διαφορικής εξίσωσης που αντιστοιχεί στις δοσμένες αρχικές συνθήκες**».



**Ορισμός:** Τη γενική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης την ονομάζουμε **Μονοπαραμετρική Οικογένεια Καμπύλων**. Τη γενική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης την ονομάζουμε **Διπαραμετρική Οικογένεια Καμπύλων** κ.λ.π..



### Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>:

Να δείξετε πως η συνάρτηση  $y(x) = xe^{-x}$  είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης:  $y'' + y' + y = e^{-x}(1-x)$

#### Λύση:

Υπολογίζουμε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο ( $y'$  και  $y''$ ) και τις αντικαθιστούμε (μαζί με την  $y(x)$ ) στη δοσμένη διαφορική εξίσωση:

$$\left. \begin{aligned} y(x) &= xe^{-x} \\ y'(x) &= e^{-x} - xe^{-x} \\ y''(x) &= -2e^{-x} + xe^{-x} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} y'' + y' + y &= e^{-x}(x-1) \\ \Rightarrow \end{aligned}$$

$$-2e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} - xe^{-x} + xe^{-x} = -e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-1)$$

Διαπιστώσαμε, λοιπόν, πως η συνάρτηση  $y(x)$  επαληθεύει τη δοσμένη διαφορική εξίσωση, άρα είναι μία μερική λύση της διότι δεν περιέχει αυθαίρετες σταθερές.



### Παράδειγμα 2<sup>ο</sup>:

Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης  $y' = 2xy$ , καθώς και η μερική της λύση που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη:  $y(0) = 1$ .

#### Λύση:

Η δοσμένη διαφορική εξίσωση εντάσσεται σε μία ομάδα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης που ονομάζονται «Διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών». Στις εξισώσεις αυτές έχουμε τη δυνατότητα, θεωρώντας ως κλάσμα την παράγωγο  $dy/dx$  και χωρίζοντας το κλάσμα, να μεταφέρουμε όλα τα  $x$  της διαφορικής εξίσωσης με το  $dx$  και όλα τα  $y$  με το  $dy$ . Αμέσως μετά ολοκληρώνουμε κατά μέλη...

Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2x dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2x dx \Rightarrow \ln|y| = x^2 + c \Rightarrow$$

$$e^{\ln|y|} = e^{x^2+c} \Rightarrow y(x, c) = \pm e^{x^2} e^c \Rightarrow y(x, c) = Ce^{x^2}$$

Άρα, η γενική λύση της δοσμένης διαφορικής εξίσωσης είναι η

$$y(x, c) = Ce^{x^2}$$

όπου αντικαταστήσαμε το  $\pm e^c$  με το  $C$ . Τη γενική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης την ονομάσαμε Μονοπαραμετρική Οικογένεια Καμπύλων.

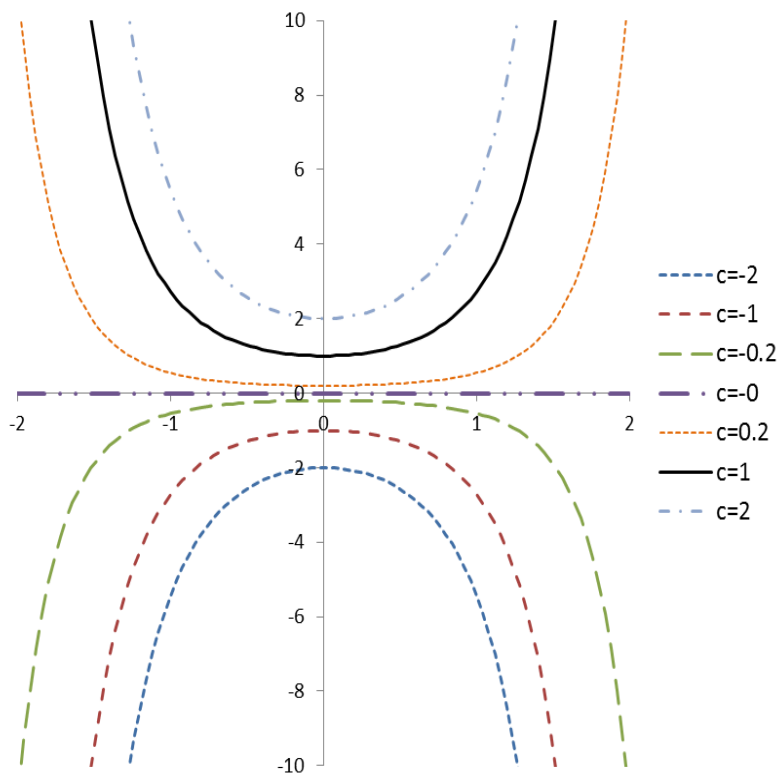
Για να υπολογίσουμε την τιμή του  $C$  και να καταλήξουμε σε μερική λύση, αντικαθιστούμε στη διαφορική εξίσωση την αρχική συνθήκη:  $y(0) = 1$ .

$$y(x, c) = Ce^{x^2} \Rightarrow 1 = Ce^0 \Rightarrow C = 1$$

και η μερική λύση:

$$y(x) = e^{x^2}$$

Οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης για διαφορετικές τιμές των αυθαίρετων σταθερών και η μερική λύση στην οποία καταλήξαμε παρουσιάζονται στο Σχήμα 9.2



**Σχήμα 9.2** Λύσεις της διαφορικής εξίσωσης για διαφορετικές τιμές των αυθαίρετων σταθερών και η μερική λύση στην οποία καταλήξαμε (η μαύρη για  $C=1$ ).



### Παράδειγμα 3ο:

Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y' = f(x, y) = \frac{2y + x^3}{x}$$

και η μερική της λύση που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη:  $y(1) = 2$

### Λύση:

Η διαφορική εξίσωση του τρέχοντος παραδείγματος μπορεί να λάβει τη μορφή:

$$y' = f(x, y) = \frac{2y + x^3}{x} \Rightarrow y' - \frac{2}{x}y = x^2$$

η οποία εντάσσεται σε μία ομάδα διαφορικών εξισώσεων, που καλούνται **Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις πρώτης τάξης**. Οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης είναι εξισώσεις που συναντώνται συχνά στα προβλήματα Φυσικής γενικά, αλλά και της Μηχανικής ειδικότερα. Η μορφή τους είναι η εξής:

$$A(x)y' + B(x)y = C(x)$$

ή συνηθέστερα

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad (9.1.3)$$

όπου



$$P(x) = \frac{B(x)}{A(x)}$$

και

$$Q(x) = \frac{C(x)}{A(x)}$$

Η γενική λύση των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δίνεται από τον τύπο:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \left[ c + \int \left( Q(x) e^{\int P(x)dx} \right) dx \right] \quad (9.1.4)$$

Εύκολα διαπιστώνουμε πως η γραμμική διαφορική εξίσωση του παραδείγματος, έχει τις ποσότητες  $P(x)$  και  $Q(x)$ :

$$P(x) = -\frac{2}{x} \quad \text{και} \quad Q(x) = x^2 \quad (\text{ο συντελεστής του } y \text{ και ο όρος του } \beta' \text{ μέλους})$$

Υπολογίζουμε τα δύο ολοκληρώματα του τύπου (9.1.4),

$$\int P(x)dx = -\int \frac{2}{x} dx = -2 \ln x = \ln x^{-2}$$

$$\int \left( Q(x) e^{\int P(x)dx} \right) dx = \int x^2 e^{\ln x^{-2}} dx = \int x^2 x^{-2} dx = \int dx = x$$

Η γενική λύση:

$$y(x, c) = e^{-\ln x^{-2}} [c + x] = cx^2 + x^3$$

και για τη μερική λύση, αντικαθιστούμε την αρχική συνθήκη στη γενική λύση, υπολογίζοντας την τιμή της αυθαίρετης σταθεράς  $c$ :

$$y(1)=2 \Rightarrow 2 = c + 1 \Rightarrow c = 1$$

οπότε η μερική λύση:

$$y(x) = x^3 + x^2$$



## 9.1.2 Γεωμετρική ερμηνεία των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης

Σύμφωνα με τα όσα είπαμε, η δ.ε. 1ης τάξης συμβολίζεται με τη σχέση:

$$F(x, y, y') = 0$$

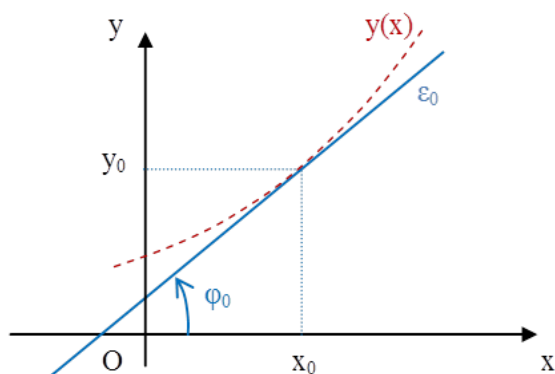
Στη συνέχεια, θεωρούμε πως η προηγούμενη σχέση είναι αρκετά βολική, έτσι ώστε να μπορούμε να τη λύσουμε ως προς  $y'$ , μετατρέποντάς τη στην:

$$y' = f(x, y) \quad (9.2.1)$$

**Αρχικά να τονιστεί πως η έκφραση  $f(x, y)$  δεν έχει σχέση με την άγνωστη συνάρτηση  $y(x)$ , αλλά είναι μία συνάρτηση δύο μεταβλητών, η οποία περιγράφει το δεύτερο μέλος της διαφορικής εξίσωσης.** Η σχέση 9.2.1 ορίζει, με **πεπλεγμένο τρόπο**, την πρώτη παράγωγο της άγνωστης συνάρτησης  $y(x)$ . Η λύση της οδηγεί στην ορισμό της μονοπαραμετρικής οικογένειας καμπύλων (συναρτήσεων)  $y(x, c)$ .

Στη συνέχεια θα θέσουμε στην 9.2.1 τις συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου  $(x_0, y_0)$  του επιπέδου  $Oxy$  (με την προφανή προϋπόθεση να ανήκει στο πεδίο ορισμού της  $f(x, y)$ , δηλαδή του  $\beta'$  μέλος της δ.ε.). Τότε η σχέση της δ.ε. παίρνει τη μορφή:

$$y' = f(x_0, y_0) = \lambda_0 = \text{σταθ.}$$



**Σχήμα 9.3** Υπολογισμός της κλίσης της άγνωστης συνάρτησης  $y(x)$ , από τη σχέση  $\lambda_0 = \tan(\varphi_0)$ .

Το συμπέρασμα που βγαίνει, από την τελευταία ισότητα, είναι πως «η δ.ε. 9.2.1 μας επιτρέπει να γνωρίζουμε την τιμή της παραγώγου της άγνωστης συνάρτησης (της  $y(x)$ ), σε οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου». Για παράδειγμα, στο σημείο  $(x_0, y_0)$  η τιμή της παραγώγου της  $y$  είναι ίση με το  $\lambda_0$ .

Αξίζει να υπενθυμίσουμε πως στην περίπτωση αυτή...

- η τιμή  $\lambda_0$  είναι η κλίση της καμπύλης της άγνωστης συνάρτησης  $y(x)$ , στο σημείο  $(x_0, y_0)$ .
- ή αλλιώς, το  $\lambda_0$  είναι η κλίση της ευθείας  $\varepsilon_0$ , η οποία εφάπτεται στην άγνωστη συνάρτηση  $y(x)$  στο σημείο  $(x_0, y_0)$ ,
- ή τέλος, εάν ονομάσουμε  $\varphi_0$  τη γωνία της  $\varepsilon_0$ , με τη θετική προέκταση του άξονα των  $x$  (ξεκινώντας πάντα από τον άξονα), θα ισχύει  $\lambda_0 = \tan(\varphi_0)$ .

### 9.1.3 Το πεδίο των εφαπτόμενων ευθειών

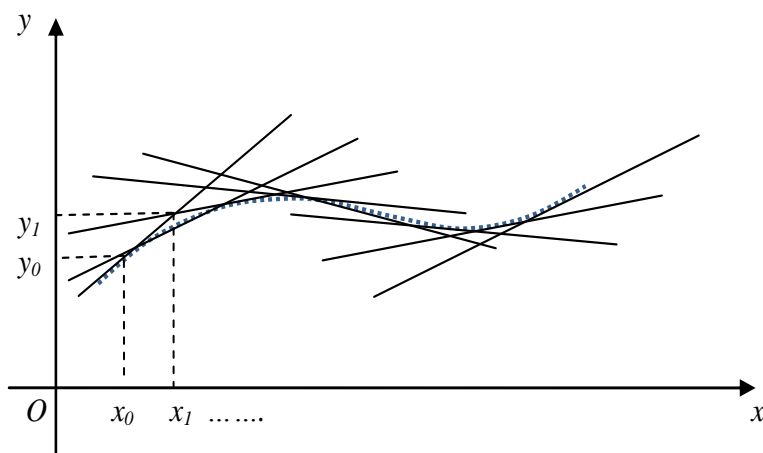
Ας υποθέσουμε πως μια διαφορική εξίσωση 1<sup>ης</sup> τάξης μπορεί να λυθεί ως προς την παράγωγο της άγνωστης συνάρτησης και να γραφεί υπό τη μορφή:  $y' = f(x, y)$ . Έστω και μία δοσμένη αρχική συνθήκη:  $y(x_0) = y_0$ . Θέτοντας τις τιμές  $x_0$  και  $y_0$  στο β' μέλος της δ.ε. έχουμε τη σχέση:

$$y' = f(x_0, y_0) = k_0 \quad (9.2.1)$$

η οποία διαβάζεται: «η παράγωγος –η κλίση– της άγνωστης συνάρτησης  $y(x)$ , όταν αυτή διέρχεται από το σημείο της αρχικής συνθήκης  $(x_0, y_0)$ , είναι ίση με το  $k_0$ ». Άρα η ευθεία ( $\varepsilon_0$ ) η οποία διέρχεται από το σημείο αυτό και έχει κλίση  $k_0$ , θα εφάπτεται στην καμπύλη της άγνωστης συνάρτησης. Βέβαια, με δεδομένο το ότι η λύση της διαφορικής εξίσωσης 9.2.1 είναι μία μονοπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων, η ευθεία  $\varepsilon_0$  εφάπτεται στη συνάρτηση  $y(x)$ , η οποία αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη:  $y(x_0) = y_0$ .

Στη συνέχεια, παίρνοντας ως αρχική συνθήκη ένα διπλανό σημείο του  $(x_0, y_0)$ , που να βρίσκεται πάνω στην ευθεία  $\varepsilon_0$  (έστω το  $(x_1, y_1)$ ), υπολογίζουμε μιαν άλλη ευθεία (την  $\varepsilon_1$ ) που εφάπτεται στην άγνωστη συνάρτηση, στο σημείο  $(x_1, y_1)$ . Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο διαπιστώνουμε πως δημιουργούμε μια ακολουθία ευθειών που εφάπτονται στην άγνωστη συνάρτηση, στα αντίστοιχα σημεία. Διαπιστώνουμε πως το σύνολο των ευθειών αυτών επιτρέπει να διαφανεί μια καμπύλη, η οποία προσεγγίζει τη μερική λύση της δοσμένης δ.ε., που να αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη:  $y(x_0) = y_0$ .

Γενικά η διαφορική εξίσωση  $y' = f(x, y)$  δίνει την παράγωγο (την κλίση) της άγνωστης μονοπαραμετρικής οικογένειας καμπύλων και επομένως ορίζει ένα πεδίο εφαπτόμενων ευθειών στο επίπεδο  $Oxy$ , με τον τρόπο που αυτό εμφανίζεται στην εικόνα 6.3.



**Σχήμα 9.4** Το πεδίο των εφαπτόμενων ευθειών που δημιουργείται από τη διαφορική εξίσωση  $y' = f(x, y)$ .

## 9.2 Αριθμητικές Μέθοδοι Επίλυσης Διαφορικών Εξισώσεων Πρώτης Τάξης

Η ύπαρξη αριθμητικών μεθόδων ολοκλήρωσης των διαφορικών εξισώσεων ήταν επιβεβλημένη, από τη στιγμή που ένα μεγάλο ποσοστό τους δεν μπορεί να λυθεί αναλυτικά. Η αναγκαιότητα, όμως, να δοθούν λύσεις σε ποικίλα προβλήματα των περισσότερων επιστημονικών πεδίων, τοποθέτησε τις μεθόδους αριθμητικής επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων, σε περίοπτη θέση της Αριθμητικής Ανάλυσης.

Τα μεγαλύτερα μειονεκτήματα της αριθμητικής επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων είναι δύο:

- **Υπολογίζουμε μόνο μερικές λύσεις** και όχι γενικές. Επομένως, είναι απαραίτητο τη διατύπωση μιας διαφορικής εξίσωσης, να τη συνοδεύουν και οι αρχικές συνθήκες που αφορούν στο συγκεκριμένο πρόβλημα.
- Ακόμη και οι μερικές λύσεις της άγνωστης συνάρτησης  $y(x)$  που υπολογίζουμε, δεν καταλήγουν σε μία συνάρτηση που δίνεται με μαθηματικό τύπο, αλλά σε μία συνάρτηση που ορίζεται με ένα πίνακα τιμών, στο ξεκίνημα του οποίου υπάρχουν οι αρχικές συνθήκες.

Παρ' όλα αυτά, οι εξελιγμένες μέθοδοι της Αριθμητικής Ανάλυσης επιτρέπουν στις λύσεις αυτές να έχουν ικανοποιητική ακρίβεια και αξιοπιστία.

Η κεντρική ιδέα των μεθόδων που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια συνοψίζεται στα επόμενα:

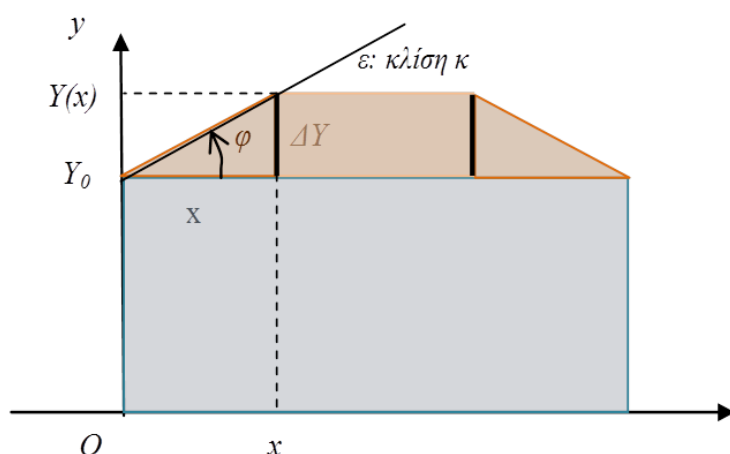
- Δίνεται η διαφορική εξίσωση  $y' = f(x, y)$ , με αρχική συνθήκη την  $y(x_0) = y_0$ .
- Οι μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης της διαφορικής εξίσωσης, ξεκινώντας από το σημείο  $(x_0, y_0)$ , υπολογίζουν το επόμενο σημείο:  $(x_1, y_1) = (x_0 + \Delta x, y(x_0 + \Delta x))$ .
- Στη γενική περίπτωση, από τη δυάδα  $(x_j, y_j)$ , υπολογίζεται το επόμενο σημείο:  $(x_{j+1}, y_{j+1})$ .
- Η επιλογή του μεγέθους  $\Delta x$ , που καλείται «**βήμα της αριθμητικής ολοκλήρωσης**» είναι προφανώς σημαντική, εισάγοντας έναν βασικό κανόνα: «Όσο μικρότερη είναι η τιμή του βήματος  $\Delta x$ , τόσο ακριβέστερος είναι ο υπολογισμός της επόμενης τιμής». Βέβαια, όσο μικρότερο είναι το βήμα ολοκλήρωσης, τόσο περισσότερους υπολογισμούς χρειαζόμαστε για να εκτιμήσουμε τις τιμές της άγνωστης συνάρτησης σε ένα δοσμένο διάστημα.

### 9.2.1 Η μέθοδος του Euler

Το επόμενο παράδειγμα πιστεύουμε πως αποτελεί σημαντική βοήθεια στην κατανόηση της μεθόδου που εξετάζουμε στην παρούσα παράγραφο.

#### Παράδειγμα:

Ένα κλασσικό παράδειγμα για Μηχανικούς, που αποδίδει την κεντρική ιδέα της μεθόδου του Euler, όπως και άλλων μεθόδων αριθμητικής ολοκλήρωσης διαφορικών εξισώσεων, είναι και το παρακάτω: Έχουμε τον εξωτερικό τοίχο μιας κατοικίας, του οποίου το ύψος είναι  $Y_0$ . Από το άνω πέρασ του τοίχου ξεκινάει μία κεραμοσκεπή με κλίση  $\kappa$ . Σε οριζόντια απόσταση  $x$  από το ξεκίνημα της κεραμοσκεπής θέλουμε να τοποθετήσουμε έναν ορθοστάτη με ύψος  $\Delta Y$ . Θέλουμε να υπολογίσουμε το ύψος του ορθοστάτη (διαφορά υψομέτρου  $\Delta Y$ ) και το συνολικό υψόμετρο του ψηλότερου άκρου της στέγης, ως συνάρτηση του  $x$ .



**Σχήμα 9.5** Το μέγεθος του ορθοστάτη και το συνολικό υψόμετρο κατοικίας, θεωρώντας πως το υψόμετρο ισούται με το μηδέν στη βάση του εξωτερικού τοίχου.

#### Λύση:

Αρχικά να παρατηρήσουμε πως, σε κάθε περίπτωση, η αριθμητική τιμή της κλίσης ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας που δημιουργεί την εν λόγω κλίση. Ακόμη κι αν, στην περίπτωση που η κλίση ενός επιπέδου (όπως αυτό της στέγης) σε σχέση με το οριζόντιο επίπεδο, δίνεται σαν ποσοστό. Πράγματι, αν υποθέσουμε πως η κλίση των δύο επιπέδων είναι 40%, αυτό σημαίνει πως η υψομετρική διαφορά, λόγω της κλίσης, αυξάνει κατά  $\Delta Y=40$  εκατοστά, για οριζόντια διαφορά απόστασης  $\Delta x=100$  εκατοστά. Έχουμε επομένως:

$$\tan(\varphi) = \frac{\Delta Y}{\Delta x} = \frac{40}{100} = 0.40$$

δηλαδή 40 εκατοστά, που αντιστοιχεί στο 40 τοις εκατό.

Γυρνώντας στο παράδειγμα έχουμε για την κλίση  $\kappa$  της στέγης:

$$\kappa = \tan(\varphi) = \frac{\Delta Y}{x} \Rightarrow \Delta Y = x \tan(\varphi) = x\kappa$$

απ' όπου βγάζουμε το συμπέρασμα πως «η διαφορά υψομέτρου που δημιουργεί ένα κεκλιμένο επίπεδο (ή μία ευθεία), με κλίση  $\kappa$  ως προς το οριζόντιο επίπεδο, λόγω μιας οριζόντιας μετατόπισης  $x$ , ισούται με το γινόμενο της οριζόντιας μετατόπισης, επί την κλίση  $\kappa$ ».

Τώρα, υπολογίζουμε το συνολικό υψόμετρο της κατοικίας, προσθέτοντας στο υψόμετρο του τοίχου  $Y_0$ , τη διαφορά υψομέτρου ( $\Delta Y$ ), λόγω της κλίσης ( $\kappa$ ) της στέγης:

▶

Δίνεται η διαφορική εξίσωση  $y'=f(x,y)$ , με αρχική συνθήκη  $y(x_0)=y_0$ . Αντικαθιστώντας τις τιμές της αρχικής συνθήκης στη διαφορική εξίσωση έχουμε:

$$\kappa=y'(x_0)=f(x_0,y_0)$$

The graph shows a blue curve  $y(x)$  and a red tangent line  $\varepsilon$  at the point  $(x_0, y_0)$ . A small red right triangle is drawn on the tangent line, with a horizontal side of length  $\Delta x$  and a vertical side of length  $\Delta y$ . The angle between the tangent line and the horizontal axis is labeled  $\varphi$ . The point on the curve at  $x_1 = x_0 + \Delta x$  is labeled  $y_1 = y_0 + \Delta y$ . The text  $\varepsilon: \text{με κλίση } \kappa = y'(x_0) = f(x_0, y_0) = \varepsilon\varphi(\varphi)$  is written next to the tangent line.

Υπολογίζουμε, λοιπόν:

$$y(x_1) = y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + \Delta y = y(x_0) + f(x_0, y_0) \Delta x \quad \Rightarrow$$

και επειδή, συχνά, το «βήμα»  $\Delta x$ , που το ονομάσαμε «Βήμα Ολοκλήρωσης», το συμβολίζουμε με το **h**, ο τύπος του Euler γράφεται:

180

## Παρατηρήσεις:

- Γίνεται φανερό πως όσο μικρότερο είναι το βήμα ολοκλήρωσης της διαφορικής εξίσωσης ( $h$ ), τόσο ακριβέστερος είναι ο υπολογισμός των τιμών  $y_1$ ,  $y_2$ , κ.λ.π..
- Συνήθως επιλέγουμε ιδιαίτερα μικρό  $h$  όταν έχουμε μεγάλη και γρήγορη διακύμανση των τιμών της άγνωστης συνάρτησης  $y(x)$ . Αυτό μπορούμε να το συμπεράνουμε από το μέγεθος και τη διακύμανση των τιμών της παραγώγου (δηλαδή, από τις τιμές που παίρνει το δεύτερο μέλος της διαφορικής εξίσωσης). Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της παραγώγου και όσο ταχύτερα μεταβάλλεται, τόσο μικρότερη πρέπει να είναι η τιμή του  $h$ .
- Το κάθε επόμενο σημείο στηρίζεται στο αμέσως προηγούμενο. Επομένως το μοναδικό σημείο που δεν περιέχει σφάλμα, είναι το πρώτο  $(x_0, y_0)$ , της αρχικής συνθήκης. Το επόμενο σημείο  $(x_1, y_1)$  περιέχει το σφάλμα που οφείλεται στην αντικατάσταση της καμπύλης, από την εφαπτόμενη ευθεία. Το μεθεπόμενο σημείο  $(x_2, y_2)$  επαναλαμβάνει τον προηγούμενο υπολογισμό, θεωρώντας το σημείο  $(x_1, y_1)$  ως αρχική συνθήκη. Άρα στο τρίτο σημείο έχουμε άθροιση του σφάλματος λόγω του υπολογισμού και του σφάλματος που εμπεριέχεται στην τιμή του  $y_1$ . Επομένως κατά την αριθμητική ολοκλήρωση των Δ.Ε., το σφάλμα του υπολογισμού διαρκώς μεγαλώνει. Ουσιαστικά, σε κάθε νέα προσέγγιση της τιμής της συνάρτησης, «πηδάμε» σε μία άλλη καμπύλη της μονοπαραμετρικής οικογένειας λύσεων της διαφορικής εξίσωσης.
- Η μέθοδος του Euler, ουσιαστικά, χρησιμοποιεί τη λογική του πεδίου των εφαπτόμενων ευθειών, για αυτό αξίζει να ξαναδούμε την Εικόνα 9.4.

## Ο υπολογισμός της μεθόδου του Euler με το Excel

Η εφαρμογή του τύπου του Euler στο Excel είναι απλούστατη και περιγράφεται στον επόμενο πίνακα:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Λύση της $y'=f(x,y)$						
2					$x$	$y(x)$	$y'(x)$	
3		Αρχική Συνθήκη			=C4	=C5	=f(E3,F3)	
4		$x_0=$	0		=E3+C\$6	=F3+C\$6*G3	=f(E4,F4)	
5		$y_0=$	2		=E4+C\$6	=F4+C\$6*G4	=f(E5,F5)	
6		$h=$	0.1		...	...	...	
7								
8								
...					...	...	...	
...								

## Παρατηρήσεις

- Στα κελιά C4, C5 και C6 γράφουμε τις αρχικές συνθήκες  $(x_0, y_0)$  και το βήμα ολοκλήρωσης ( $h$ ), αντίστοιχα, τα οποία μπορεί να μεταβάλλει ο χρήστης.
- Στα κελιά E3 και F3 αντιγράφουμε τις αρχικές συνθήκες.
- Στο κελί G3 υπολογίζουμε την τιμή της πρώτης παραγώγου, για τις τιμές των κελιών E3 και F3.
- Στο κελί E4 προσθέτουμε στο αμέσως προηγούμενο (το E3) το βήμα  $h$ , κλειδώνοντάς το έτσι ώστε όταν «σύρουμε» το E4 να μην μεταβάλλεται το βήμα  $h$ .

- Στο κελί F4 γράφουμε τον τύπο του Euler, που στηρίζεται στις τιμές της προηγούμενης σειράς.
- «Σέρνουμε» τον τύπο του κελιού G3 μέχρι το G4, επαναλαμβάνοντας τον υπολογισμό της παραγώγου για τα νέα  $x$  και  $y$  (E4 και F4).
- Επιλέγουμε ταυτόχρονα τα κελιά E4, F4, G4 και τα «σέρνουμε» μέχρι την τιμή του επιθυμητού τελευταίου  $x$ .

### Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>:

Να επιλυθεί με τη μέθοδο του Euler η διαφορική εξίσωση  $x^2y' - xy - x^4e^x = 0$ , με αρχική συνθήκη την τιμή  $y(1)=1$  φθάνοντας μέχρι το σημείο  $x=1.5$ , με βήμα ολοκλήρωσης το  $h=0.1$ .

Στη συνέχεια, λύνοντας θεωρητικά την εν λόγω διαφορική εξίσωση, να υπολογιστεί το σχετικό σφάλμα του προσεγγιστικού υπολογισμού, για την τιμή  $x=1.5$ .

### Λύση:

Λύνοντας τη δοθείσα Δ.Ε. ως προς  $y'$ , έχουμε:

$$y'(x) = f(x, y) = \frac{y}{x} + x^2 e^x$$

Αμέσως μετά δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα τιμών, ξεκινώντας από το σημείο της αρχικής συνθήκης και συνεχίζοντας βήμα – βήμα, μια και κάθε φορά τα προηγούμενα δεδομένα επιτρέπουν τον υπολογισμό του επόμενου σημείου:

$x$	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$y$	1	1,3718	1,8600	2,4931	3,3050	4,3359
$y' = f(x,y) = y/x + x^2 e^x$	3,7183	4,8821	6,3310	8,1189	10,3089	12,974

όπου οι δύο χρωματισμένες (πρώτες) γραμμές αποτελούν τον πίνακα τιμών της άγνωστης συνάρτησης, όπως υπολογίστηκε από την αριθμητική μέθοδο.

Παράδειγμα υπολογισμού:

$$x_1 = x_0 + h = 1 + 0,1 = 1,1$$

$$y(1+h) = y(1+0,1) = y(1,1) = y(1) + hf(1,1) = 1 + 0,1 \cdot 3,7183 = 1,3718$$

κ.λ.π.

### Θεωρητική λύση:

Η διαφορική εξίσωση που δόθηκε, γραμμένη υπό τη μορφή

$$y' - \frac{1}{x}y = x^2 e^x$$

είναι μία γραμμική Δ.Ε. 1ης τάξης, της οποίας η γενική μορφή δίνεται από τη σχέση:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

και η γενική της λύση (όπως αναφέρθηκε στο 2<sup>ο</sup> παράδειγμα της παραγράφου 6.1.1) από τον τύπο:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \left[ c + \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \right]$$

Στην συγκεκριμένη Δ.Ε. έχουμε ως P και Q τις συναρτήσεις:

$$P(x) = -1/x \quad \text{και} \quad Q(x) = x^2 e^x$$

οπότε, λύνουμε τα ολοκληρώματα:

$$\int P(x)dx = -\int \frac{1}{x} dx = -\ln|x|$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx = \int x^2 e^x e^{-\ln(x)} dx = \int x e^x dx = x e^x - e^x = e^x (x-1)$$

Η γενική λύση παίρνει τη μορφή:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \left[ c + \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \right] = e^{\ln(x)} [c + e^x (x-1)] = x [c + e^x (x-1)] \Rightarrow$$

$$y(x, c) = e^x (x^2 - x) + cx$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας τις τιμές της αρχικής συνθήκης στη γενική λύση, υπολογίζουμε την τιμή του c που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη.

$$1 = c \cdot 1 + e^1 \cdot 1 \cdot (1-1) \Rightarrow c = 1$$

και η μερική λύση:

$$y(x) = e^x (x^2 - x) + x$$

Θέτοντας τώρα την τιμή  $x=1,5$  στη θεωρητική λύση, βρίσκουμε την ακριβή τιμή της συνάρτησης  $y(x)$ , στο σημείο αυτό:

$$\text{Ακριβής λύση} : 4,861267$$

$$\text{Προσεγγιστική λύση} : 4,335929$$

και το σχετικό σφάλμα:

$$\sigma_{\text{σχετ.}} = 100 \frac{4,861267 - 4,335929}{4,335929} = 10,74\%$$

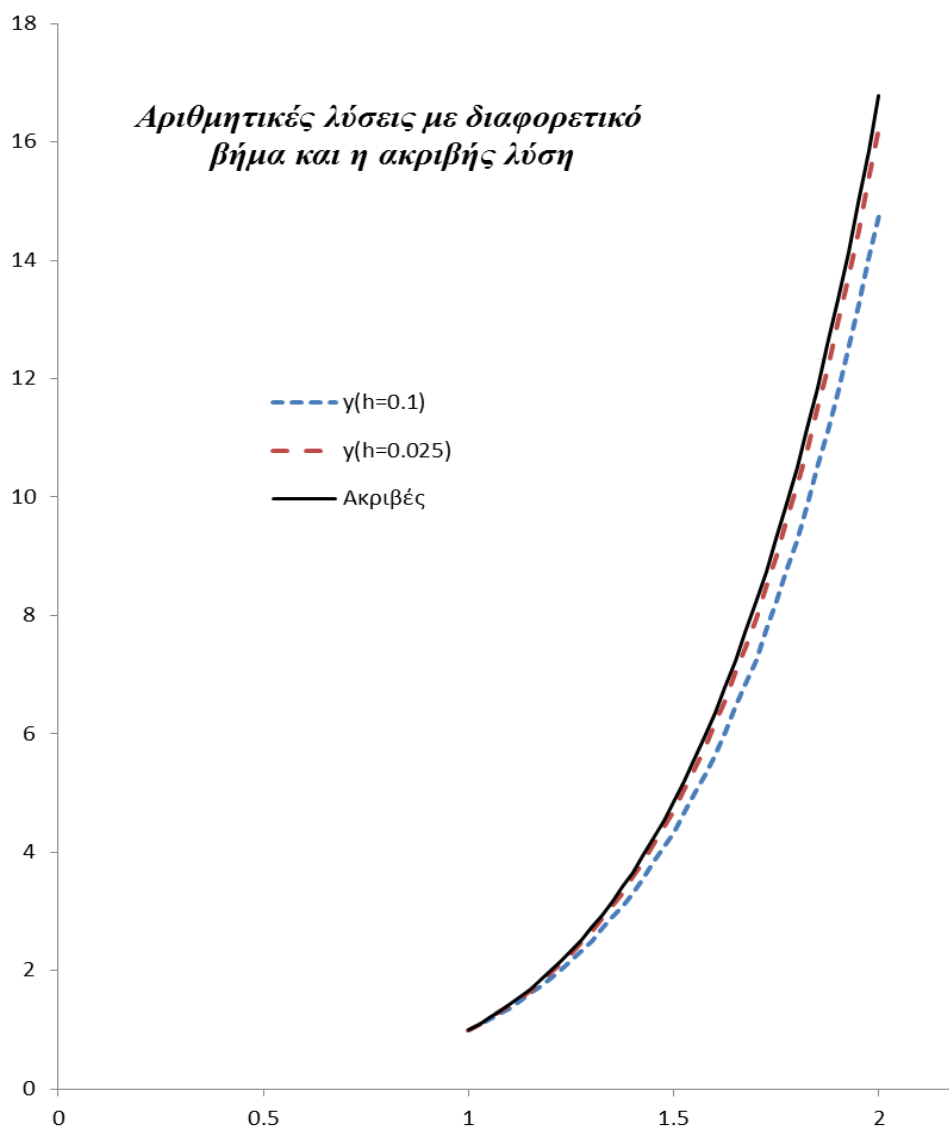
Να παρατηρήσουμε πως η μέθοδος του Euler είναι εύκολη και σύντομη, όμως δεν είναι ιδιαίτερα ακριβής, ιδιαίτερα όταν προσπαθεί να ακολουθήσει μια εκθετική συνάρτηση. Εάν επιζητούσαμε μεγαλύτερη ακρίβεια, τότε το πρώτο που θα μπορούσαμε να κάνουμε είναι το να μειώσουμε την τιμή του βήματος  $h$ . Για παράδειγμα, εάν υιοθετούσαμε την τιμή  $h=0,025$ , τότε η νέα προσεγγιστική τιμή θα ήταν:

$$y(1,5) = 4,722622$$

με σχετικό σφάλμα:  $\sigma_{\text{σχ}} = 2,85\%$ .

Επεκτείνοντας τον προηγούμενο πίνακα με τις δύο αριθμητικές λύσεις, με βήμα  $h=0.1$  και  $h=0.025$ , μέχρι το σημείο  $x=2$ , παίρνουμε το παρακάτω γράφημα:





**Σχήμα 9.7** Γραφική παράσταση των λύσεων με βήμα 0,1 και 0,025 και με την ακριβή λύση.



## 9.2.2 Η μέθοδος του Taylor

Η μέθοδος του Taylor χρησιμοποιεί το γνωστό ανάπτυγμα (πολυώνυμο) του Taylor. Να θυμίσουμε πως πρόκειται για μία πολωνυμική συνάρτηση  $p(x)$ , η οποία:

- «Ταυτίζεται» με μία μη πολωνυμική συνάρτηση  $f(x)$ .
- Δημιουργείται γύρω από μία κεντρική τιμή  $x_0$ .
- Παίρνει τις ίδιες τιμές με τη συνάρτηση, εφόσον η μεταβλητή  $x$  ανήκει στην περιοχή σύγκλισης του αναπτύγματος προς τη συνάρτηση  $f(x)$ .

Η κατασκευή του στηρίζεται στην ιδιότητά του, η τιμή του πολωνύμου, καθώς και οι τιμές των παραγώγων του σε κάποιο σημείο  $x_0$  (το κέντρο του αναπτύγματος), να ταυτίζονται με τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης. Όπως είδαμε, πρόκειται για ένα πολωνύμο με μεταβλητή το  $h$  και δίνεται από τη σχέση:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^v}{v!} f^{(v)}(x_0) + \dots$$

Το μειονέκτημα του πολυωνύμου του Taylor είναι πως έχει άπειρους όρους. Στην πράξη, μπορούμε να γνωρίζουμε την τιμή της συνάρτησης, σε κάποιο διπλανό σημείο του  $x_0$  (το  $x_0 + h$ ), χρησιμοποιώντας έναν μικρό σχετικά αριθμό όρων, ιδιαίτερα όταν η απόλυτη τιμή του  $h$  είναι μικρή ( $<1$ ).

Στην περίπτωση της Δ.Ε. 1ης τάξης (της  $y' = f(x, y)$ ), μπορούμε να ορίσουμε το ανάπτυγμα της άγνωστης συνάρτησης  $y(x)$ , με τη βοήθεια

- της αρχικής συνθήκης ( $y(x_0)$ ),
- της πρώτης παραγώγου ( $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ ),
- αλλά και των υπολοίπων παραγώγων οι οποίες προκύπτουν από την παραγωγή της σχέσης της διαφορικής εξίσωσης.

Βέβαια θα πρέπει να θυμηθούμε πως η πεπλεγμένη παραγωγή χρησιμοποιείται σε μία συνάρτηση η οποία δεν είναι λυμένη ως προς την εξαρτημένη της μεταβλητή, της μορφής  $f(x, y) = 0$ . Σαν απλό μνημονικό κανόνα αναφέρουμε το: «παραγωγίζουμε κανονικά τη σχέση  $f$ , ως προς  $x$  και  $y$ , γνωρίζοντας πως το  $y$  δεν είναι μία μεταβλητή, αλλά μία συνάρτηση. Τέλος, λύνουμε ως προς το  $y'$ ».

### Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>:

$$f(x, y) = x^2 + y^3 + x \sin y = 0$$

οπότε:

$$2x + 3y^2 y' + \sin y + xy' \cos y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2x + \sin y + y'(3y^2 + x \cos y) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{2x + \sin y}{3y^2 + x \cos y}$$



### Παράδειγμα 2<sup>ο</sup>:

Να παραγωγισθεί δύο φορές, κατά μέλη η ισότητα:  $y' = 2x^2 + 3y^3 - xe^y$

$$y' = 2x^2 + 3y^3 - xe^y \quad \Rightarrow$$

$$y'' = 4x + 9y^2 y' - e^y - xe^y y' \quad \Rightarrow$$

$$y''' = 4 + 18yy'^2 + 9y^2 y'' - 2e^y y' - xe^y y'^2 - xe^y y''$$



### Ορισμός:

Εάν κατά την αριθμητική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα του Taylor μέχρι τη δεύτερη τάξη, τότε λέμε πως χρησιμοποιούμε τη **μέθοδο του Taylor 2ης τάξης**. Εάν, όμοια, χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα του Taylor μέχρι την τρίτη τάξη, τότε λέμε πως χρησιμοποιούμε τη **μέθοδο του Taylor 3ης τάξης κ.λ.π.**



## Τρόπος λειτουργίας της μεθόδου:

Έστω η διαφορική εξίσωση  $y' = f(x, y)$ , με αρχική συνθήκη την  $y(x_0) = y_0$ . Εάν αποφασίσουμε να χρησιμοποιήσουμε, για την αριθμητική της επίλυση, τη μέθοδο του Taylor  $n^{\text{ης}}$  τάξης, τότε, θεωρώντας την τιμή  $x_0$  σαν το κέντρο του αναπτύγματος, χρειαζόμαστε:

- την αρχική συνθήκη  $y(x_0) = y_0$
- την πρώτη παράγωγο στο σημείο  $x_0$ , η οποία δίνεται από τη διαφορική εξίσωση
- τη δεύτερη παράγωγο στο σημείο  $x_0$ , την οποία υπολογίζουμε παραγωγίζοντας τη διαφορική εξίσωση
- την τρίτη παράγωγο στο σημείο  $x_0$ , την οποία υπολογίζουμε παραγωγίζοντας δύο φορές τη διαφορική εξίσωση
- ...
- την  $n^{\text{η}}$  παράγωγο στο σημείο  $x_0$ , την οποία υπολογίζουμε παραγωγίζοντας  $n-1$  φορές τη διαφορική εξίσωση.

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές στο ανάπτυγμα του Taylor

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!} y''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x_0)$$

υπολογίζοντας την τιμή της άγνωστης συνάρτησης  $y(x)$  στο επόμενο σημείο (το  $x_0 + h$ ). Στη συνέχεια, εκλαμβάνουμε ως αρχική συνθήκη το σημείο

$$(x_0 + h, y(x_0 + h)) = (x_1, y(x_1))$$

και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία, υπολογίζοντας την τιμή  $y(x_2)$  κ.ο.κ..

## Παρατήρηση:

Αξίζει να παρατηρήσουμε πως η μέθοδος του Euler είναι η μέθοδος του Taylor  $1^{\text{ης}}$  τάξης!

## Ο υπολογισμός της μεθόδου του Taylor με το Excel

Η εφαρμογή του τύπου του Taylor στο Excel είναι σχετικά απλή και περιγράφεται (η μέθοδος  $2^{\text{ης}}$  τάξης) στον επόμενο πίνακα:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Λύση της $y' = f(x, y)$						
2					$x$	$y(x)$	$y'(x)$	$y''(x)$
3		Αρχική Συνθήκη			=C4	=C5	=f(E3,F3)	$y''(E3,F3)$
4		$x_0 =$	0		=E3+C\$6	=F3+C\$6*G3+C\$6^2*H3	=f(E4,F4)	$y''(E4,F4)$
5		$y_0 =$	2		=E4+C\$6	=F4+C\$6*G4+C\$6^2*H4	=f(E5,F5)	$y''(E5,F5)$
6		$h =$	0.2		...	...	...	...
7								
...								
...								

## Παρατηρήσεις

- Στα κελιά C4, C5 και C6 γράφουμε τις αρχικές συνθήκες  $(x_0, y_0)$  και το βήμα ολοκλήρωσης  $(h)$ , αντίστοιχα, τα οποία μπορεί να μεταβάλλει ο χρήστης.
- Στα κελιά E3 και F3 αντιγράφουμε τις αρχικές συνθήκες.
- Στο κελί G3 υπολογίζουμε την τιμή της πρώτης παραγώγου, για τις τιμές των κελιών E3 και F3, ενώ στο H3 υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο (παραγωγίζοντας τη διαφορική εξίσωση).
- Στο κελί E4 προσθέτουμε στο αμέσως προηγούμενο (το E3) το βήμα  $h$ , κλειδώνοντάς το, έτσι ώστε όταν «σύρουμε» το E4 να μην μεταβάλλεται το βήμα  $h$ .
- Στο κελί F4 γράφουμε τον τύπο του Taylor (2<sup>ης</sup> τάξης), που στηρίζεται στις τιμές της προηγούμενης σειράς.
- «Σέρνουμε» τους τύπους των κελιών G3 και H3 μέχρι το G4–H4, επαναλαμβάνοντας τον υπολογισμό της παραγώγου για τα νέα  $x$  και  $y$  (E4 και F4).
- Επιλέγουμε ταυτόχρονα τα κελιά E4, F4, G4, H4 και τα «σέρνουμε» μέχρι την τιμή του επιθυμητού τελευταίου  $x$ .

## Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>:

Δίνεται η διαφορική εξίσωση:  $y' = f(x, y) = x + y$ , με αρχική συνθήκη  $y(0) = 1$  και ζητούνται

- α) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση αναλυτικά και βαρεθεί η μερική της λύση.
- β) Η αριθμητική της λύση με τη μέθοδο του Taylor 2<sup>ης</sup> τάξης, βήμα  $h=0.2$ , μέχρι το σημείο  $x=1$ .
- γ) Η αριθμητική της λύση με τη μέθοδο του Taylor 3<sup>ης</sup> τάξης, βήμα  $h=0.2$ , μέχρι το σημείο  $x=1$ .
- δ) Η αριθμητική της λύση με τη μέθοδο του Taylor 4<sup>ης</sup> τάξης, βήμα  $h=0.2$ , μέχρι το σημείο  $x=1$ .
- ε) Να υπολογιστούν τα σχετικά σφάλματα των τριών αριθμητικών λύσεων στον υπολογισμό της τιμής  $y(1)$ .

## Λύση:

**α)** Υπολογίζουμε τη θεωρητική λύση (γενική και μερική).

$$y' = f(x, y) = x + y \quad \Rightarrow \quad y' - y = x$$

όπου διαπιστώνουμε πως πρόκειται για γραμμική διαφορική εξίσωση με  $P(x) = -1$  και  $Q(x) = x$ . Λύνουμε, λοιπόν, τα δύο ολοκληρώματα του τύπου επίλυσης:

$$\int P(x) dx = -\int 1 dx = -x$$

$$\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx = \int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} = -e^{-x} (x + 1)$$

οπότε η γενική λύση παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
 y(x) &= e^{-\int P(x)dx} \left[ c + \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \right] = \\
 &= e^x \left[ c - e^{-x}(x-1) \right] = \\
 &= ce^x + x - 1 \Rightarrow \\
 y(x, c) &= ce^x + x - 1
 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας τις τιμές της αρχικής συνθήκης στη γενική λύση, υπολογίζουμε την τιμή του  $c$  που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη.

$$\left. \begin{aligned} y(x, c) &= ce^x + x - 1 \\ y(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 = ce^0 + 0 - 1 \Rightarrow c = 2$$

οπότε η μερική λύση:

$$y(x) = 2e^x + x - 1$$

**β)** Υπολογίζουμε τις παραγώγους που χρειάζονται και στις τρεις μεθόδους που ζητούνται:

$$\begin{aligned}
 y' &= f(x, y) = x + y \Rightarrow \\
 y'' &= 1 + y' \Rightarrow \\
 y''' &= y'' \Rightarrow \\
 y^{(4)} &= y'''
 \end{aligned}$$

Πίνακας της μεθόδου του Taylor 2<sup>ης</sup> τάξης:

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y (2ης τάξης)	1	1.24	1.5768	2.031696	2.630669	3.405416
y'=x+y	1	1.44	1.9768	2.631696	3.430669	
y''=1+y'	2	2.44	2.9768	3.631696	4.430669	

Ακριβής λύση	1	1.242806	1.583649	2.044238	2.651082	3.436564
--------------	---	----------	----------	----------	----------	----------

όπου οι δύο χρωματισμένες γραμμές αποτελούν τον πίνακα τιμών της άγνωστης συνάρτησης, όπως υπολογίστηκε από την αριθμητική μέθοδο.

Παράδειγμα υπολογισμού:

$$\begin{aligned}
 y(x_1) &= y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!} y''(x_0) \Rightarrow \\
 y(0.2) &= y(0 + 0.2) = y(0) + 0.2y'(0) + \frac{0.2^2}{2} y''(0)
 \end{aligned}$$

όπου

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= 1 \\ y'(0) &= (x + y)_{x=0, y=1} = 0 + 1 = 1 \\ y''(0) &= (1 + y')_{x=0, y=1, y'=1} = 1 + 1 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y(0.2) = 1 + 0.2 \cdot 1 + 0.02 \cdot 2 = 1.24$$

Ας θυμίσουμε πως  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$

γ) Πίνακας της μεθόδου του Taylor 3<sup>ης</sup> τάξης:

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y (3ης τάξης)	1	1.242667	1.58331	2.043616	2.65007	3.435019
y'=x+y	1	1.442667	1.98331	2.643616	3.45007	
y''=1+y'	2	2.442667	2.98331	3.643616	4.45007	
y'''=y''	2	2.442667	2.98331	3.643616	4.45007	

Ακριβής λύση	1	1.242806	1.583649	2.044238	2.651082	3.436564
--------------	---	----------	----------	----------	----------	----------

Παράδειγμα υπολογισμού:

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!} y''(x_0) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_0) \Rightarrow$$

$$y(0.2) = y(0 + 0.2) = y(0) + 0.2y'(0) + \frac{0.2^2}{2} y''(0) + \frac{0.2^3}{6} y'''(0)$$

όπου

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= 1 \\ y'(0) &= (x + y)_{x=0, y=1} = 0 + 1 = 1 \\ y''(0) &= (1 + y')_{x=0, y=1, y'=1} = 1 + 1 = 2 \\ y'''(0) &= (y'')_{x=0, y=1, y'=1, y''=2} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$y(0.2) = 1 + 0.2 \cdot 1 + 0.02 \cdot 2 + 0.001333 \cdot 2 = 1.2426667$$

δ) Πίνακας της μεθόδου του Taylor 4<sup>ης</sup> τάξης:

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y (4ης τάξης)	1	1.2428	1.583636	2.044213	2.651042	3.436502
y'=x+y	1	1.4428	1.983636	2.644213	3.451042	
y''=1+y'	2	2.4428	2.983636	3.644213	4.451042	
y'''=y''	2	2.4428	2.983636	3.644213	4.451042	
y <sup>(4)</sup> =y'''	2	2.4428	2.983636	3.644213	4.451042	

Ακριβής λύση	1	1.242806	1.583649	2.044238	2.651082	3.436564
--------------	---	----------	----------	----------	----------	----------

Παράδειγμα υπολογισμού:

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!} y''(x_0) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_0) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_0) \Rightarrow$$

$$y(0.2) = y(0 + 0.2) = y(0) + 0.2y'(0) + \frac{0.2^2}{2} y''(0) + \frac{0.2^3}{6} y'''(0) + \frac{0.2^4}{6} y^{(4)}(0)$$

όπου

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= 1 \\ y'(0) &= (x + y)_{x=0, y=1} = 0 + 1 = 1 \\ y''(0) &= (1 + y')_{x=0, y=1, y'=1} = 1 + 1 = 2 \\ y'''(0) &= (y'')_{x=0, y=1, y'=1, y''=2} = 2 \\ y^{(4)}(0) &= (y''')_{x=0, y=1, y'=1, y''=2, y'''=2} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$y(0.2) = 1 + 0.2 \cdot 1 + 0.02 \cdot 2 + 0.001333 \cdot 2 + 0.0006667 \cdot 2 = 1.24228$$

ε) Τέλος, τα σχετικά σφάλματα των τριών μεθόδων, αναφερόμενο στην τελευταία τιμή  $y(I)$ , είναι:

$$\sigma_{\text{σχετ.}} = 0.906351 \%$$

$$\sigma_{\text{σχετ.}} = 0.044955 \%$$

$$\sigma_{\text{σχετ.}} = 0.001786 \%$$

Αξιίζει να παρατηρήσουμε τη μεγάλη ακρίβεια του υπολογισμού της λύσης που αντιστοιχεί στη μέθοδο 4<sup>ης</sup> τάξης, παρ' όλων ότι το βήμα ολοκλήρωσης είναι αρκετά μεγάλο.



## Παράδειγμα 2<sup>ο</sup>:

Δίνεται η διαφορική εξίσωση:  $y' = f(x, y) = y + \cos(x)$ , με αρχική συνθήκη  $y(0) = 1$  και ζητούνται

- Να λυθεί η διαφορική εξίσωση αναλυτικά και βαρεθεί η μερική της λύση.
- Η αριθμητική της λύση με τη μέθοδο του Taylor 2<sup>ης</sup> τάξης, βήμα  $h=0.2$ , μέχρι το σημείο  $x=1$ .
- Η αριθμητική της λύση με τη μέθοδο του Taylor 3<sup>ης</sup> τάξης, βήμα  $h=0.2$ , μέχρι το σημείο  $x=1$ .
- Η αριθμητική της λύση με τη μέθοδο του Taylor 4<sup>ης</sup> τάξης, βήμα  $h=0.2$ , μέχρι το σημείο  $x=1$ .
- Να υπολογιστούν τα σχετικά σφάλματα των τριών αριθμητικών λύσεων στον υπολογισμό της τιμής  $y(I)$ .

## Λύση:

α) Υπολογίζουμε τη θεωρητική λύση (γενική και μερική).

$$y' = f(x, y) = y + \cos(x) \Rightarrow y' - y = \cos(x)$$

όπου διαπιστώνουμε πως πρόκειται για γραμμική διαφορική εξίσωση με  $P(x) = -1$  και  $Q(x) = \cos(x)$ . Λύνουμε, λοιπόν, τα δύο ολοκληρώματα του τύπου επίλυσης:

$$\int P(x)dx = -\int 1dx = -x$$

$$\begin{aligned}\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx &= I = \int \cos(x) e^{-x} dx = -e^{-x} \cos(x) - \int e^{-x} \sin(x) dx \Rightarrow \\ I &= -e^{-x} \cos(x) + e^{-x} \sin(x) - \int \cos(x) e^{-x} dx \Rightarrow \\ I &= -e^{-x} \cos(x) + e^{-x} \sin(x) - I \Rightarrow \\ 2I &= e^{-x} \sin(x) - e^{-x} \cos(x) \Rightarrow \\ I &= \int \cos(x) e^{-x} dx = \frac{1}{2} [e^{-x} \sin(x) - e^{-x} \cos(x)] \Rightarrow \\ I &= \frac{1}{2} e^{-x} [\sin(x) - \cos(x)]\end{aligned}$$

οπότε η γενική λύση παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}y(x) &= e^{-\int P(x)dx} \left[ c + \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \right] = \\ &= e^x \left[ c + \frac{1}{2} e^{-x} [\sin(x) - \cos(x)] \right] = \\ &= ce^x + \frac{1}{2} [\sin(x) - \cos(x)] \Rightarrow \\ y(x, c) &= ce^x + \frac{1}{2} [\sin(x) - \cos(x)]\end{aligned}$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας τις τιμές της αρχικής συνθήκης στη γενική λύση, υπολογίζουμε την τιμή του c που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη.

$$\left. \begin{aligned}y(x, c) &= ce^x + \frac{1}{2} [\sin(x) - \cos(x)] \\ y(0) &= 1\end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 = ce^0 - \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

οπότε η μερική λύση:

$$y(x) = \frac{3}{2} e^x + \frac{1}{2} [\sin(x) - \cos(x)]$$

**β)** Υπολογίζουμε τις παραγώγους που χρειάζονται και στις τρεις μεθόδους που ζητούνται:

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y) = y + \cos(x) \Rightarrow \\ y'' &= y' - \sin(x) \Rightarrow \\ y''' &= y'' - \cos(x) \Rightarrow \\ y^{(4)} &= y''' + \sin(x)\end{aligned}$$



γ) Πίνακας της μεθόδου του Taylor 2<sup>ης</sup> τάξης:

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y (2ης τάξης)	1	1.44	1.968441	2.596343	3.33782	4.211069
y'=y+cos x	2	2.420067	2.889502	3.421679	4.034527	
y''=y'-sin x	2	2.221397	2.500084	2.857037	3.317171	

Ακριβής λύση	1	1.441406	1.971916	2.602832	3.348636	4.228007
--------------	---	----------	----------	----------	----------	----------

δ) Πίνακας της μεθόδου του Taylor 3<sup>ης</sup> τάξης:

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y (3ης τάξης)	1	1.441333	1.971725	2.602459	3.347998	4.226994
y'=y+cos x	2	2.4214	2.892786	3.427795	4.044705	
y''=y'-sin x	2	2.222731	2.503367	2.863152	3.327349	
y'''=y''-cos x	1	1.242664	1.582306	2.037817	2.630642	

Ακριβής λύση	1	1.441406	1.971916	2.602832	3.348636	4.228007
--------------	---	----------	----------	----------	----------	----------

δ) Πίνακας της μεθόδου του Taylor 4<sup>ης</sup> τάξης:

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y (4ης τάξης)	1	1.4414	1.971902	2.602807	3.348597	4.227948
y'=y+cos x	2	2.421467	2.892963	3.428143	4.045304	
y''=y'-sin x	2	2.222797	2.503545	2.8635	3.327948	
y'''=y''-cos x	1	1.242731	1.582484	2.038165	2.631241	
y(4)=y''' + sin x	1	1.4414	1.971902	2.602807	3.348597	

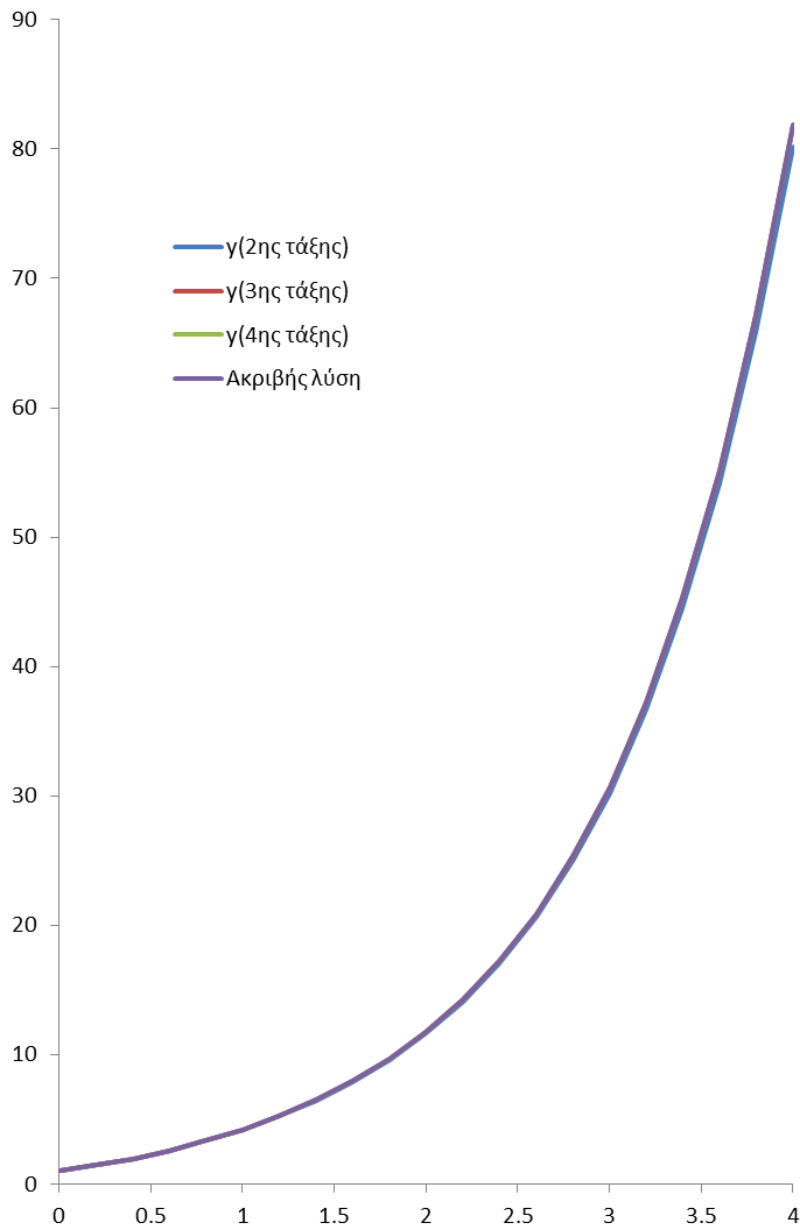
Ακριβής λύση	1	1.441406	1.971916	2.602832	3.348636	4.228007
--------------	---	----------	----------	----------	----------	----------

ε) Τέλος, τα σχετικά σφάλματα των τριών μεθόδων, πάντα στο τελευταίο τιμή y(1), είναι:

$$\sigma_{\text{σχετ.}} = 0.400624 \%$$

$$\sigma_{\text{σχετ.}} = 0.023971 \%$$

$$\sigma_{\text{σχετ.}} = 0.001391\%$$



**Σχήμα 9.8** Γραφική παράσταση των προηγούμενων λύσεων με βήμα 0,2, μέχρι την τιμή  $x=4$ , όπου παρατηρούμε το πόσο κοντά στην ακριβή λύση βρίσκονται τα αποτελέσματα των μεθόδων του Taylor, στο σημείο  $x=4$ . Αναφέρουμε σχετικά:  $y(4)=80.1482$  /  $81.7530$  /  $81.8416$  /  $84.8457$  για τις λύσεις 2<sup>ης</sup>, 3<sup>ης</sup>, 4<sup>ης</sup> τάξης και την ακριβή, αντίστοιχα.



### 9.2.3 Η μέθοδος των Runge–Kutta

Συχνά, μιλώντας στους φοιτητές μας, αναφερόμενοι στη μέθοδο των δύο αυτών Γερμανών Μαθηματικών και συγκρίνοντάς της με τη μέθοδο του Euler, αναφερόμαστε στη σύγκριση δύο τυφλών αλλά ικανότατων βαδιστών, από τους οποίους

- ο πρώτος κάνει ένα μόνο έλεγχο με το μπαστούνι του, έτσι ώστε να επιχειρήσει το επόμενο βήμα του,
- ενώ ο δεύτερος ελέγχει δύο ή τρία σημεία (εμπρός, δεξιά και αριστερά) πριν κάνει το επόμενο βήμα του, θεωρώντας πως έτσι αυξάνει την ασφάλεια του επόμενου βήματος.

Αντίστοιχα, η μέθοδος του Euler ελέγχει την πρώτη παράγωγο (την κλίση) της άγνωστης συνάρτησης  $y(x)$  και υπολογίζει την επόμενη τιμή της, με τη βοήθεια αυτής της κλίσης. Αντίθετα, η μέθοδος των Runge–Kutta δοκιμάζει την κλίση της  $y(x)$ , μέσω της διαφορικής εξίσωσης, σε περισσότερα σημεία (προσεκτικά επιλεγμένα) και αποφασίζει την πλέον κατάλληλη κλίση, μέσω της οποίας υπολογίζει την επόμενη τιμή.

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να «δείξουμε» τον πρώτο από τους τύπους των Runge–Kutta, αυτόν που είναι γνωστός ως μέθοδος Runge – Kutta δεύτερης τάξης, αναδεικνύοντας τη λογική πάνω στην οποία στηρίζεται.

Υποθέτουμε, λοιπόν, πως έχουμε τη διαφορική εξίσωση  $y'=f(x,y)$ , με αρχική συνθήκη  $y(x_1)=y_1$ . Εφαρμόζοντας τον τύπο του Euler για την αρχική συνθήκη, υπολογίζουμε το επόμενο σημείο:

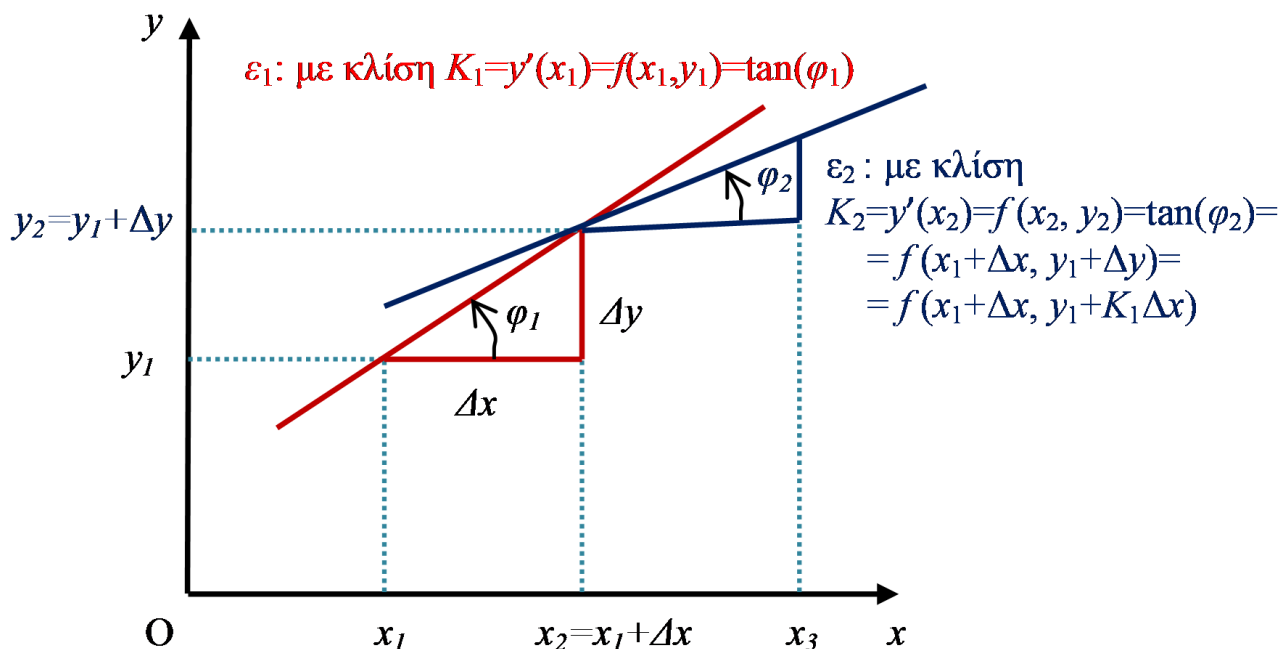
$$y(x_2) = y(x_1) + f(x_1, y_1)\Delta x = y(x_1) + h f(x_1, y_1)$$

όπου η τιμή  $f(x_1, y_1)=K_1$  δίνει την παράγωγο (την κλίση) της άγνωστης συνάρτησης στο σημείο  $(x_1, y_1)$ . Η νέα τιμή της συνάρτησης στο νέο σημείο  $(x_2=x_1+\Delta x)$  υπολογίζεται από την ευθεία  $\varepsilon_1$ , η οποία διέρχεται από το σημείο  $(x_1, y_1)$  με κλίση  $K_1$ , χρησιμοποιώντας, ουσιαστικά, τη μέθοδο του Euler

Τώρα τοποθετούμε τις συντεταγμένες του νέου σημείου

$$(x_2, y_2) = (x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y) = (x_1 + \Delta x, y_1 + K_1 \Delta x)$$

στο δεύτερο μέλος της διαφορικής εξίσωσης, παίρνοντας την παράγωγο (κλίση) της  $y(x)$  στο σημείο αυτό. Με την κλίση αυτή ορίζουμε την ευθεία  $\varepsilon_2$ , που έχει ως σημείο αναφοράς το σημείο  $(x_2, y_2)$ . Όλα αυτά φαίνονται παραστατικά στην επόμενη εικόνα.



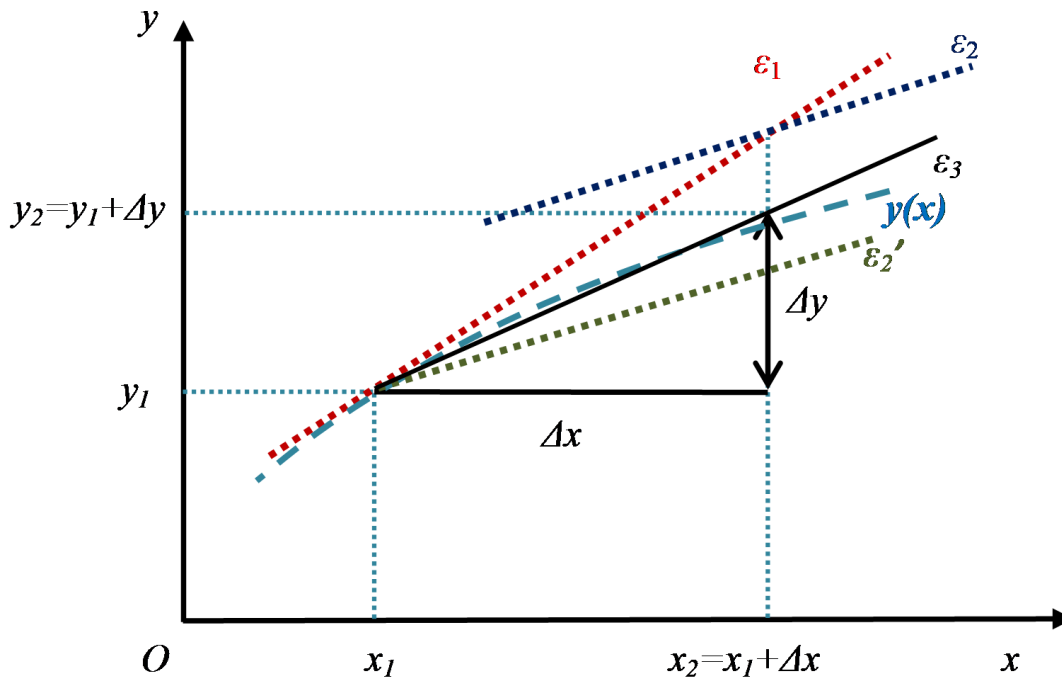
**Σχήμα 9.9** Οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  με τις κλίσεις της λύσης  $y(x)$  στα σημεία  $(x_1, y_1)$  και  $(x_2, y_2)$ .

Παρατηρώντας τις δύο ευθείες ( $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ ) βγάζουμε τα παρακάτω σημαντικά συμπεράσματα:

- Η κλίση της άγνωστης συνάρτησης  $y(x)$  (η οποία αποτελεί τη μερική λύση της δοσμένης διαφορικής εξίσωσης, αντιστοιχώντας στην αρχική συνθήκη  $(x_1, y_1)$ ) μειώνεται, καθώς το  $x$  μεγαλώνει.

- Η  $y(x)$  στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (θεωρώντας το βήμα  $h=\Delta x$  αρκούντως μικρό).

Η περιγραφή και οι παρατηρήσεις αυτές μας οδηγούν στη λογική των Runge–Kutta. Αφού δεχθούμε πως η μερική λύση  $y(x)$  στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (τα συμπεράσματα θα ήταν όμοια εάν έστρεφε τα κοίλα προς τα κάτω), ας παρατηρήσουμε το επόμενο γράφημα:



Σχήμα 9.10 Γραφική περιγραφή της μεθόδου των Runge–Kutta..

### Παρατηρήσεις:

- Ο προσεγγιστικός υπολογισμός της  $y(x_2)$  από τον τύπο του Euler υλοποιείται με την ευθεία  $\varepsilon_1$  (κόκκινη με κλίση την  $K_1$ ) και οδηγεί σε υπερεκτίμηση της τιμής της συνάρτησης (αφού η  $y(x)$  στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω).
- Αντίθετα, εάν υπολογίσουμε την τιμή της  $y(x_2)$ , χρησιμοποιώντας σαν κλίση (στον τύπο του Euler) την κλίση της ευθείας  $\varepsilon_2$  (δηλαδή την πράσινη ευθεία  $\varepsilon_2'$ , με κλίση  $K_2$ ), τότε θα υποεκτιμήσουμε την τιμή της συνάρτησης.
- Με βάση τα προηγούμενα οι Runge – Kutta χρησιμοποίησαν τον τύπο του Euler, επιλέγοντας όμως μία ενδιάμεση κλίση, αυτήν της μαύρης ευθείας  $\varepsilon_3$ :  $K=(K_1+K_2)/2$ .

Καταλήγουμε λοιπόν στον τύπο:

### Τύπος των Runge–Kutta 2<sup>ης</sup> τάξης:

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + h \frac{(K_1 + K_2)}{2}$$

όπου

$$K_1 = f(x_0, y_0)$$

$$K_2 = f(x_0 + h, y_0 + hK_1)$$



Με παρόμοια λογική δημιουργήθηκαν και οι επόμενοι (και ακριβέστεροι) τύποι των Runge–Kutta:

### Τύπος των Runge–Kutta 3<sup>ης</sup> τάξης:

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + h \frac{(K_1 + 4K_2 + K_3)}{6}$$

όπου

$$K_1 = f(x_0, y_0)$$

$$K_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} K_1\right)$$

$$K_3 = f(x_0 + h, y_0 + h(2K_2 - K_1))$$



### Τύπος των Runge–Kutta 4<sup>ης</sup> τάξης:

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + h \frac{(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)}{6}$$

όπου

$$K_1 = f(x_0, y_0)$$

$$K_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} K_1\right)$$

$$K_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} K_2\right)$$

$$K_4 = f(x_0 + h, y_0 + hK_3)$$



### Παρατηρήσεις:

1. Οι τάξεις των τύπων των Runge – Kutta εκφράζουν την «ισοδυναμία» τους με τους τύπους της αντίστοιχης τάξης του Taylor.
2. Μεγάλο πλεονέκτημα των τύπων των Runge – Kutta αποτελεί το γεγονός πως δεν χρειάζεται να υπάρξουν διαδοχικές παραγωγίσεις της διαφορικής εξίσωσης, προκειμένου να υπολογίσουμε τις παραγώγους ανώτερης τάξης  $y''(x)$ ,  $y'''(x)$  και  $y^{(4)}(x)$ . Έτσι, στην περίπτωση που ο τύπος του β' μέλους της διαφορικής εξίσωσης (η  $f(x,y)$ ) είναι ιδιαίτερα περίπλοκος, η επιλογή της μεθόδου των Runge – Kutta είναι η πλέον ενδεδειγμένη.
3. Στο Excel, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό το πλεονέκτημα της μεθόδου των Runge – Kutta, εκμεταλλευόμενοι τη δυνατότητα του Excel να αντιγράφει από ένα κελί στο άλλο, τον τύπο που περιέχει το πρώτο. Αρκεί να δομήσουμε το φύλλο μας, έτσι ώστε αυτό να είναι δυνατό.
4. Η μέθοδος Runge – Kutta 4<sup>ης</sup> τάξης αποτελεί την πιο συνηθισμένη επιλογή, για την αριθμητική ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων, σε ερευνητικά προβλήματα Φυσικής. Η ευκολία προγραμματισμού της σε κάποια γλώσσα προγραμματισμού H/Y, π.χ. σε C ή Fortran, καθώς και η δυνατότητα επανάληψής της χιλιάδες ή και εκατομμύρια φορές, μας επιτρέπει, από τη μία να χρησιμοποιήσουμε αρκετά μικρό βήμα, έτσι ώστε να επιτύχουμε την επιθυμητή ακρίβεια των υπολογισμών και από την άλλη να βρούμε τη λύση για πολύ μεγάλο

διάστημα τιμών του  $x$ . Στην τελευταία παράγραφο του Κεφαλαίου παρουσιάζεται η μέθοδος υλοποιημένη σε γλώσσα MATLAB.

### Ο υπολογισμός της μεθόδου των Runge–Kutta με το Excel

Η εφαρμογή του τύπου των Runge–Kutta στο Excel δεν παρουσιάζει κάποια ιδιαίτερη δυσκολία και περιγράφεται (όσον αφορά στη μέθοδο 2<sup>ης</sup> τάξης) στον επόμενο πίνακα:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Λύση της $y'=f(x,y)$								
2					$x$	$y(x)$	$K_1=y'(x)$	$x+h$	$y+hK_1$	$K_2$
3		Αρχική Συνθήκη			=C4	=C5	=f(E3,F3)	=E3+C\$6	=F3+C\$6*H3	=f(H3,I3)
4		$x_0=$	0		=E3+C\$6	=F3+C\$6*(G3+J3)/2	=f(E4,F4)	=E4+C\$6	=F4+C\$6*H4	=f(H4,I4)
5		$y_0=$	2		=E4+C\$6	=F4+C\$6*(G4+J4)/2	=f(E5,F5)	=E5+C\$6	=F5+C\$6*H5	=f(H5,I5)
6		$h=$	0.2		...	...	...	...	...	...
7										
8										
9										

### Παρατηρήσεις

- Στα κελιά C4, C5 και C6 γράφουμε τις αρχικές συνθήκες ( $x_0$ ,  $y_0$ ) και το βήμα ολοκλήρωσης ( $h$ ), αντίστοιχα, τα οποία μπορεί να μεταβάλλει ο χρήστης.
- Στα κελιά E3 και F3 αντιγράφουμε τις αρχικές συνθήκες.
- Στο κελί G3 υπολογίζουμε την τιμή της πρώτης παραγώγου (που εδώ το ονομάσαμε  $K_1$ ), για τις τιμές των κελιών E3 και F3.
- Στα κελιά H3 και I3 γράφουμε τις τιμές  $x_0+h$  και  $y_0+hK_1$ , αντίστοιχα
- Στο Κελί J3 υπολογίζουμε την τιμή της πρώτης παραγώγου, για τις τιμές που περιέχουν τα κελιά H3 και I3 (που εδώ το ονομάσαμε  $K_2$ ). Αυτό το επιτυγχάνουμε αντιγράφοντας το κελί J3 και επικολλώντας το στο J3, έτσι ώστε να μην χρειαστεί να ξαναγράψουμε τον τύπο της παραγώγου (το β' μέλος της διαφορικής εξίσωσης). Άλλωστε, ακριβώς για αυτό τον λόγο συμπληρώσαμε και τα κελιά H3 και I3...
- Στο κελί E4 προσθέτουμε στο αμέσως προηγούμενο (το E3) το βήμα  $h$ , κλειδώνοντάς το έτσι ώστε όταν «σύρουμε» το E4, να μην μεταβάλλεται το βήμα  $h$ .
- Στο κελί F4 γράφουμε τον τύπο των Runge–Kutta (2<sup>ης</sup> τάξης), που στηρίζεται στις τιμές της προηγούμενης σειράς.
- «Σέρνουμε» τους τύπους των κελιών G3 και I3 μέχρι το G4–I4, επαναλαμβάνοντας τον υπολογισμό της παραγώγου για τα νέα  $x$  και  $y$  (E4 και F4).

- Επιλέγουμε ταυτόχρονα τα κελιά E4, F4, G4, H4, I4 και τα «σέρνουμε» μέχρι την τιμή του επιθυμητού τελευταίου  $x$ .

### Παράδειγμα:

Δίνεται η διαφορική εξίσωση:

$$y' = f(x, y) = 2xy + x^3$$

με αρχική συνθήκη  $y(0)=2$  και ζητούνται Q

- Να λυθεί η διαφορική εξίσωση αναλυτικά και βαρεθεί η μερική της λύση.
- Η αριθμητική της λύση με τη μέθοδο του Runge–Kutta 2<sup>ης</sup> τάξης, βήμα  $h=0.1$ , μέχρι το σημείο  $x=1$ .
- Η αριθμητική της λύση με τη μέθοδο του Runge–Kutta 4<sup>ης</sup> τάξης, βήμα  $h=0.1$ , μέχρι το σημείο  $x=1$ .
- Να υπολογιστούν τα σχετικά σφάλματα των δύο αριθμητικών λύσεων στον υπολογισμό της τιμής  $y(1)$ .

### Λύση:

α) Υπολογίζουμε τη θεωρητική λύση (γενική και μερική).

$$y' = f(x, y) = 2xy + x^3 \quad \Rightarrow \quad y' - 2xy = x^3$$

όπου διαπιστώνουμε πως πρόκειται για γραμμική διαφορική εξίσωση με  $P(x)=-2x$  και  $Q(x)=x^3$ . Λύνουμε, λοιπόν, τα δύο ολοκληρώματα του τύπου επίλυσης:

$$\int P(x)dx = -\int 2xdx = -x^2$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx = \int x^3 e^{-x^2} dx$$

θέτουμε

$$t = -x^2$$

άρα

$$dt = -2xdx \Rightarrow -\frac{1}{2}dt = xdx$$

οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx &= \int x^3 e^{-x^2} dx = -\int -x^2 e^{-x^2} xdx = \\ &= \frac{1}{2} \int te^t dt = \frac{1}{2} (te^t - e^t) = \frac{1}{2} e^t (t-1) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^2 + 1) \end{aligned}$$

Έτσι, η γενική λύση παίρνει τη μορφή:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \left[ c + \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \right] = e^{x^2} \left[ c - \frac{1}{2} e^{-x^2} (x^2 + 1) \right] \Rightarrow$$

$$y(x, c) = ce^{x^2} - \frac{1}{2} (x^2 + 1)$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας τις τιμές της αρχικής συνθήκης στη γενική λύση, υπολογίζουμε την τιμή του  $c$  που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη.

$$\left. \begin{aligned} y(x, c) &= ce^{x^2} - \frac{1}{2}(x^2 + 1) \\ y(0) &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 = ce^0 - \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{5}{2}$$

οπότε η μερική λύση:

$$y(x) = \frac{5}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}(x^2 + 1)$$

**β)** Λύση με τη μέθοδο του Runge–Kutta 2<sup>ης</sup> τάξης, ακολουθώντας τη λογική του Excel, αναπτύσσοντας τον πίνακα προς τα κάτω.

x	y	K <sub>1</sub>	x+h	y+hK <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	Ακριβές
0	2	0	0.2	2	0.80800	2
0.2	2.08080	0.84032	0.4	2.24886	1.86309	2.082027
0.4	2.35114	1.94491	0.6	2.74012	3.50415	2.353777
0.6	2.89605	3.69126	0.8	3.63430	6.32688	2.903324
0.8	3.89786	6.74858	1	5.24758	11.49515	3.921202
1	5.72223	12.44447	1.2	8.21113	21.43471	5.795705
1.2	9.11015	23.59236	1.4	13.82862	41.46415	9.33174
1.4	15.61580	46.46824	1.6	24.90945	83.80624	16.26832
1.6	28.64325	95.75440	1.8	47.79413	177.89087	30.55954
1.8	56.00778	207.46000	2	97.49978	397.99911	61.7143
2	116.55369	474.21475	2.2	211.39664	940.79321	133.9954

όπου οι δύο χρωματισμένες στήλες αποτελούν τον πίνακα τιμών της άγνωστης συνάρτησης, όπως υπολογίστηκε από την αριθμητική μέθοδο.

Παράδειγμα υπολογισμού:

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + h \frac{K_1 + K_2}{2} \Rightarrow$$

$$y(0.2) = y(0 + 0.2) = y(0) + 0.2 \frac{f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y(x_0 + hK_1))}{2}$$

όπου



$$\left. \begin{aligned} y(0) &= 2 \\ K_1 &= f(0, 2) = \left[ 2xy + x^3 \right]_{x=0, y=2} = 0 \\ K_2 &= f(0.2, 2) = \left[ 2xy + x^3 \right]_{x=0.2, y=2} = 0.808 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$y(0.2) = 2 + 0.2 \frac{(0 + 0.808)}{2} = 2.0808$$

γ) Λύση με τη μέθοδο του Runge–Kutta 4<sup>ης</sup> τάξης, ακολουθώντας τη λογική του Excel, άλλωστε τόσοι υπολογισμοί με το χέρι θα ήταν δυσβάσταχτοι...

x	y	K <sub>1</sub>	x+h/2	y+hK <sub>1</sub> /2	K <sub>2</sub>	x+h/2	y+hK <sub>2</sub> /2	K <sub>3</sub>	x+h	y+hK <sub>3</sub>	K <sub>4</sub>	Ακριβές
0	2	0	0.1	2	0.401	0.1	2.040	0.409	0.2	2.082	0.841	2
0.2	2.082	0.84081	0.3	2.166106	1.327	0.3	2.215	1.356	0.4	2.353	1.947	2.082027
0.4	2.354	1.947015	0.5	2.548471	2.673	0.5	2.621	2.746	0.6	2.903	3.700	2.353777
0.6	2.903	3.699954	0.7	3.273291	4.926	0.7	3.396	5.097	0.8	3.923	6.788	2.903324
0.8	3.921	6.78575	0.9	4.599668	9.008	0.9	4.822	9.408	1	5.803	12.606	3.921202
1	5.795	12.59053	1.1	7.054316	16.850	1.1	7.480	17.788	1.2	9.353	24.175	5.795705
1.2	9.330	24.11996	1.3	11.74198	32.726	1.3	12.603	34.964	1.4	16.323	48.448	9.33174
1.4	16.262	48.27638	1.5	21.0892	66.643	1.5	22.926	72.152	1.6	30.692	102.311	16.26832
1.6	30.534	101.8052	1.7	40.71466	143.343	1.7	44.868	157.466	1.8	62.027	229.130	30.55954
1.8	61.619	227.6612	1.9	84.38533	327.523	1.9	94.372	365.471	2	134.713	546.854	61.7143
2	133.636	542.5439	2.1	187.8904	798.401	2.1	213.476	905.860	2.2	314.808	1395.803	133.9954

όπου οι δύο χρωματισμένες στήλες αποτελούν τον πίνακα τιμών της άγνωστης συνάρτησης, όπως υπολογίστηκε από την αριθμητική μέθοδο.

Παράδειγμα υπολογισμού πρώτου βήματος:

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + h \frac{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4}{6} \Rightarrow$$

$$y(0.2) = y(0 + 0.2) =$$

$$= y(0) + 0.2 \frac{f(x_0, y_0) + 2f(x_0 + \frac{h}{2}, y(x_0 + \frac{h}{2}K_1)) + 2f(x_0 + \frac{h}{2}, y(x_0 + \frac{h}{2}K_2)) + f(x_0 + h, y_0 + hK_3)}{6}$$

όπου

$$y(0) = 2$$

$$K_1 = f(0, 2) = \left[ 2xy + x^3 \right]_{x=0, y=2} = 0$$

$$K_2 = f(0.1, 2) = \left[ 2xy + x^3 \right]_{x=0.1, y=2} = 0.401$$

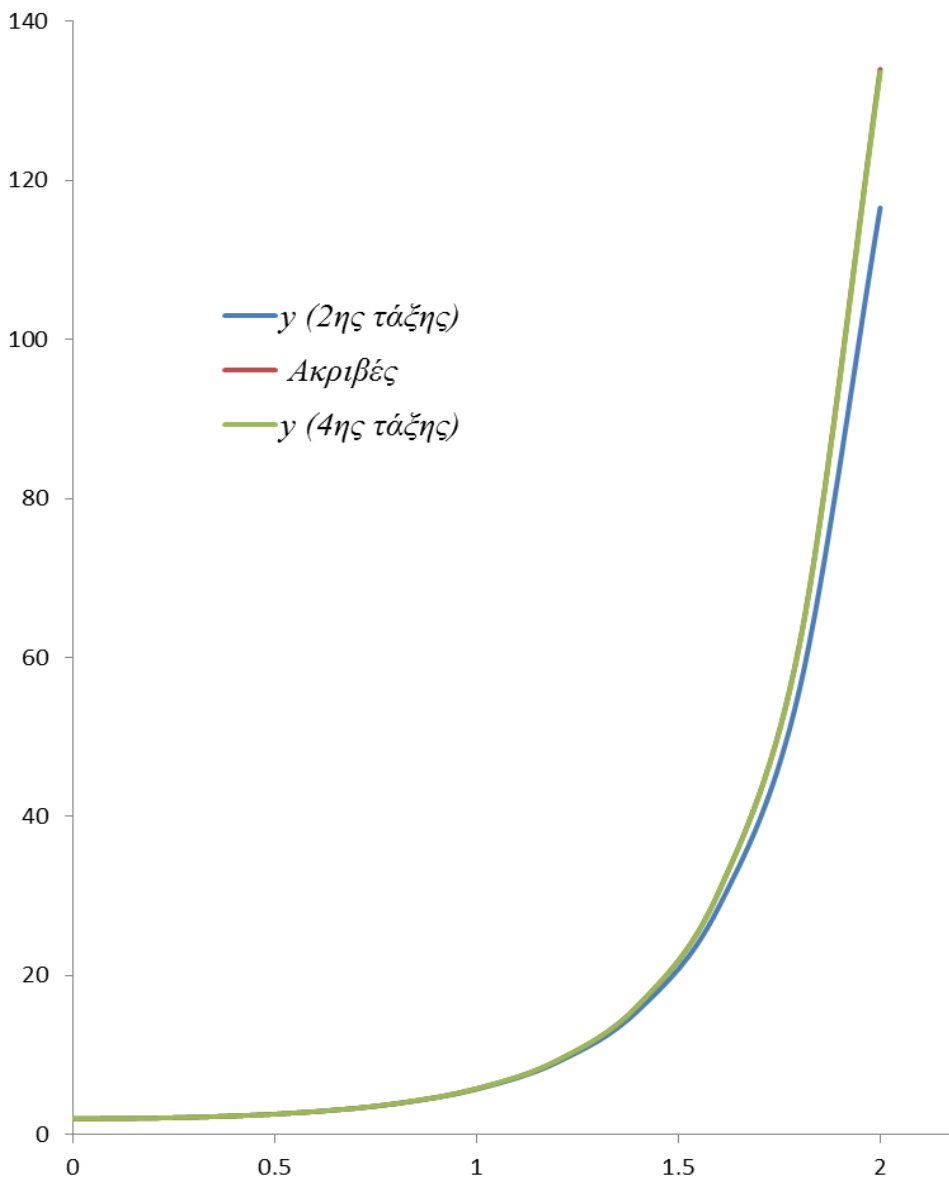
$$K_3 = f(0.1, 2 + 0.1 \cdot 0.401) = f(0.1, 2.0401) = \left[ 2xy + x^3 \right]_{x=0.1, y=2.0401} = 0.40902$$

$$K_4 = f(0.2, 2 + 0.2 \cdot 0.40902) = f(0.2, 2.081804) = \left[ 2xy + x^3 \right]_{x=0.12, y=2.081804} = 0.840722$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές βρίσκουμε:

$$y(0.2) = 2 + 0.2 \frac{(0 + 2 \cdot 0.401 + 2 \cdot 0.40909 + 0.840722)}{6} = 2.082025$$

δ) Γραφική παράσταση



**Σχήμα 9.11** Γραφική παράσταση της λύσης της διαφορικής εξίσωσης μέσω της μεθόδου των Runge–Kutta. 2<sup>ης</sup> και 4<sup>ης</sup> τάξης. Παρατηρούμε πως το αποτέλεσμα της 4<sup>ης</sup> τάξης συμπίπτει με το ακριβές.

### Παρατηρήσεις:

- Αρχικά να παρατηρήσουμε πως το αποτέλεσμα της μεθόδου  $2^{\text{ης}}$  τάξης έχει σχετικό σφάλμα αρκετά υψηλό (13,02 %). Είναι ένα αποτέλεσμα αναμενόμενο, ειδικά σε περιπτώσεις όπου στη λύση εμφανίζεται ο παράγοντας  $e$  υψωμένος σε δυνάμεις  $x^2$ ,  $x^3$  κ.λ.π., ενώ ταυτόχρονα το βήμα είναι ιδιαίτερα μεγάλο.
- Αντίθετα, εντυπωσιάζει η ακρίβεια της μεθόδου  $4^{\text{ης}}$  τάξης, παρά το ιδιαίτερα μεγάλο βήμα.



### 9.2.4 Το θέμα της ακρίβειας των αποτελεσμάτων

Η ακρίβεια της αριθμητικής λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης είναι ένα θέμα του οποίου η θεωρητική μελέτη ξεπερνά τα πλαίσια ενός συγγράμματος, σαν το παρόν. Στα προηγούμενα παραδείγματα επιλέξαμε παραδείγματα, για τα οποία μπορούσαμε να υπολογίσουμε την αναλυτική λύση της δοσμένης διαφορικής εξίσωσης. Στα παραδείγματα αυτά είχαμε την άνεση να εκτιμήσουμε την ακρίβεια των αριθμητικών αποτελεσμάτων. Αυτό το κάναμε για διδακτικούς λόγους, έτσι ώστε ο αναγνώστης να αποκτήσει μία ιδέα για το πρόβλημα της ακρίβειας των αποτελεσμάτων, σε σχέση με τη μέθοδο που επιλέγει και την τιμή του βήματος ολοκλήρωσης ( $h$ ).

Όμως, σπάνια καταφεύγουμε σε αριθμητικές λύσεις, όταν μία διαφορική εξίσωση λύνεται αναλυτικά. Στις περιπτώσεις αυτές, όπου δεν υπάρχει η ασφάλεια της αναλυτικής λύσης, είναι σημαντικό να έχουμε μια ιδέα για το πόσο ακριβή είναι τα αποτελέσματα. Για τον λόγο αυτό θα αναφερθούμε σε ένα πρακτικό τρόπο με τον οποίο μπορούμε να αποκτήσουμε μια εκτίμηση για την ακρίβεια που επετεύχθη.

Ας υποθέσουμε λοιπόν πως αναζητούμε την αριθμητική λύση της διαφορικής εξίσωσης  $y' = f(x, y)$ , με αρχική συνθήκη το σημείο  $(0, y(0))$ . Υποθέτουμε τώρα πως επιθυμούμε να υπολογίσουμε τις τιμές της άγνωστης συνάρτησης  $y(x)$ , στο διάστημα  $[0, 2]$ . Για τον λόγο αυτό εργαζόμαστε σύμφωνα με τα επόμενα στάδια:

- Επιλέγουμε μια επαρκώς ικανή μέθοδο, όπως είναι η μέθοδος του Taylor, ή των Runge–Kutta, αμφότερες στην εκδοχή της  $4^{\text{ης}}$  τάξης. Εάν είναι εύκολη η παραγώγιση του β' μέλους της διαφορικής εξίσωσης μπορούμε να επιλέξουμε τη μέθοδο του Taylor, ενώ σε αντίθετη περίπτωση επιλέγουμε αυτήν των Runge–Kutta.
- Ξεκινάμε, επιλέγοντας ως βήμα ολοκλήρωσης το  $h_1=0.1$  (αισιόδοξη εκκίνηση) και στρέφουμε την προσοχή μας στο τελευταίο αποτέλεσμα  $y(2)$ .
- Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία ολοκλήρωσης, μειώνοντας σταδιακά το βήμα ( $h_1 > h_2 > \dots > h_v$ ), υποδιπλασιάζοντας ή υποδεκαπλασιάζοντας, ανάλογα με το υπολογιστικό εργαλείο που έχουμε.
- Σταματούμε τη διαδικασία αυτή, όταν η ακολουθία των αποτελεσμάτων

$$y_1(2), y_2(2), \dots, y_{v-1}(2), y_v(2),$$

για την τιμή  $y(2)$  δείχνει να συγκλίνει με (σχετική) ασφάλεια. Μια (σχετικά) ικανοποιητική ένδειξη της ακρίβειας που πετύχαμε είναι η απόλυτη τιμή της διαφοράς των δύο τελευταίων αποτελεσμάτων:

$$\text{Πιθανό σφάλμα της τιμής } y_v(2) = |y_v(2) - y_{v-1}(2)|$$

- Στην περίπτωση που οι τιμές  $y_{v-1}(2)$  και  $y_v(2)$  έχουν ικανοποιητικά μικρή απόσταση μεταξύ τους, τότε μπορούμε (πάντα με σχετική ασφάλεια) να συμπεράνουμε πως και οι ενδιάμεσες τιμές έχουν ανάλογη ή καλύτερη ακρίβεια.

### Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>:

Να υπολογισθεί η αριθμητική λύση της διαφορικής εξίσωσης  $y' = f(x, y) = 2xy$ , με αρχική συνθήκη  $y(0) = 1$ , μέχρι την τιμή  $y(2)$  και επιζητούμενη ακρίβεια 6 σημαντικών ψηφίων.

### Λύση:

Λόγω της εύκολης παραγωγίσιμης του β' μέλους της διαφορικής εξίσωσης επιλέγουμε τη μέθοδο του Taylor. Οι παράγωγοι είναι:

$$y' = 2xy \Rightarrow y'' = 2y + 2xy' \Rightarrow y''' = 4y' + 2xy'' \Rightarrow y^{(4)} = 6y'' + 2xy'''$$

Ξεκινώντας με βήμα  $h=0.2$  υπολογίζουμε τον επόμενο πίνακα αποτελεσμάτων:

Λύση της $y' = f(x, y) = 2xy$			$x$	$y(x)$	$y'(x)$	$y''(x)$	$y'''(x)$	$y^{(4)}(x)$
Αρχικές συνθήκες			0	1	0	2	0	12
$x_0 =$	0		0.2	1.0408	0.41632	2.248128	2.564531	14.51458
$y_0 =$	1		0.4	1.173413574	0.938731	3.097812	6.233173	23.57341
$h =$	0.2		0.6	1.43299844	1.719598	4.929515	12.79381	44.92966
			0.8	1.895562082	3.032899	8.643763	25.96162	93.40117
			1	2.715859446	5.431719	16.29516	54.31719	206.4053
			1.2	4.214289631	10.1143	32.70289	118.9441	481.6832
			1.4	7.081910765	19.82935	69.686	274.4382	1186.543
			1.6	12.88652131	41.23687	157.731	669.6867	3089.384
			1.8	25.38738992	91.3946	379.7954	1732.842	8517.002
			2	54.14047346	216.5619	974.5285	4764.362	24904.62

Μέχρι το σημείο αυτό δεν έχουμε καμία ασφαλή ένδειξη για την ακρίβεια του αποτελέσματος, όσον αφορά στο σημείο  $x=2$ . Αντίθετα, η ραγδαία αύξηση της τιμής της συνάρτησης, από το 25.39 στο 54.14 μας προδιαθέτει αρνητικά.

Έτσι δοκιμάζουμε μια φθίνουσα σειρά βημάτων. Στον επόμενο πίνακα καταγράφουμε την ακολουθία τιμών της  $y(2)$ , ως συνάρτηση του βήματος  $h$ .

$h$	$x_{\text{(τελικό)}}$	$y(x)$
0.2	2	54.14047346
0.1	2	54.55828194
0.05	2	54.59520866
0.01	2	54.59814466
0.005	2	54.59814969
0.001	2	54.59815003
0.0005	2	54.59815003

Παρατηρώντας τον πιο πάνω πίνακα, αντιλαμβανόμαστε πως ήδη από το βήμα  $h=0.005$  έχει επιτευχθεί η ακρίβεια των έξι σημαντικών ψηφίων. Όμως, υπάρχει ένα λεπτό σημείο στην αποκοπή και στρογγύλευση του έκτου ψηφίου. Αν δεχθούμε την τιμή 54.5981497, θα πρέπει να δεχθούμε την τιμή 54.5981. Όμως, συνεχίζοντας τον υποδιπλασιασμό του βήματος, φθάνουμε στην τιμή 54.59815003, που φαίνεται να είναι απόλυτα ακριβής (γιατί επαναλαμβάνεται και μετά τον υποδιπλασιασμό του  $h$ ) και η οποία στρογγυλεύεται στο 54.5982!

Βέβαια όλα αυτά μοιάζουν υπερβολικά, μια και ο καθένας πιστεύει πως η ακριβής τιμή είχε (επί της ουσίας) επιτευχθεί νωρίτερα. Αξίζει, όμως, να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί, γιατί οι διαφορικές εξισώσεις έχουν τη δυνατότητα να μας εκπλήσσουν! Ας δούμε το επόμενο παράδειγμα...



### Παράδειγμα 2ο:

Να υπολογισθεί η αριθμητική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$y' = f(x, y) = y + 2\cos(2x) - \sin(2x) + 0.4x - 2.4$$

με αρχική συνθήκη  $y(0)=2$  μέχρι την τιμή  $y(35)$ .

### Λύση:

Αρχικά να πούμε πως πρόκειται για μία γραμμική διαφορική εξίσωση 1<sup>ης</sup> τάξης, της οποίας η γενική λύση είναι η:

$$y(x, c) = ce^x + \sin(2x) - 0.4x + 2$$

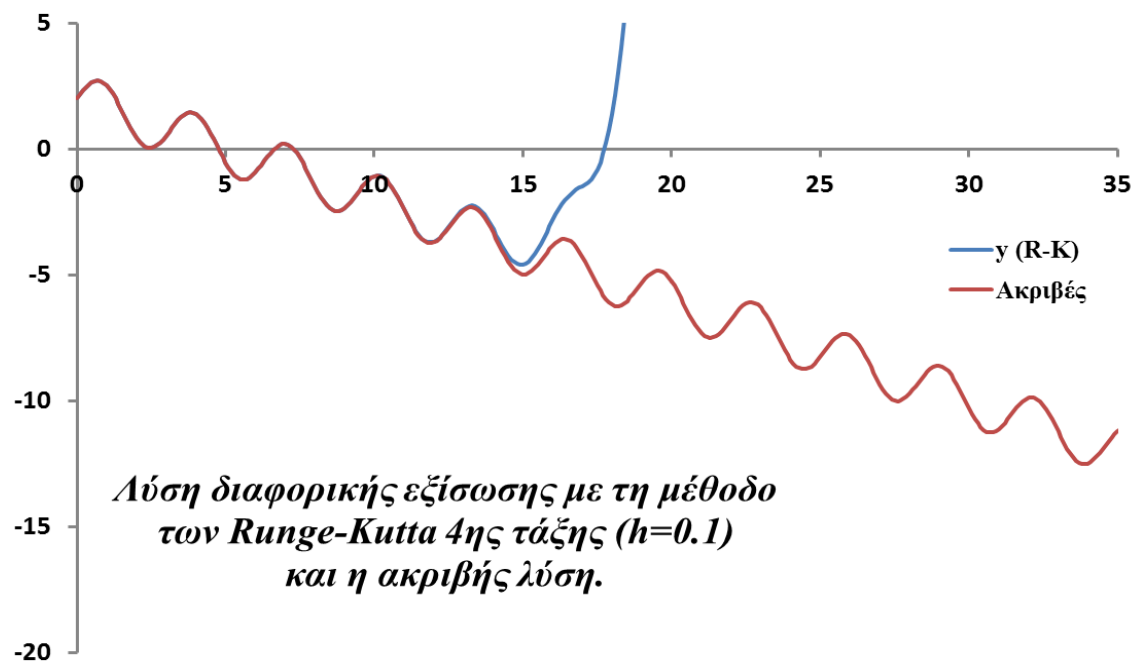
Επιλέγοντας την αρχική συνθήκη  $y(0)=2$ , προκύπτει το  $c=0$  και η μερική λύση είναι η:

$$y(x) = \sin(2x) - 0.4x + 2$$

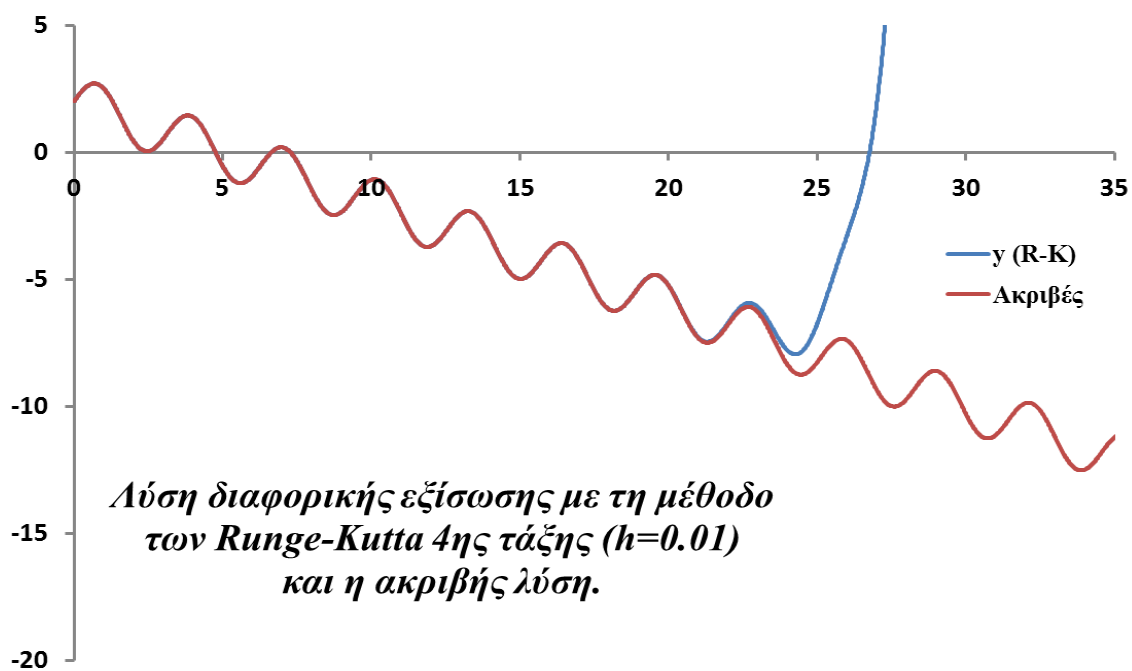
Σαν μέθοδο αριθμητικής επίλυσης επιλέγουμε την ικανότατη μέθοδο των Runge–Kutta (4<sup>ης</sup> τάξης), ξεκινώντας με βήμα ολοκλήρωσης το  $h=0.1$ . Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα πρώτο τμήμα του πίνακα τιμών που δημιουργείται:

x	y (R-K)	K1	x+h/2	y+k1(h/2)	K2	x+h/2	y+K2(h/2)	K3	x+h	y+hK3	K4
0	2	1.6	0.05	2.08	1.590175	0.05	2.079509	1.589684	0.1	2.158968	1.560432
0.1	2.158669	1.560133	0.15	2.236676	1.511829	0.15	2.234261	1.509413	0.2	2.30961	1.442314
0.2	2.309418	1.442122	0.25	2.381524	1.357264	0.25	2.377281	1.353021	0.3	2.44472	1.250749
0.3	2.444642	1.250671	0.35	2.507176	1.132642	0.35	2.501274	1.126741	0.4	2.557316	0.993373
0.4	2.557355	0.993413	0.45	2.607026	0.846919	0.45	2.599701	0.839594	0.5	2.641315	0.680449
0.5	2.64147	0.680604	0.55	2.675501	0.511485	0.55	2.667045	0.503029	0.6	2.691773	0.32445
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Στο Σχήμα 9.1 παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της λύσης με βήμα ολοκλήρωσης  $h=0.1$ . Παρατηρούμε πως ενώ η αριθμητική λύση ακολουθεί ικανοποιητικά την ακριβή λύση, κάποια στιγμή ξεφεύγει, περνώντας με μεγάλη ταχύτητα σε διαφορετικές καμπύλες, δηλαδή σε λύσεις που έχουν άλλες αρχικές συνθήκες. Αν παρατηρήσουμε όμως τη μορφή της γενικής λύσης θα διαπιστώσουμε πως στην περίπτωση αυτή παύει η αυθαίρετη σταθερά να είναι ίση με το 0, ενεργοποιώντας και το εκθετικό μέρος της λύσης  $y(x,c) = ce^x + \sin(2x) - 0.4x + 2$ . Θεωρούμε πως το πρόβλημα αυτό θα λυθεί εάν επιλέξουμε μικρότερο βήμα  $h$ . Στα επόμενα τρία σχήματα (Σχήματα 9.13, 9.14 και 9.15) παρουσιάζονται οι λύσεις της διαφορικής με πολύ μικρότερα βήματα. Παρατηρούμε ότι το σημείο, στο οποίο η αριθμητική λύση ξεφεύγει, μετατίθεται σε μεγαλύτερα  $x$  καθώς μειώνεται το βήμα ολοκλήρωσης. Παρατηρούμε επίσης πως η εκτροπή μπορεί να είναι και προς το αρνητικό άπειρο.



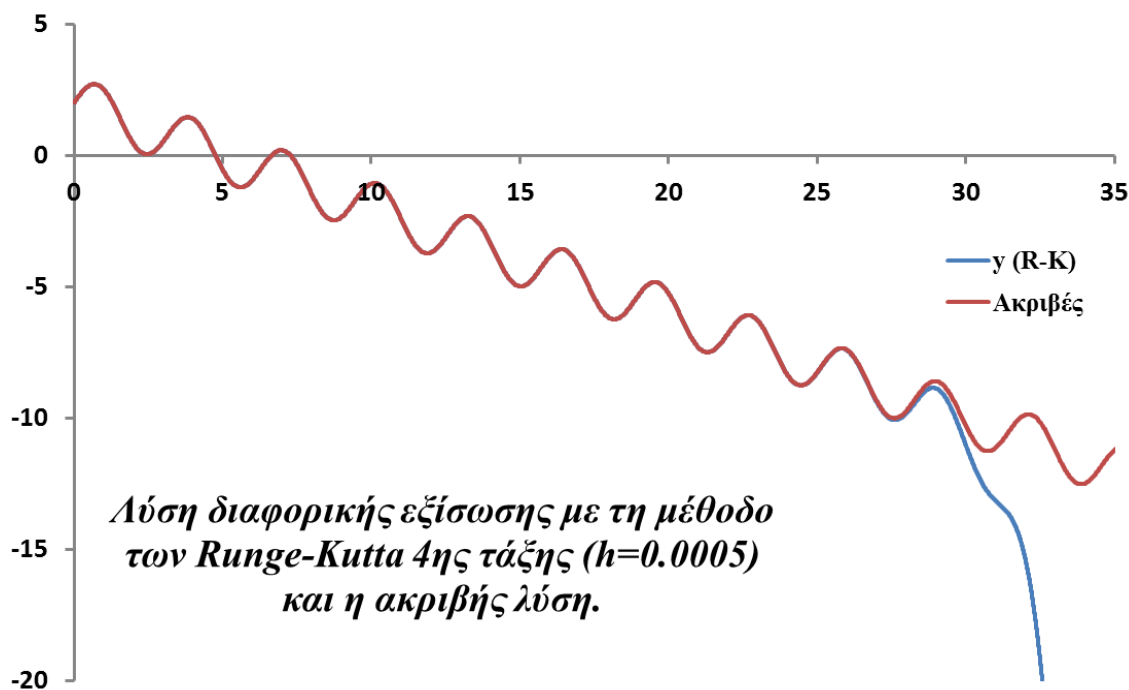
**Σχήμα 9.12** Αριθμητική (μπλε) και ακριβής (κόκκινη) λύση της διαφορικής εξίσωσης με βήμα ολοκλήρωσης  $h=0.1$



**Σχήμα 9.13** Αριθμητική (μπλε) και ακριβής (κόκκινη) λύση της διαφορικής εξίσωσης με βήμα ολοκλήρωσης  $h=0.01$



**Σχήμα 9.14** Αριθμητική (μπλε) και ακριβής (κόκκινη) λύση της διαφορικής εξίσωσης με βήμα ολοκλήρωσης  $h=0.002$



**Σχήμα 9.15** Αριθμητική (μπλε) και ακριβής (κόκκινη) λύση της διαφορικής εξίσωσης με βήμα ολοκλήρωσης  $h=0.0005$

## 9.3 Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων

### 9.3.1 Γενικά για τα Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων

Στα συστήματα διαφορικών εξισώσεων έχουμε  $n$  σχέσεις, που μας δίνουν πληροφορίες για την πρώτη παράγωγο  $n$  αγνώστων συναρτήσεων. Για παράδειγμα, το επόμενο σύστημα

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= 6y_1 + 4y_2 \end{aligned} \quad (9.3.1)$$

στο οποίο αναζητούνται σαν λύση οι συναρτήσεις  $y_1(x)$  και  $y_2(x)$ , οι οποίες να επαληθεύουν τις δύο εξισώσεις του συστήματος. Εύκολα μπορούμε να δείξουμε πως οι συναρτήσεις:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{5x} \quad \text{και} \\ y_2(x) &= 2e^{5x} \end{aligned}$$

αποτελούν μία (μερική) λύση του συστήματος (9.3.1).

Το σύστημα αυτό καλείται «Ομογενές Γραμμικό Σύστημα δύο Διαφορικών Εξισώσεων». Και λέγεται γραμμικό και ομογενές διότι:

- οι συντελεστές των συναρτήσεων, στο β' μέλος των διαφορικών εξισώσεων, είναι σταθεροί και ανήκουν στους πραγματικούς αριθμούς,
- δεν υπάρχει μία συνάρτηση του  $x$  που να αθροίζεται στη μία ή και στις δύο εξισώσεις.

Λέμε λοιπόν πως το επόμενο σύστημα:

$$\begin{aligned} y_1' &= F_1(y_1, y_2) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= F_2(y_1, y_2) = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned} \quad \text{όπου } a_{ij} \in \mathbb{R}$$



είναι ένα ομογενές γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων, στο οποίο οι συναρτήσεις δύο μεταβλητών  $F_1(y_1, y_2)$  και  $F_2(y_1, y_2)$  απλά συμβολίζουν τα δεύτερα μέλη των δύο διαφορικών εξισώσεων.

Αντίθετα, το σύστημα:

$$\begin{aligned} y'_1 &= F_1(x, y_1, y_2) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + f_1(x) \\ y'_2 &= F_2(x, y_1, y_2) = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + f_2(x) \end{aligned} \quad \text{όπου } a_{ij} \in R$$

είναι ένα μη ομογενές γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων, διότι στο δεύτερο μέλος των εξισώσεων περιέχει και εκφράσεις που περιέχουν τη μεταβλητή  $x$ .

Η γενική λύση ενός συστήματος δύο διαφορικών εξισώσεων με δύο άγνωστες συναρτήσεις είναι της μορφής:

$$y = y_1(x, c_1, c_2)$$

$$y = y_2(x, c_1, c_2)$$

ενώ, οι αρχικές συνθήκες είναι της μορφής:

$$y_1(x_0) = y_{1,0}$$

$$y_2(x_0) = y_{2,0}$$

Η γενική μορφή των συστημάτων διαφορικών εξισώσεων είναι πολύ πιο πολύπλοκη από αυτή που περιγράφηκε πιο πάνω, όμως παραμένουμε σε συστήματα τέτοιας (απλής) μορφής, μια και με αυτά πρόκειται να ασχοληθούμε.

## Επίλυση των συνηθισμένων διαφορικών εξισώσεων, μέσω των συστημάτων

Πέρα από τα πολλά παραδείγματα που μας δίνει η Φυσική, ένας τρόπος δημιουργίας συστημάτων διαφορικών εξισώσεων είναι και αυτός, με τον οποίο επιλύουμε τις συνηθισμένες διαφορικές εξισώσεις μεγαλύτερης τάξης. Έστω, για παράδειγμα, η διαφορική εξίσωση 2<sup>ης</sup> τάξης:

$$y'' = f(x, y, y')$$

Θεωρώντας πως η πρώτη παράγωγος  $y'(x)$  είναι μία νέα συνάρτηση  $y'(x) = u(x)$ , δημιουργούμε το σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων 1<sup>ης</sup> τάξης, θέτοντας  $u(x) = y'(x)$  και  $u'(x) = y''(x)$ :

$$y'' = f(x, y, y') \Rightarrow \begin{cases} y' = u \\ u' = f(x, y, u) \end{cases}$$

Οι μέθοδοι αναλυτικής επίλυσης των συστημάτων, οι οποίες αναφέρονται στο μάθημα της Μαθηματικής Ανάλυσης II, είναι ποιοτικά διαφορετικές από αυτές που αντιμετωπίσαμε ως τώρα (αναφερόμαστε στις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης που εντάσσονται στις κατηγορίες των Χωριζόμενων Μεταβλητών και τις Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις). Για τον λόγο αυτό δεν θα αναφερθούμε καθόλου σε αναλυτικές λύσεις, στα πλαίσια αυτού του συγγράμματος.

Αντίθετα, από το σύνολο των μεθόδων αριθμητικής ολοκλήρωσης των συστημάτων διαφορικών εξισώσεων θα επιλέξουμε τις γνωστές μας, αυτές που αποτελούν επέκταση των μεθόδων του Euler, του Taylor, και των Runge–Kutta, τις οποίες γνωρίσαμε ήδη.

Επομένως αντιλαμβανόμαστε, για άλλη μία φορά, πως οι λύσεις στις οποίες θα καταλήξουμε μέσω της αριθμητικής επίλυσης...

- θα είναι μερικές λύσεις και επομένως χρειάζονται, για να ξεκινήσουν, τις αρχικές συνθήκες,
- θα καταλήγουν στην κατάρτιση ενός πίνακα τιμών των άγνωστων συναρτήσεων, για συγκεκριμένες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής.

### 9.3.2 Η μέθοδος του Euler

Έστω το σύστημα των δύο διαφορικών εξισώσεων:

$$y'_1 = F_1(x, y_1, y_2) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + f_1(x)$$

$$y'_2 = F_2(x, y_1, y_2) = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + f_2(x)$$

όπου  $a_{ij} \in R$ , και οι αρχικές συνθήκες:

$$y_1(x_0) = y_{1,0}$$

$$y_2(x_0) = y_{2,0}$$

Αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες στις δύο εξισώσεις του συστήματος, υπολογίζουμε την τιμή της πρώτης παραγώγου (της κλίσης κ) των δύο άγνωστων συναρτήσεων, στο σημείο  $x_0$ :

$$y'_1 = a_{11}y_{1,0} + a_{12}y_{2,0} + f_1(x_0) = \kappa_{y_1}(x_0)$$

$$y'_2 = a_{21}y_{1,0} + a_{22}y_{2,0} + f_2(x_0) = \kappa_{y_2}(x_0)$$

Επομένως, μπορούμε να υλοποιήσουμε τον γνωστό, από την προηγούμενη παράγραφο, τύπο του Euler,

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) = y(x_0) + hf(x_0, y_0)$$

χρησιμοποιώντας την κάθε μία από αυτές τις τιμές των παραγώγων (κλίσεων), για κάθε μία από τις αντίστοιχες συναρτήσεις:

$$y_1(x_1) = y_1(x_0 + h) = y_1(x_0) + h\kappa_{y_1}(x_0)$$

$$y_2(x_1) = y_2(x_0 + h) = y_2(x_0) + h\kappa_{y_2}(x_0)$$

### Ο υπολογισμός της μεθόδου του Euler με το Excel

Η εφαρμογή του τύπου του Euler στο Excel είναι αρκετά απλή και περιγράφεται στον επόμενο πίνακα:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Λύση του συστήματος								
2		$y'_1 = F_1(x, y_1, y_2)$			$x$	$y_1(x)$	$y_2(x)$	$y'_1(x)$	$y'_2(x)$
3		$y'_2 = F_2(x, y_1, y_2)$			=C6	=C7	=C8	=F <sub>1</sub> (E3,F3,G3)	=F <sub>2</sub> (E3,F3,G3)
4					=E3+C\$9	=F3+C\$9*H3	=G3+C\$9*I3	=F <sub>1</sub> (E4,F4,G4)	=F <sub>2</sub> (E4,F4,G4)
5		Αρχική Συνθήκη			=E4+C\$9	=F4+C\$9*H4	=G4+C\$9*I4	=F <sub>1</sub> (E5,F5,G5)	=F <sub>3</sub> (E5,F5,G5)
6		$x_0 =$	0		...	...	...	...	...
7		$y_{1,0} =$	1						
8		$y_{2,0} =$	2						
9		$h =$	0.2						
10									

## Παρατηρήσεις

- Στα κελιά C6, C7, C8 και C9 γράφουμε τις αρχικές συνθήκες  $(x_0, y_{1,0}, y_{2,0})$  και το βήμα ολοκλήρωσης ( $h$ ), αντίστοιχα, τα οποία μπορεί να μεταβάλλει ο χρήστης.
- Στα κελιά E3, F3 και G3 αντιγράφουμε τις αρχικές συνθήκες.
- Στο κελί H3 υπολογίζουμε την τιμή της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης  $y_1(x)$ , για τις τιμές των κελιών E3, F3 και G3.
- Στο κελί I3 υπολογίζουμε την τιμή της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης  $y_2(x)$ , για τις τιμές των κελιών E3, F3 και G3.
- Στο κελί E4 προσθέτουμε στο αμέσως προηγούμενο (το E3) το βήμα  $h$ , κλειδώνοντάς το έτσι ώστε όταν «σύρουμε» το E4 να μην μεταβάλλεται το βήμα  $h$ .
- Στο κελί F4 γράφουμε τον τύπο του Euler για τη συνάρτηση  $y_1(x)$ , που στηρίζεται στις τιμές της προηγούμενης σειράς.
- Στο κελί G4 γράφουμε τον τύπο του Euler για τη συνάρτηση  $y_2(x)$ , που στηρίζεται στις τιμές της προηγούμενης σειράς.
- «Σέρνουμε» τους τύπους των κελιών H3 και I3 μέχρι το H4 και I4, επαναλαμβάνοντας τον υπολογισμό των δύο παραγώγων για τα νέα  $x$  και  $y_1$  και  $y_2$  (E4, F4 και G4).
- Επιλέγουμε ταυτόχρονα τα κελιά E4, F4, G4, H4, I4 και τα «σέρνουμε» μέχρι την τιμή του επιθυμητού τελευταίου  $x$ .
- Οι στήλες F και G περιέχουν τις τιμές των  $y_1$  και  $y_2$  για τα αντίστοιχα  $x$  (στήλη E) και μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε για να σχεδιάσουμε τις γραφικές τους παραστάσεις, είτε ως συνάρτηση του  $x$  ή ως συνάρτηση του ενός  $y$  σε σχέση με το άλλο, π.χ. το  $y_2$  ως συνάρτηση του  $y_1$ .

## Παράδειγμα:

Να επιλυθεί με τη μέθοδο του Euler το επόμενο ομογενές σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$y'_1 = y_1 - y_2$$

$$y'_2 = 2y_1 + 3y_2$$

με αρχικές συνθήκες:  $y_1(0)=1$  και  $y_2(0)=-1$  και βήμα ολοκλήρωσης  $h=0.2$ , μέχρι το σημείο  $x=1$ .

Τέλος, να υπολογισθεί η ακρίβεια των αποτελεσμάτων στο τελευταίο σημείο ( $x=1$ ), όταν δίνεται η αναλυτική λύση του συστήματος:

$$y_1(x) = e^{2x} \cos(x)$$

$$y_2(x) = -e^{2x} (\cos(x) - \sin(x))$$

## Λύση:

Δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα τιμών, ξεκινώντας από το σημείο της αρχικής συνθήκης και συνεχίζοντας βήμα – βήμα (γραμμή – γραμμή), αφού, κάθε φορά, τα προηγούμενα δεδομένα (τα δεδομένα της προηγούμενης γραμμής) επιτρέπουν τον υπολογισμό του επόμενου σημείου:

x	y <sub>1</sub> (Euler)	y <sub>2</sub> (Euler)	y <sub>1</sub> '	y <sub>2</sub> '	Ακριβές y <sub>1</sub>	Ακριβές y <sub>2</sub>
0	1	-1	2	-1	1	-1
0.2	1.4	-1.2	2.6	-0.8	1.46208753	-1.1657077
0.4	1.92	-1.36	3.28	-0.24	2.04985894	-1.1831925
0.6	2.576	-1.408	3.984	0.928	2.74021074	-0.8655317
0.8	3.3728	-1.2224	4.5952	3.0784	3.45081092	0.1022771
1	4.29184	-0.60672	4.89856	6.76352	3.99232405	2.2253523
1.2						
1.4						
1.6						

όπου οι τρεις πρώτες, χρωματισμένες, στήλες αποτελούν τον πίνακα τιμών των δύο άγνωστων συναρτήσεων, όπως υπολογίστηκε από την αριθμητική μέθοδο.

Παράδειγμα υπολογισμού:

$$\begin{aligned} y_1(x_1) &= y_1(x_0 + h) = y_1(x_0) + hy'_1(x_0) \\ y_2(x_1) &= y_2(x_0 + h) = y_2(x_0) + hy'_2(x_0) \end{aligned} \Rightarrow$$

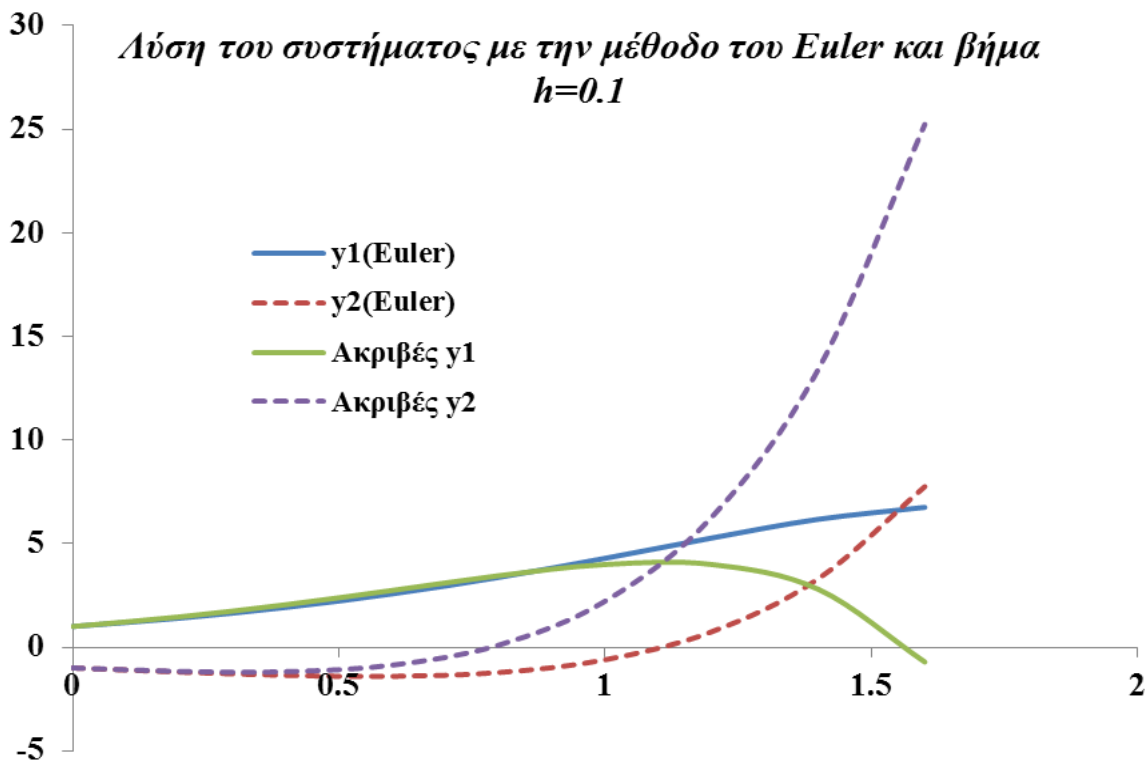
$$\begin{aligned} y_1(0.2) &= y_1(0 + 0.2) = y_1(0) + 0.2y'_1(0) \\ y_2(0.2) &= y_2(0 + 0.2) = y_2(0) + 0.2y'_2(0) \end{aligned}$$

όπου

$$\left. \begin{aligned} y'_1(0) &= y_1(0) - y_2(0) = 1 - (-1) = 2 \\ y'_2(0) &= 2y_1(0) + 3y_2(0) = 2 \cdot 1 + 3(-1) = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

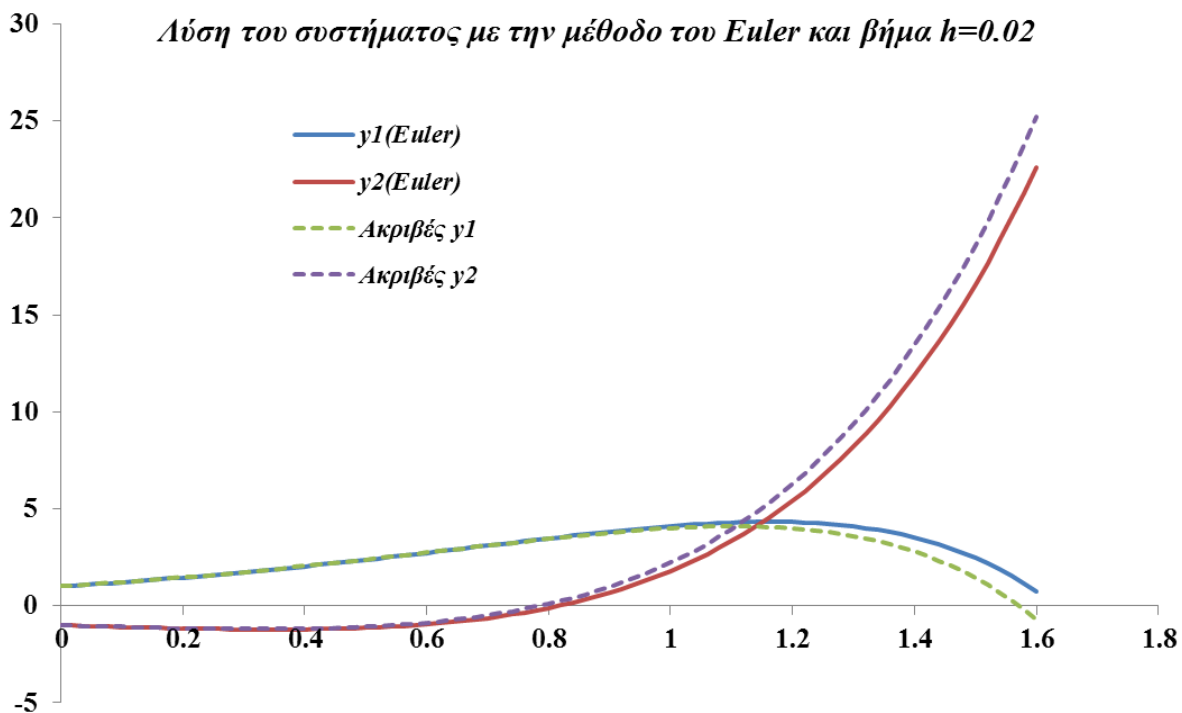
$$\begin{aligned} y_1(0.2) &= y_1(0) + 0.2y'_1(0) = 1 + 0.2 \cdot 2 = 1.4 \\ y_2(0.2) &= y_2(0) + 0.2y'_2(0) = -1 + 0.2(-1) = -1.2 \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση των αποτελεσμάτων του προηγούμενου πίνακα, επεκτείνοντάς τον μέχρι το σημείο  $x=1.6$  και επισυνάπτοντας τις ακριβείς λύσεις, δίνεται στο επόμενο γράφημα:



**Σχήμα 9.16** Η αριθμητική λύση του συστήματος και οι ακριβείς καμπύλες.

Στη συνέχεια, επαναλαμβάνεται ο ίδιος υπολογισμός, με βήμα  $h=0.02$ , με τα αποτελέσματα να εμφανίζονται (ακριβώς με τον ίδιο τρόπο) στο επόμενο γράφημα:



**Σχήμα 9.17** Η αριθμητική λύση του συστήματος και οι ακριβείς καμπύλες. Παρατηρούμε πως ο υποδεκαπλασιασμός του βήματος ολοκλήρωσης βελτίωσε αισθητά την ακρίβεια των αποτελεσμάτων.



### 9.3.3 Η μέθοδος του Taylor

Ο τρόπος εφαρμογής της μεθόδου του Taylor στα συστήματα των διαφορικών εξισώσεων είναι αρκετά όμοιος με τον τρόπο λειτουργίας του στις διαφορικές εξισώσεις 1<sup>ης</sup> τάξης, τον οποίο μελετήσαμε στην παράγραφο 6.2.2. Επομένως, για την κάθε μία (άγνωστη) συνάρτηση του συστήματος ισχύει η γνωστή σχέση, η οποία, για την πρώτη από αυτές, την  $y_1(x)$ , είναι η:

$$y_1(x_0 + h) = y_1(x_0) + h y_1'(x_0) + \frac{h^2}{2!} y_1''(x_0) + \dots + \frac{h^v}{v!} y_1^{(v)}(x_0) + \dots$$

Και στην περίπτωση αυτή θα ορίσουμε το ανάπτυγμα της άγνωστης συνάρτησης  $y(x)$ , με τη βοήθεια

- της αρχικής συνθήκης  $[y_1(x_0)]$ ,
- της πρώτης παραγώγου  $[y_1'(x_0) = F(x_0, y_1(x_0), y_2(x_0))]$ ,
- αλλά και των υπολοίπων παραγώγων, οι οποίες προκύπτουν από την παραγωγή της σχέσης της διαφορικής εξίσωσης που αφορά στη συνάρτηση  $y_1(x)$ , εφαρμόζοντας και πάλι την πεπλεγμένη παραγωγή.

### Ο υπολογισμός της μεθόδου του Taylor με το Excel

Η εφαρμογή του τύπου του Taylor στο Excel είναι αρκετά απλή. Λόγω του ότι οι μέθοδοι μεγαλύτερης τάξης χρειάζονται περισσότερο χώρο (από το πλάτος της σελίδας), στον επόμενο πίνακα περιγράφεται η μέθοδος 2<sup>ης</sup> τάξης:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Αρχικές συνθήκες		$x_0 =$	...			
2			$y_{1,0} = y_1(x_0) =$	...			
3			$y_{2,0} = y_2(x_0) =$	...			
4			$h =$	...			
5							
6	$x_0$	$y_1(x_0)$	$y_2(x_0)$	$y_1'(x_0) = F_1(x_0, y_1(x_0))$	$y_1'(x_0) = F_1(x_0, y_1(x_0))$	$y_1''(x_0)$	$y_2''(x_0)$
7	$x_1 = x_0 + h$	$y_{1(T)}(x_1) =$ $= y_1(x_0) +$ $+ h y_1'(x_0) +$ $+ \frac{h^2}{2} y_1''(x_0)$	$y_{2(T)}(x_1) =$ $= y_2(x_0) +$ $+ h y_2'(x_0) +$ $+ \frac{h^2}{2} y_2''(x_0)$	—»—	—»—	—»—	—»—
8	—»—	—»—	—»—	—»—	—»—	—»—	—»—
9							

όπου

- η παράγωγος  $y_1''(x_0)$  υπολογίζεται με την πεπλεγμένη παραγωγή της πρώτης διαφορικής εξίσωσης  $y_1'(x_0) = F_1(x_0, y_1(x_0))$ . Ίσως να είναι χρήσιμο να θυμίσουμε την πεπλεγμένη παραγωγή με ένα παράδειγμα:

$$y_1'(x) = F_1(x, y_1, y_2) = x^2 y_1^3 + y_1 \sin(y_2) \quad \left( \frac{d}{dx} \right)$$

$$\Rightarrow$$

$$y_1''(x) = 2xy_1^3 + 3x^2 y_1^2 y_1' + y_1' \sin(y_2) + y_1 y_2' \cos(y_2)$$

- τα ομοιωματικά δηλώνουν την επανάληψη των κελιών της προηγούμενης γραμμής, σε αντίθεση με αυτά που έχουμε γραμμένα και τα οποία πρέπει να γραφούν από αυτόν που δημιουργεί το φύλλο. Προφανώς, τα κελιά A6, B6, C6 περιέχουν τις αρχικές συνθήκες, ενώ όπου (στις πράξεις των κελιών A7, B7, C7) αναφέρεται το βήμα ολοκλήρωσης (h), σταθεροποιείται...

### Παράδειγμα:

Να επιλυθεί με τη μέθοδο του Taylor 3<sup>ης</sup> τάξης, το επόμενο ομογενές σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$y_1' = 3y_1 + y_2$$

$$y_2' = y_1 + 3y_2$$

με αρχικές συνθήκες:  $y_1(0)=1$  και  $y_2(0)=0$ , και βήμα ολοκλήρωσης  $h=0.2$ , μέχρι το σημείο  $x=1$ . Τέλος, να υπολογισθεί η ακρίβεια των αποτελεσμάτων στο τελευταίο σημείο ( $x=1$ ), όταν δίνεται η αναλυτική λύση του συστήματος:

$$y_1(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{4x}$$

$$y_2(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{4x}$$

### Λύση:

Αρχικά, θα υπολογίσουμε τη δεύτερη και την τρίτη παράγωγο των δύο συναρτήσεων, παραγωγίζοντας τις δύο διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} y_1' = 3y_1 + y_2 & \Rightarrow y_1'' = 3y_1' + y_2' & \Rightarrow y_1''' = 3y_1'' + y_2'' \\ y_2' = y_1 + 3y_2 & \Rightarrow y_2'' = y_1' + 3y_2' & \Rightarrow y_2''' = y_1'' + 3y_2'' \end{aligned}$$

Ο πίνακας της μεθόδου του Taylor 3<sup>ης</sup> τάξης:

x	y <sub>1</sub> (Taylor)	y <sub>2</sub> (Taylor)	y <sub>1</sub> '	y <sub>2</sub> '	y <sub>1</sub> ''	y <sub>2</sub> ''	y <sub>1</sub> '''	y <sub>2</sub> '''	Ακρίβες y <sub>1</sub>	Ακρίβες y <sub>2</sub>
0	1	0	3	1	10	6	36	28	1	0
0.2	1.8480	0.3573	5.9013	2.9200	20.6240	14.6613	76.5333	64.6080	1.8587	0.3669
0.4	3.5428	1.3207	11.9491	7.5049	43.3521	34.4638	164.5202	146.7435	3.5893	1.3637
0.6	7.0190	3.7066	24.7636	18.1389	92.4298	79.1802	356.4697	329.9705	7.1716	3.8515
0.8	14.2956	9.3580	52.2448	42.3695	199.104	179.353	776.6654	737.1640	14.7428	9.7897
1	29.7622	22.4018	111.688	96.9677	432.033	402.592	1698.691	1639.808	30.9936	23.6045

όπου οι τρεις χρωματισμένες στήλες (τρεις πρώτες στήλες) αποτελούν τον πίνακα τιμών των δύο άγνωστων συναρτήσεων, όπως υπολογίστηκε από την αριθμητική μέθοδο.

Παράδειγμα υπολογισμού:

$$\left. \begin{aligned} y_1(x_1) &= y_1(x_0 + h) = y_1(x_0) + hy'_1(x_0) + \frac{h^2}{2} y''_1(x_0) + \frac{h^3}{6} y'''_1(x_0) \\ y_2(x_1) &= y_2(x_0 + h) = y_2(x_0) + hy'_2(x_0) + \frac{h^2}{2} y''_2(x_0) + \frac{h^3}{6} y'''_2(x_0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$y_1(0.2) = y_1(0 + 0.2) = y_1(0) + 0.2y'_1(0) + \frac{0.2^2}{2} y''_1(0) + \frac{0.2^3}{6} y'''_1(0)$$

$$y_2(0.2) = y_2(0 + 0.2) = y_2(0) + 0.2y'_2(0) + \frac{0.2^2}{2} y''_2(0) + \frac{0.2^3}{6} y'''_2(0)$$

όπου

$$y'_1(0) = 3y_1(0) + y_2(0) = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 3$$

$$y'_2(0) = y_1(0) + 3y_2(0) = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 1$$

$$y''_1(0) = 3y'_1(0) + y'_2(0) = 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 10$$

$$y''_2(0) = y'_1(0) + 3y'_2(0) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 6$$

$$y'''_1(0) = 3y''_1(0) + y''_2(0) = 3 \cdot 10 + 1 \cdot 6 = 36$$

$$y'''_2(0) = y''_1(0) + 3y''_2(0) = 1 \cdot 10 + 3 \cdot 6 = 28$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε

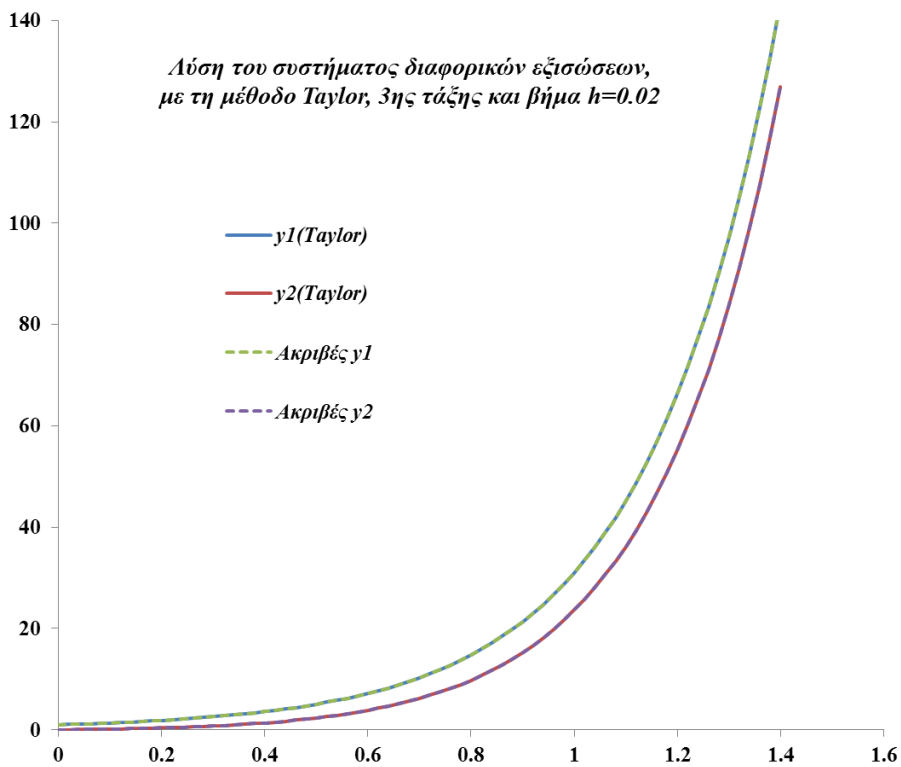
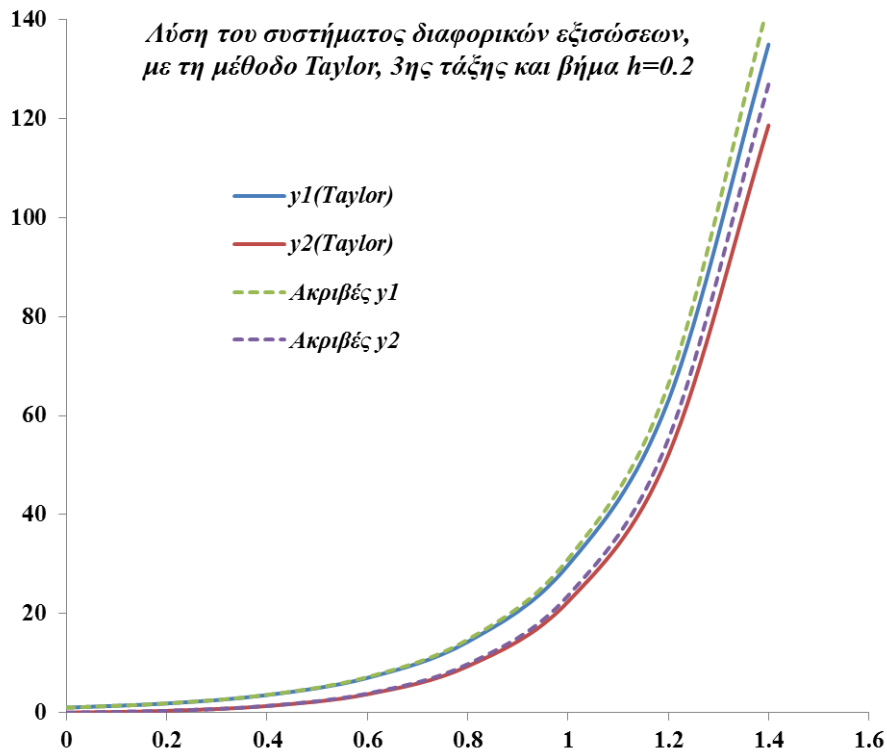
$$\begin{aligned} y_1(0.2) &= y_1(0) + 0.2y'_1(0) + \frac{0.2^2}{2} y''_1(0) + \frac{0.2^3}{6} y'''_1(0) = \\ &= 1 + 0.2 \times 3 + 0.02 \times 10 + 0.001333 \times 36 = 1.848 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(0.2) &= y_2(0) + 0.2y'_2(0) + \frac{0.2^2}{2} y''_2(0) + \frac{0.2^3}{6} y'''_2(0) = \\ &= 0 + 0.2 \times 1 + 0.02 \times 6 + 0.001333 \times 28 = 0.3573 \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση των αποτελεσμάτων του προηγούμενου πίνακα, επεκτείνοντάς τον μέχρι το σημείο  $x=1.4$  και επισυνάπτοντας τις ακριβείς λύσεις, δίνεται στο επόμενο γράφημα (Σχήμα 9.18).

Στο Σχήμα 9.19 παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των αριθμητικών λύσεων του ίδιου συστήματος, όταν το βήμα είναι δέκα φορές μικρότερο, δηλαδή  $h=0.02$ . Στο ίδιο σχήμα εμφανίζονται και οι γραφικές παραστάσεις των ακριβών λύσεων. Παρατηρήστε την πολύ καλύτερη ταύτιση των αριθμητικών λύσεων με τις ακριβείς, σε σχέση με αυτές του Σχήματος 9.18.





Σχήματα 9.18 και 9.19 Η αριθμητική λύση και οι ακριβείς καμπύλες, με βήματα ολοκλήρωσης  $h=0.2$  και  $0.02$ .

### 9.3.4 Η μέθοδος των Runge–Kutta

Η εφαρμογή της μεθόδου των Runge–Kutta στα συστήματα διαφορικών εξισώσεων είναι μια απλή επέκταση του τρόπου εφαρμογής της στις διαφορικές εξισώσεις 1<sup>ης</sup> τάξης. Χρησιμοποιεί τις εξισώσεις του συστήματος για να υπολογίσει την κατάλληλη κλίση της κάθε άγνωστης συνάρτησης, με την οποία θα υπολογίσει την επόμενη τιμή της, εφαρμόζοντας, επί της ουσίας, τη λογική της μεθόδου του Euler:

$$(\text{Νέα τιμή}) = (\text{παλιά τιμή}) + (\text{κατάλληλη κλίση}) (\Delta x)$$

Δεν κρίνουμε σκόπιμο να επαναλάβουμε τους τύπους των Runge–Kutta. Ο αναγνώστης που δεν τους θυμάται, μπορεί να τους μελετήσει στην αντίστοιχη παράγραφο 6.2.3.

#### Ο υπολογισμός της μεθόδου των Runge–Kutta με το Excel

Η εφαρμογή του τύπου των Runge–Kutta στο Excel είναι αρκετά απλή. Λόγω του ότι οι μέθοδοι μεγαλύτερης τάξης χρειάζονται περισσότερο χώρο (από το πλάτος της σελίδας), στον επόμενο πίνακα περιγράφεται η μέθοδος 2<sup>ης</sup> τάξης:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	$x$	$y_{1(R-K)}(x)$	$y_{2(R-K)}(x)$	$K_1(F_1)$	$K_1(F_2)$	$x+h$	$y_1=y_{1(R-K)}+hK_1$	$y_2=y_{2(R-K)}+hK_2$	$K_2(F_1)$	$K_2(F_2)$
2	Αρχικές συνθήκες			Η κλίση των $y_1, y_2$ για τις διπλανές τιμές $(x, y_{1(R-K)}, y_{2(R-K)})$		$x+h$	Η τιμή των $y_1, y_2$ , όπως δίνονται από τον τύπο του Euler, για τις διπλανές τιμές $(x, y_1, K_1(y_1))$ και $(x, y_2, K_1(y_2))$			Η κλίση των $y_1, y_2$ για τις διπλανές τιμές $(x+h, y_1, y_2)$
3	$x+h$	$y_{1(R-K)}(x+h)=y_1(x)+h(K_1(y_1)+K_2(y_1))/2$ και $y_{2(R-K)}(x+h)=y_2(x)+h(K_1(y_2)+K_2(y_2))/2$		—»—	—»—	—»—	—»—	—»—	—»—	—»—
4	—»—	—»—	—»—	—»—	—»—	—»—	—»—	—»—	—»—	—»—

#### Παρατηρήσεις:

- Η πρώτη διαφορική εξίσωση του συστήματος  $y_1'(x)=F_1(x, y_1, y_2)$  δηλώνει πως η παράγωγος της  $y_1$  εξαρτάται από τη μεταβλητή  $x$ , αλλά και από τις συναρτήσεις  $y_1$  και  $y_2$ . Ακριβώς το ίδιο συμβαίνει και με τη δεύτερη εξίσωση:  $y_2'(x)=F_2(x, y_1, y_2)$ . Για τον λόγο αυτό οι παράγωγοι των στηλών D και F χρησιμοποιούν τα δεδομένα των στηλών A, B και C.
- Όπως ειπώθηκε, η μέθοδος των Runge–Kutta δεν χρειάζεται την (πεπλεγμένη) παραγωγή της διαφορικής εξίσωσης (ή των διαφορικών εξισώσεων του συστήματος). Αυτό σημαίνει πως είναι ιδανική (σε σχέση με τη μέθοδο του Taylor), όταν η έκφραση του β' μέλους των διαφορικών εξισώσεων είναι αρκετά (ή πολύ) περίπλοκη. Επομένως και στην εφαρμογή της μεθόδου στο Excel επιδιώκουμε να μην ξαναγράψουμε την έκφραση της (ή των) διαφορικής εξίσωσης. Γι' αυτό διαμορφώνουμε με τρόπο βολικό το φύλλο του Excel. Αξίζει λοιπόν να παρατηρήσουμε στον προηγούμενο πίνακα πως αν αντιγράψουμε τους τύπους των κελιών D3 και F3 και τους επικολλήσουμε στα κελιά I3 και J3, θα έχουμε τις τιμές των  $K_2(F_1)$  και  $K_2(F_2)$ . Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο λειτουργούμε όταν χρησιμοποιούμε τους τύπους της 3<sup>ης</sup> ή της 4<sup>ης</sup> τάξης.
- Στον πίνακα αυτό, όπως και στους προηγούμενους, τα ομοιοματικά δηλώνουν πως στα κελιά αυτά οι τιμές προκύπτουν με σύρσιμο των ακριβώς από πάνω κελιών.

### Παράδειγμα:

Να επιλυθεί με τη μέθοδο των Runge–Kutta 2<sup>ης</sup> τάξης, το επόμενο (μη ομογενές) σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$y_1' = 2y_1 - 5y_2 + 2\sin(x)$$

$$y_2' = 4y_1 - 6y_2$$

με μηδενικές αρχικές συνθήκες  $[y_1(0)=0$  και  $y_2(0)=0]$  και βήμα ολοκλήρωσης  $h=0.2$ , μέχρι το σημείο  $x=2$ .

### Λύση:

Ο προηγούμενος πίνακας, για τα δεδομένα του παραδείγματος, παίρνει τη μορφή:

x	$y_{1(R-K)}(x)$	$y_{2(R-K)}(x)$	$K_1(y_1)$	$K_1(y_2)$	x+h	$y_1(x)+hK_{1(y_1)}$	$y_2(x)+hK_{1(y_2)}$	$K_2(y_1)$	$K_2(y_2)$
0	0	0	0	0	0.2	0	0	0.3973	0
0.2	0.0397	0.0000	0.4768	0.1589	0.4	0.1351	0.0318	0.8901	0.3497
0.4	0.1764	0.0509	0.8774	0.4005	0.6	0.3519	0.1310	1.1783	0.6218
0.6	0.3820	0.1531	1.1278	0.6094	0.8	0.6075	0.2750	1.2749	0.7804
0.8	0.6223	0.2921	1.2189	0.7366	1	0.8660	0.4394	1.2180	0.8278
1	0.8660	0.4485	1.1723	0.7728	1.2	1.1004	0.6031	1.0496	0.7833
1.2	1.0881	0.6041	1.0198	0.7279	1.4	1.2921	0.7497	0.8066	0.6703
1.4	1.2708	0.7439	0.7928	0.6196	1.6	1.4294	0.8678	0.5186	0.5103
1.6	1.4019	0.8569	0.5184	0.4662	1.8	1.5056	0.9502	0.2081	0.3215
1.8	1.4746	0.9357	0.2184	0.2842	2	1.5183	0.9925	-0.1075	0.1179
2	1.4857	0.9759	-0.0896	0.0873	2.2	1.4678	0.9934	-0.4143	-0.0891

Παράδειγμα υπολογισμού:

$$y_1(x_1) = y_1(x_0 + h) = y_1(x_0) + h \frac{(K_{1(y_1)} + K_{2(y_1)})}{2} \Rightarrow$$

$$y_2(x_1) = y_2(x_0 + h) = y_2(x_0) + h \frac{(K_{1(y_2)} + K_{2(y_2)})}{2}$$

$$y_1(0.2) = y_1(0 + 0.2) = y_1(0) + 0.2 \frac{(K_{1(y_1)} + K_{2(y_1)})}{2}$$

$$y_2(0.2) = y_2(0 + 0.2) = y_2(0) + 0.2 \frac{(K_{1(y_2)} + K_{2(y_2)})}{2}$$

όπου

$$K_{1(y_1)} = 2y_1(0) - 5y_2(0) + 5\sin(0) = 2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0$$

$$K_{1(y_2)} = 4y_1(0) - 6y_2(0) = 4 \cdot 0 - 6 \cdot 0 = 0$$

$$y_1(0.2) = y_1(0) + hK_{1(y_1)} = 0 + 0.2 \cdot 0 = 0$$

$$y_2(0.2) = y_2(0) + hK_{1(y_2)} = 0 + 0.2 \cdot 0 = 0$$

$$K_{2(y_1)} = 2y_1(0.2) - 5y_2(0.2) + 2\sin(0.2) = 2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0.1987 = 0.3973$$

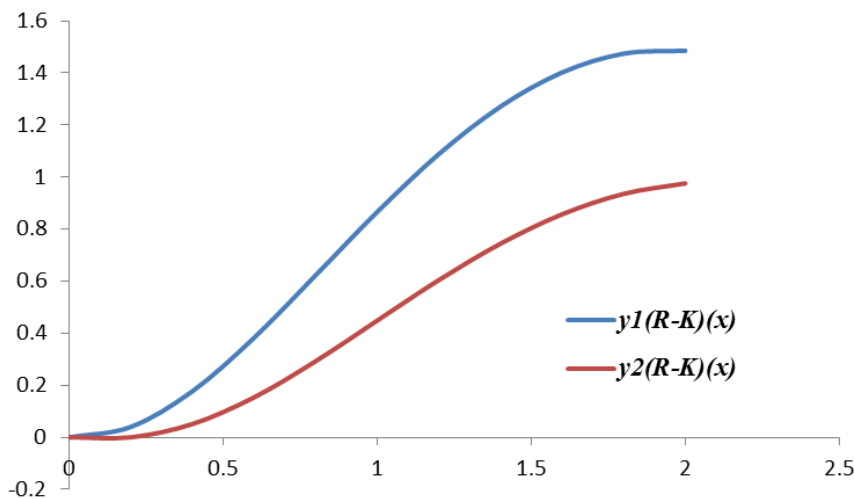
$$K_{2(y_2)} = 4y_1(0.2) - 6y_2(0.2) = 4 \cdot 0 - 6 \cdot 0 = 0$$

Εκτελώντας τις πράξεις καταλήγουμε

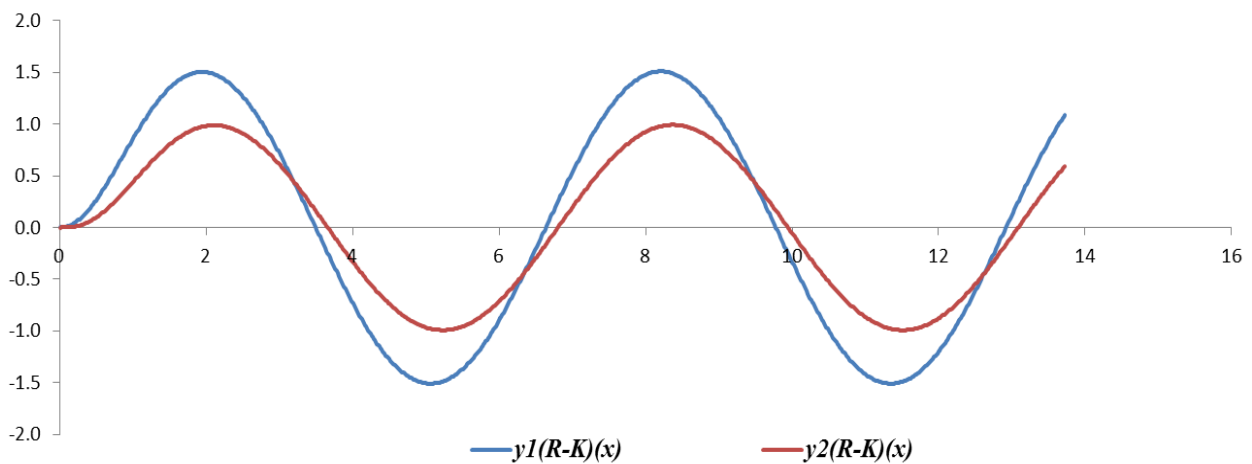
$$y_1(0.2) = y_1(0) + 0.2 \frac{0 + 0.3973}{2} = 0 + 0.03973 = 0.03973$$

$$y_2(0.2) = y_2(0) + 0.2 \frac{0 + 0}{2} = 0$$

**Γραφικές παραστάσεις:**



**Σχήμα 9.20** Η αριθμητική λύση του συστήματος, όπως ακριβώς προκύπτει από τον πίνακα τιμών, με βήμα ολοκλήρωσης  $h=0.2$ .



**Σχήμα 9.21** Η αριθμητική λύση του συστήματος, με βήμα ολοκλήρωσης  $h=0.02$ . Εντύπωση προκαλεί η ακρίβεια της προηγούμενης λύσης: Για παράδειγμα στην τιμή  $x=2$  έχουμε:  $y_1(h=0.02)=1.486$ ,  $y_1(h=0.2)=1.501$ . Αντίστοιχα έχουμε:  $y_2(h=0.2)=0.976$ ,  $y_1(h=0.02)=0.981$ .

### 9.3.5 Άσκηση επανάληψης

Δίνεται το επόμενο σύστημα τριών διαφορικών εξισώσεων με τρεις άγνωστες συναρτήσεις, τις  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  και  $y_3(t)$ :

$$\dot{y}_1(t) = y_1 - 2y_2 + \sin(t)$$

$$\dot{y}_2(t) = y_1 + y_3 + \sin(3t)$$

$$\dot{y}_3(t) = y_1 + y_2 + y_3$$

με μηδενικές αρχικές συνθήκες:

$$y_1(t) = 0$$

$$y_2(t) = 0$$

$$y_3(t) = 0$$

και ζητείται ο πίνακας τιμών της αριθμητικής λύσης με τις μεθόδους Taylor και Runge–Kutta, δεύτερης τάξης.

#### Υποσημείωση:

Να θυμίσουμε πως η πρώτη παράγωγος μιας συνάρτησης ως προς το χρόνο, εΐθισται να συμβολΐζεται με μΐα τελεία πάνω από το γράμμα της συνάρτησης, ενώ η δεΰτερη παράγωγος, με δύο.

#### Λύση:

##### 1) Μέθοδος του Taylor.

Η διαφορά του πίνακα αριθμητικής λύσης ενός συστήματος τριών διαφορικών εξισώσεων, σε σχέση με το σύστημα δύο εξισώσεων, με τη μέθοδο του Taylor, έγκειται στην πρόσθεση μιας επιπλέον στήλης στις συναρτήσεις και σε κάθε παράγωγο. Δηλαδή, ο πίνακας της επίλυσης με τη μέθοδο 2<sup>ης</sup> τάξης, θα έχει τις στήλες:

t	$y_1(t)$	$y_2(t)$	$y_3(t)$	$\dot{y}_1$	$\dot{y}_2$	$\dot{y}_3$	$\ddot{y}_1$	$\ddot{y}_2$	$\ddot{y}_3$
---	----------	----------	----------	-------------	-------------	-------------	--------------	--------------	--------------

ενώ η επόμενη τιμή της τυχαίας (j–οστής) συνάρτησης δίνεται από τον γνωστό (πλέον) τύπο:

$$y_j(t+h) = y_j(t) + h\dot{y}_j(t) + \frac{h^2}{2!}\ddot{y}_j(t)$$

Στη συνέχεια υπολογΐζουμε τη δεΰτερη παράγωγο των συναρτήσεων:

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= y_1 - 2y_2 + \sin(t) \\ \dot{y}_2(t) &= y_1 + y_3 + \sin(3t) \\ \dot{y}_3(t) &= y_1 + y_2 + y_3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \ddot{y}_1(t) &= \dot{y}_1 - 2\dot{y}_2 + \cos(t) \\ \ddot{y}_2(t) &= \dot{y}_1 + \dot{y}_3 + 3\cos(3t) \\ \ddot{y}_3(t) &= \dot{y}_1 + \dot{y}_2 + \dot{y}_3 \end{aligned} \Rightarrow$$

και συμπληρώνουμε τον πίνακα της λύσης:

$t$	$y_1(t)$	$y_2(t)$	$y_3(t)$	$\dot{y}_1$	$\dot{y}_2$	$\dot{y}_3$	$\ddot{y}_1$	$\ddot{y}_2$	$\ddot{y}_3$
0	0	0	0	0	0	0	1	3	0
0.1	0.005	0.015	0	0.0748	0.3155	0.02	0.4388	3.2564	0.4104
0.2	0.0147	0.0628	0.0041	0.0877	0.6422	0.0816	-0.2166	3.2058	0.8114
0.3	0.0224	0.1431	0.0163	0.0317	0.9488	0.1817	-0.9105	2.8453	1.1622
0.4	0.0210	0.2522	0.0402	-0.0940	1.2052	0.3134	-1.5833	2.1983	1.4247
0.5	0.0037	0.3837	0.0787	-0.2843	1.3849	0.4661	-2.1764	1.3128	1.5666
0.6	-0.0356	0.5287	0.1332	-0.5285	1.4669	0.6263	-2.6370	0.2569	1.5647
0.7	-0.1017	0.6767	0.2036	-0.8109	1.4383	0.7786	-2.9226	-0.8872	1.4060
0.8	-0.1974	0.8161	0.2885	-1.1122	1.2942	0.9072	-3.0039	-2.0302	1.0892
0.9	-0.3236	0.9354	0.3847	-1.4111	1.0391	0.9964	-2.8677	-3.0841	0.6245
1	-0.4791	1.0239	0.4874	-1.6853	0.6859	1.0322	-2.5169	-3.9694	0.0328
1.1	-0.6602	1.0726	0.5908	-1.9142	0.2547	1.0033	-1.9700	-4.6220	-0.6563
1.2	-0.8615	1.0750	0.6879	-2.0794	-0.2290	0.9014	-1.2590	-4.9987	-1.4070
1.3	-1.0757	1.0271	0.7710	-2.1663	-0.7364	0.7224	-0.4261	-5.0805	-2.1803
1.4	-1.2945	0.9280	0.8323	-2.1651	-1.2380	0.4659	0.4808	-4.8739	-2.9372
1.5	-1.5086	0.7799	0.8642	-2.0708	-1.7062	0.1355	1.4123	-4.4094	-3.6415
1.6	-1.7086	0.5872	0.8595	-1.8834	-2.1175	-0.2618	2.3224	-3.7385	-4.2628
1.7	-1.8853	0.3568	0.8120	-1.6072	-2.4544	-0.7165	3.1727	-2.9276	-4.7780
1.8	-2.0302	0.0967	0.7165	-1.2497	-2.7062	-1.2170	3.9356	-2.0519	-5.1729
1.9	-2.1355	-0.1842	0.5689	-0.8208	-2.8703	-1.7507	4.5966	-1.1870	-5.4418
2	-2.1945	-0.4772	0.3667	-0.3309	-2.9511	-2.3050	5.1552	-0.4015	-5.5871

## 2) Μέθοδος των Runge–Kutta.

Όπως στην περίπτωση της μεθόδου του Taylor, έτσι κι εδώ ο πίνακας της αριθμητικής λύσης ενός συστήματος τριών διαφορικών εξισώσεων, σε σχέση με το σύστημα δύο εξισώσεων, θα έχει μια επιπλέον

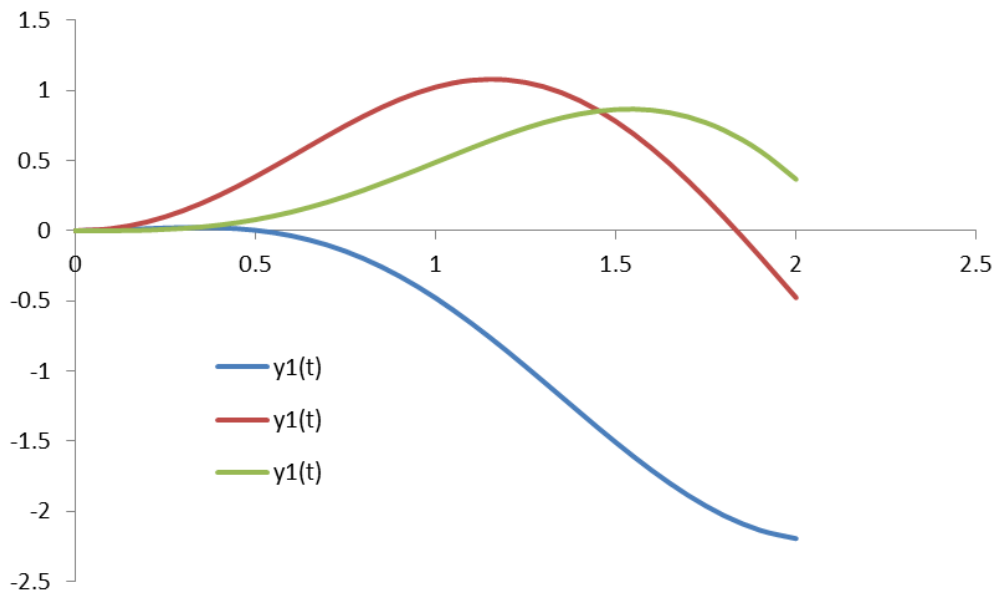
στήλη στις συναρτήσεις και σε κάθε ένα από τα  $K$ . Δηλαδή, ο πίνακας της επίλυσης με τη μέθοδο  $2^{\text{ης}}$  τάξης, θα έχει τις στήλες:

$t$	$y_1(t)$	$y_2(t)$	$y_3(t)$	$K_1 y_1(t)$	$K_1 y_2(t)$	$K_1 y_3(t)$	$t+h$	$y_1(t)$	$y_2(t)$	$y_3(t)$	$K_2 y_1(t)$	$K_2 y_2(t)$	$K_2 y_3(t)$
-----	----------	----------	----------	--------------	--------------	--------------	-------	----------	----------	----------	--------------	--------------	--------------

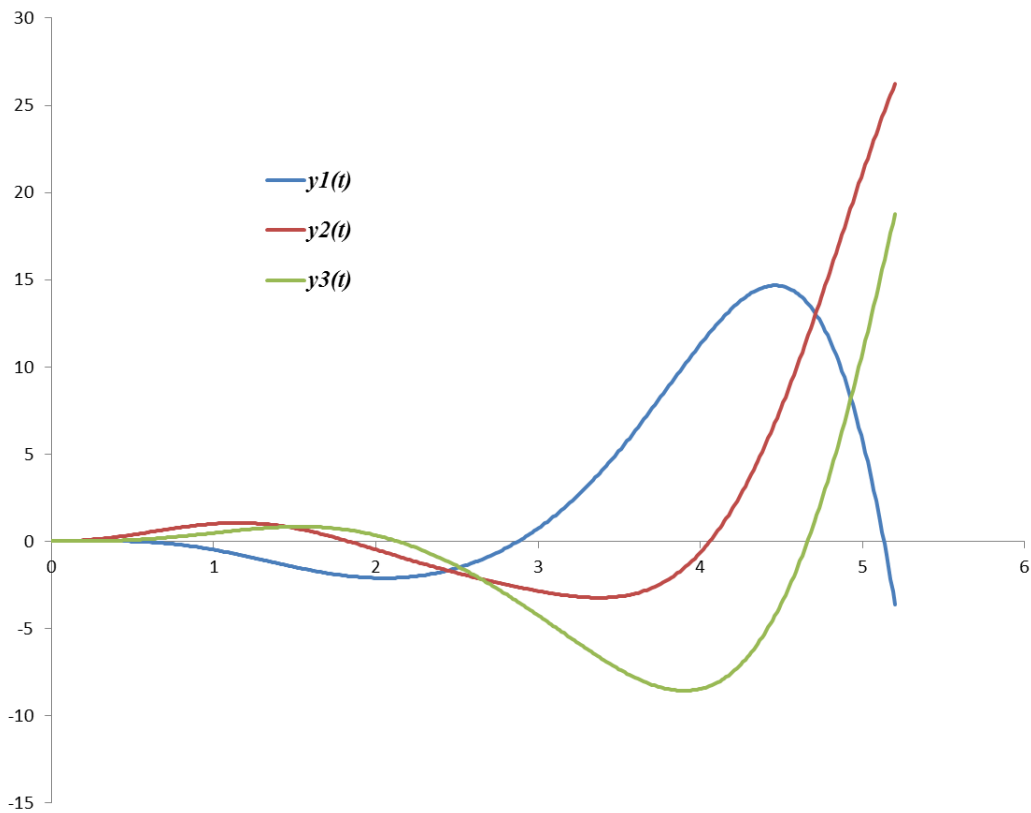
Συμπληρώνουμε λοιπόν τον πίνακα:

$t$	$y_1(t)$	$y_2(t)$	$y_3(t)$	$K_1 y_1(t)$	$K_1 y_2(t)$	$K_1 y_3(t)$	$t+h$	$y_1(t)$	$y_2(t)$	$y_3(t)$	$K_2 y_1(t)$	$K_2 y_2(t)$	$K_2 y_3(t)$
0	0	0	0	0	0	0	0.1	0	0	0	0.0998	0.29552	0
0.1	0.0050	0.0148	0	0.0753	0.3153	0.0198	0.2	0.0125	0.0463	0.0020	0.1186	0.6235	0.0608
0.2	0.0147	0.0617	0.0040	0.0899	0.6410	0.0804	0.3	0.0237	0.1258	0.0121	0.0676	0.9328	0.1616
0.3	0.0226	0.1404	0.0161	0.0373	0.9463	0.1791	0.4	0.0263	0.2350	0.0340	-0.0544	1.1934	0.2954
0.4	0.0217	0.2474	0.0399	-0.0837	1.2011	0.3089	0.5	0.0133	0.3675	0.0707	-0.2422	1.3783	0.4516
0.5	0.0054	0.3764	0.0779	-0.2679	1.3793	0.4596	0.6	-0.0214	0.5143	0.1238	-0.4853	1.4668	0.6168
0.6	-0.0323	0.5187	0.1317	-0.5049	1.4603	0.6181	0.7	-0.0827	0.6647	0.1935	-0.7679	1.4452	0.7755
0.7	-0.0959	0.6639	0.2014	-0.7795	1.4312	0.7694	0.8	-0.1738	0.8071	0.2783	-1.0706	1.3087	0.9115
0.8	-0.1884	0.8009	0.2854	-1.0729	1.2880	0.8980	0.9	-0.2957	0.9297	0.3752	-1.3718	1.0614	1.0093
0.9	-0.3106	0.9184	0.3808	-1.3641	1.0351	0.9885	1	-0.4471	1.0219	0.4796	-1.6494	0.7160	1.0545
1	-0.4613	1.0060	0.4829	-1.6318	0.6858	1.0276	1.1	-0.6245	1.0745	0.5857	-1.8824	0.2923	1.0357
1.1	-0.6370	1.0549	0.5861	-1.8555	0.2601	1.0039	1.2	-0.8226	1.0809	0.6865	-2.0523	-0.1842	0.9448
1.2	-0.8324	1.0587	0.6835	-2.0177	-0.2163	0.9098	1.3	-1.0342	1.0370	0.7745	-2.1447	-0.6849	0.7774
1.3	-1.0405	1.0136	0.7679	-2.1042	-0.7147	0.7410	1.4	-1.2509	0.9421	0.8420	-2.1497	-1.1804	0.5332
1.4	-1.2532	0.9188	0.8316	-2.1055	-1.2060	0.4972	1.5	-1.4638	0.7982	0.8813	-2.0628	-1.6431	0.2158
1.5	-1.4616	0.7764	0.8673	-2.0169	-1.6628	0.1820	1.6	-1.6633	0.6101	0.8855	-1.8840	-2.0494	-0.1678
1.6	-1.6567	0.5908	0.8680	-1.8387	-2.0621	-0.1979	1.7	-1.8405	0.3846	0.8482	-1.6180	-2.3818	-0.6078
1.7	-1.8295	0.3686	0.8277	-1.5750	-2.3867	-0.6332	1.8	-1.9870	0.1299	0.7644	-1.2730	-2.6299	-1.0928
1.8	-1.9719	0.1178	0.7414	-1.2336	-2.6269	-1.1128	1.9	-2.0953	-0.1449	0.6301	-0.8591	-2.7909	-1.6101
1.9	-2.0765	-0.1531	0.6052	-0.8240	-2.7804	-1.6244	2	-2.1589	-0.4312	0.4428	-0.3873	-2.8695	-2.1473
2	-2.1371	-0.4356	0.4166	-0.3566	-2.8522	-2.1561	2.1	-2.1728	-0.7208	0.2010	0.1321	-2.8768	-2.6926

### 3) Γραφικές παραστάσεις.



**Σχήμα 9.22** Η αριθμητική λύση του συστήματος, με βήμα ολοκλήρωσης  $h=0.1$ .



**Σχήμα 9.23** Η αριθμητική λύση του συστήματος, με βήμα ολοκλήρωσης  $h=0.015$ , μέχρι την τιμή  $t=5.3$ .





## 9.4 Εφαρμογές σε ζητήματα Δυναμικής

Τα Μαθηματικά αποτελούν ένα κορυφαίο εργαλείο, στην Επιστήμη του Μηχανικού. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε κάποια θέματα της Δυναμικής, τα οποία αντιμετωπίζονται με ιδιαίτερη ευκολία με τη βοήθεια της αριθμητικής ολοκλήρωσης των συστημάτων διαφορικών εξισώσεων.

### 9.4.1 Μια διαφορετική εφαρμογή της μεθόδου του Taylor

Έστω η διαφορική εξίσωση 2<sup>ης</sup> τάξης:

$$y'' = f(x, y, y') \quad (9.4.1)$$

με αρχικές συνθήκες  $y(x_0) = y_0$  και  $y'(x_0) = y_0'$ .

Μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο του Taylor 4<sup>ης</sup> τάξης, χωρίς να καταφύγουμε στην κατάστροφη ενός συστήματος δύο διαφορικών εξισώσεων, όπως εξηγήσαμε στην παράγραφο 9.3.1. Όμως, θα χρειαστεί να παραγωγίσουμε, δύο φορές, τη σχέση της διαφορικής εξίσωσης (πάντα πεπλεγμένα), έτσι ώστε να εφαρμόσουμε τον γνωστό τύπο:

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!} y''(x_0) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_0) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_0)$$

Όμως, στον πίνακα τιμών που θα δημιουργηθεί εμφανίζεται ένα σημαντικό πρόβλημα. Ας το δούμε:

$x$	$y$	$y'$	$y''$	$y'''$	$y^{(4)}$
$x_0$ (από α.σ.)	$y(x_0)$ (από α.σ.)	$y'(x_0)$ (από α.σ.)	$y''(x_0)$ (από δ.ε.)	$y'''(x_0)$ (από την παράγωγο της δ.ε.)	$y^{(4)}(x_0)$ (από την παράγωγο της δ.ε.)
$x_0 + h$	$y(x_0 + h)$ (από τον τύπο)	???			

όπου α.σ. σημαίνει αρχικές συνθήκες και δ.ε. διαφορική εξίσωση.

Παρατηρούμε πως στην 1<sup>η</sup> γραμμή την τιμή της πρώτης παραγώγου ( $y'(x_0)$ ) τη γνωρίζουμε από τις αρχικές συνθήκες. Όμως, στην επόμενη γραμμή υπολογισμού (εκεί που υπάρχει το ερωτηματικό) και σε όλες τις επόμενες, δεν έχουμε κάποιο εμφανή τρόπο υπολογισμού της τιμής  $y'(x_0)$ . Ξεπερνάμε το πρόβλημα αυτό εφαρμόζοντας και για τον υπολογισμό του  $y'(x_0)$  τον τύπο του Taylor, ως εξής:

Θεωρούμε ως βασική συνάρτηση την  $y'(x)$ , για την οποία εφαρμόζουμε τον τύπο του Taylor, με τον παρακάτω τρόπο:

$$y'(x_0 + h) = y'(x_0) + hy''(x_0) + \frac{h^2}{2!} y'''(x_0) + \frac{h^3}{3!} y^{(4)}(x_0)$$

και με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζεται η άγνωστη τιμή, με ένα όμως μειονέκτημα: Ενώ έχουμε αποφασίσει τη χρήση του τύπου του Taylor στην έκδοση της 4<sup>ης</sup> τάξης (άρα με ακρίβεια  $h^4$ ), ο υπολογισμός της τιμής  $y'(x_0)$  γίνεται με τον τύπο 3<sup>ης</sup> τάξης (άρα με ακρίβεια  $h^3$ ). Το πρόβλημα αυτό ξεπερνιέται με τη (αρχική) χρήση του τύπου 5<sup>ης</sup> τάξης, έτσι ώστε ο υπολογισμός της τιμής  $y'(x_0)$  να γίνεται με τον τύπο 4<sup>ης</sup> τάξης. Επομένως, ο προηγούμενος πίνακας παίρνει τη μορφή:

$x$	$y$	$y'$	$y''$	$y'''$	$y^{(4)}$	$y^{(5)}$
$x_0$ (από α.σ.)	$y(x_0)$ (από α.σ.)	$y'(x_0)$ (από α.σ.)	$y''(x_0)$ (από δ.ε.)	$y'''(x_0)$ (από την παράγωγο της δ.ε.)	$y^{(4)}(x_0)$ (από την παράγωγο της δ.ε.)	$y^{(5)}(x_0)$ (από την παράγωγο της δ.ε.)
$x_0+h$	$y(x_0+h)$ (από τον τύπο 5 <sup>ης</sup> τάξης)	$y'(x_0+h)$ (από τον τύπο 4 <sup>ης</sup> τάξης)	—»—	—»—	—»—	—»—
—»—	—»—	—»—	—»—	—»—	—»—	—»—

όπου τα ομοιωματικά δείχνουν επανάληψη του τύπου που υπάρχει στο πιο πάνω κελί (δηλαδή αναφέρονται στα κελιά που προκύπτουν με «σύρσιμο» στο Excel).

### Παράδειγμα:

Δίνεται η διαφορική εξίσωση  $\ddot{y} = f(t, y, \dot{y}) = -2\dot{y} - 13y + \sin(3t)$ , με μηδενικές αρχικές συνθήκες  $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ . Να υπολογισθεί ο πίνακας της αριθμητικής λύσης της, με βήμα 0.1, έως την τιμή  $t=1$  (για τον πίνακα υπολογισμού) και η γραφική παράσταση της λύσης μέχρι το σημείο  $t=4\pi$ .

### Λύση:

Αρχικά θα υπολογίσουμε όλες τις παραγώγους της  $y$ , έως την πέμπτη παράγωγο.

$$\ddot{y}(t) = -2\dot{y} - 13y + \sin(3t) \quad \Rightarrow$$

$$\ddot{y}(t) = -2\ddot{y} - 13\dot{y} + 3\cos(3t) \quad \Rightarrow$$

$$y^{(4)}(t) = -2\ddot{y} - 13\dot{y} - 9\sin(3t) \quad \Rightarrow$$

$$y^{(5)}(t) = -2y^{(4)} - 13\ddot{y} - 27\cos(3t)$$

και, στη συνέχεια δημιουργούμε τον πίνακα:

$t$	$y$	$\dot{y}$	$\ddot{y}$	$\ddot{y}$	$y^{(4)}$	$y^{(5)}$
0	0	0	0	3	-6	-54
0.1	0.000471	0.01378	0.26185	2.16323	-10.39023	-33.13557
0.2	0.003157	0.03996	0.44368	1.06917	-12.98792	-10.20740
0.3	0.009372	0.08433	0.49284	-0.21711	-13.02262	12.08424
0.4	0.020269	0.13361	0.40132	-1.45253	-10.70049	30.50016
0.5	0.035637	0.17374	0.18673	-2.41993	-6.56512	42.67938
0.6	0.053945	0.19242	-0.11227	-2.95850	-1.38816	47.37127
0.7	0.072625	0.18119	-0.44330	-2.98342	3.96082	44.49371
0.8	0.088528	0.13686	-0.74912	-2.49314	8.64564	35.02918

0.9	0.098468	0.06195	-0.97660	-1.56435	11.97813	20.79023
1	0.099780	-0.03571	-1.08460	-0.33654	13.50277	4.09925

Παραδείγματα υπολογισμού.

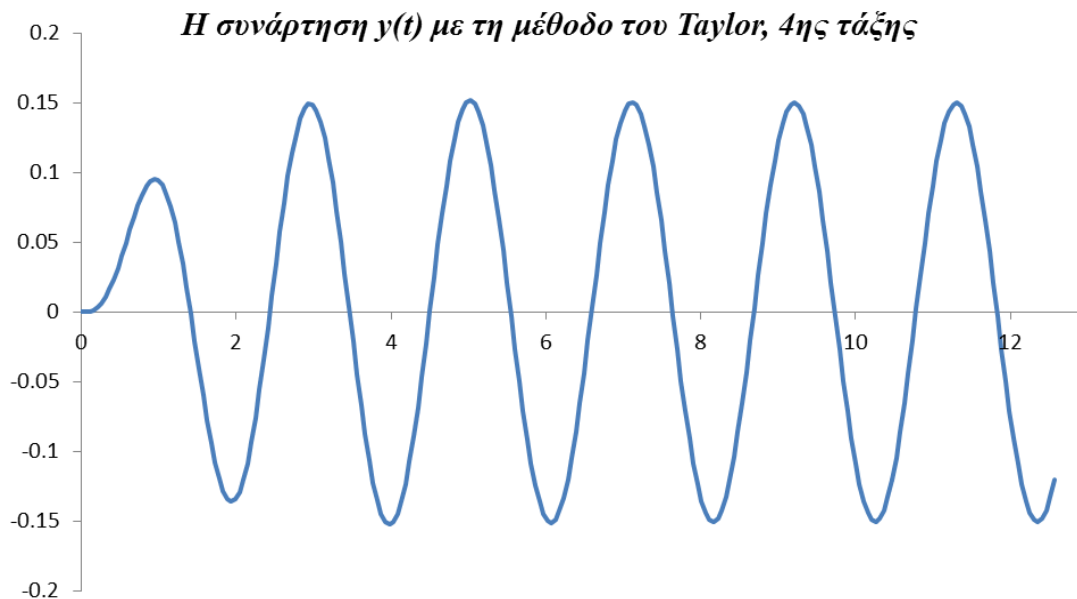
1<sup>ο</sup>) Για την τιμή  $y(0.1)$ :

$$\begin{aligned}
 y(t_0 + h) &= y(t_0) + h\dot{y}(t_0) + \frac{h^2}{2!} \ddot{y}(t_0) + \frac{h^3}{3!} \dddot{y}(t_0) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(t_0) + \frac{h^5}{5!} y^{(5)}(t_0) \Rightarrow \\
 y(0.1) &= y(0) + 0.1\dot{y}(0) + \frac{0.1^2}{2!} \ddot{y}(0) + \frac{0.1^3}{3!} \dddot{y}(0) + \frac{0.1^4}{4!} y^{(4)}(0) + \frac{0.1^5}{5!} y^{(5)}(0) = \\
 &= 0 + 0.1 \times 0 + \frac{0.01}{2} \times 0 + \frac{0.001}{6} \times 3 + \frac{0.0001}{24} \times (-6) + \frac{0.00001}{120} \times (-54) = \\
 &= 0.000471
 \end{aligned}$$

2<sup>ο</sup>) Για την τιμή  $\dot{y}(0.1)$ :

$$\begin{aligned}
 \dot{y}(t_0 + h) &= \dot{y}(t_0) + h\ddot{y}(t_0) + \frac{h^2}{2!} \dddot{y}(t_0) + \frac{h^3}{3!} y^{(4)}(t_0) + \frac{h^4}{4!} y^{(5)}(t_0) \Rightarrow \\
 \dot{y}(0.1) &= \dot{y}(0) + 0.1\ddot{y}(0) + \frac{0.1^2}{2!} \dddot{y}(0) + \frac{0.1^3}{3!} y^{(4)}(0) + \frac{0.1^4}{4!} y^{(5)}(0) = \\
 &= 0 + 0.1 \times 0 + \frac{0.01}{2} \times 3 + \frac{0.001}{6} \times (-6) + \frac{0.0001}{24} \times (-54) = \\
 &= 0.003157
 \end{aligned}$$

Γραφική παράσταση.



**Σχήμα 9.24** Η αριθμητική λύση του συστήματος, με βήμα ολοκλήρωσης  $h=0.05$ , μέχρι την τιμή  $t=4\pi$ .



## 9.4.2 Ο μονοβάθμιος ταλαντωτής

### α) Γενικές γνώσεις

Έστω ένα υλικό σημείο που κινείται πάνω σε μία ευθεία. Για να ορισθεί η θέση του, χρειαζόμαστε τον ορισμό ενός συστήματος συντεταγμένων. Πρέπει, δηλαδή, να ορίσουμε ένα κέντρο, τη θετική φορά και τη μονάδα του μήκους. Επειδή η θέση του σημείου αυτού ορίζεται με μία παράμετρο – συντεταγμένη, μιλάμε για ένα μηχανικό σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας (β.ε.).

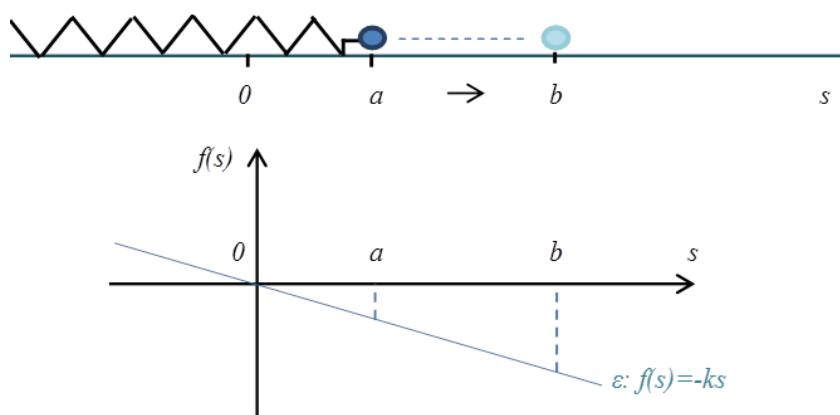
Μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα κίνηση που μπορούμε να μελετήσουμε στα συστήματα ενός βαθμού ελευθερίας (β.ε.) είναι η αρμονική ταλάντωση. Πρόκειται για την κίνηση ενός υλικού σημείου που κινείται όταν του ασκείται μια δύναμη, η οποία είναι ανάλογη της απομάκρυνσής του από ένα σημείο του άξονα κίνησης. Το εν λόγω σημείο τοποθετείται, συνήθως, στο κέντρο του άξονα και ονομάζεται σημείο ισορροπίας. Άρα εάν  $s$  είναι η συντεταγμένη ενός σημείου της ευθείας, η δύναμη που ασκείται από το κέντρο μπορεί να ισούται με:

- $F(t) = -ks(t)$ , όπου το αρνητικό πρόσημο στη δύναμη οφείλεται στο ότι η δύναμη, το διάνυσμά της, έχει φορά ακριβώς αντίθετη από τη μετακίνηση, οπότε μιλούμε για ελκτικό κέντρο.
- $F(t) = ks(t)$ , όπου η δύναμη έχει την ίδια φορά με τη μετακίνηση, οπότε μιλούμε για απωστικό κέντρο (οπότε βέβαια δεν εκτελείται ταλάντωση, αλλά διαρκώς επιταχυνόμενη απομάκρυνση, δηλαδή απομακρύνεται εκθετικά).

### Πρόβλημα 1<sup>ο</sup>:

Μία σημειακή μάζα  $m$  ολισθαίνει πάνω σε έναν οριζόντιο άξονα, χωρίς τριβή, ενώ είναι πακτωμένη σε ένα ελατήριο  $\epsilon$ . Το σύστημα έχει το σημείο  $O$ , ως σημείο ισορροπίας, ενώ η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου είναι ανάλογη της απομάκρυνσης ( $s$ ) της μάζας  $m$ , από το σημείο ισορροπίας.

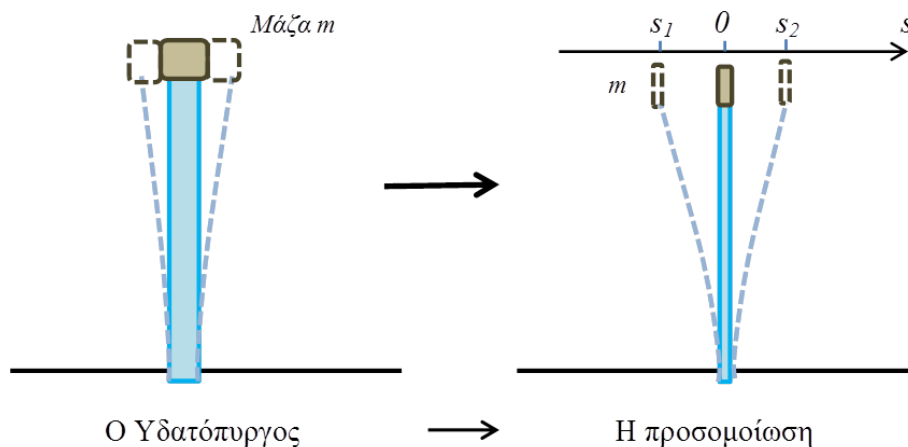
Στην επόμενη εικόνα παρατηρούμε τη μετακίνηση μιας μάζας που μετακινείται από το σημείο  $a$  στο  $b$ , καθώς και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης που εκφράζει τη δύναμη που εξασκεί το ελατήριο στη μάζα, ως συνάρτηση της απομάκρυνσης  $s$  από το σημείο ισορροπίας ( $s=0$ ).



**Σχήμα 9.25** Ένα ελατήριο με μία μάζα πακτωμένη στο ένα άκρο του, η οποία μετακινείται από το σημείο  $a$  στο  $b$ . Από κάτω φαίνεται η γραφική παράσταση της δύναμης  $F$  που ασκείται από το ελατήριο στη μάζα.

## Πρόβλημα 2°:

Έστω μία μεταλλική λάμα, κατακόρυφα τοποθετημένη, πακτωμένη στο κάτω της άκρο, ενώ στο άνω άκρο της βρίσκεται, πακτωμένη επίσης, μία σημειακή μάζα  $m$ . Θεωρούμε πως η λάμα είναι ελαστική με βάρος αμελητέο, σε σχέση με τη μάζα  $m$  του άνω άκρου, ενώ το μήκος της είναι πολύ μεγαλύτερο της κίνησης που κάνει η μάζα  $m$ , με το άνω άκρο, πράγμα που μας επιτρέπει να θεωρήσουμε την κίνηση της μάζας «ευθύγραμμη».



**Σχήμα 9.26** Σχηματικά, η προσομοίωση του υδατόπυργου με το σύστημα λάμας–μάζας.

Το πρόβλημα της λάμας θα μπορούσε να αποτελέσει την προσομοίωση ενός υδατόπυργου (υδραγωγείου), του οποίου η μάζα είναι αμελητέα, σε σχέση με τη μάζα του νερού που βρίσκεται στην κορυφή του, ενώ το ύψος του είναι τέτοιο που η μετακίνηση της κορυφής είναι, πρακτικά, ευθύγραμμη.

## β) Υπενθυμίσεις από την Τριγωνομετρία

Μία συνάρτηση  $f(t)$  ονομάζεται περιοδική, όταν ισχύει η σχέση:

$$f(t+T) = f(t) \text{ για κάθε } t$$

όπου η ποσότητα  $T$  (εφ' όσον είναι η μικρότερη για την οποία ισχύει η πιο πάνω σχέση) ονομάζεται περίοδος της συνάρτησης  $f$ . Οι πιο γνωστές περιοδικές συναρτήσεις είναι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

$$y = \sin(t) \quad \text{με περίοδο } T = 2\pi$$

$$y = \cos(t) \quad \text{με περίοδο } T = 2\pi$$

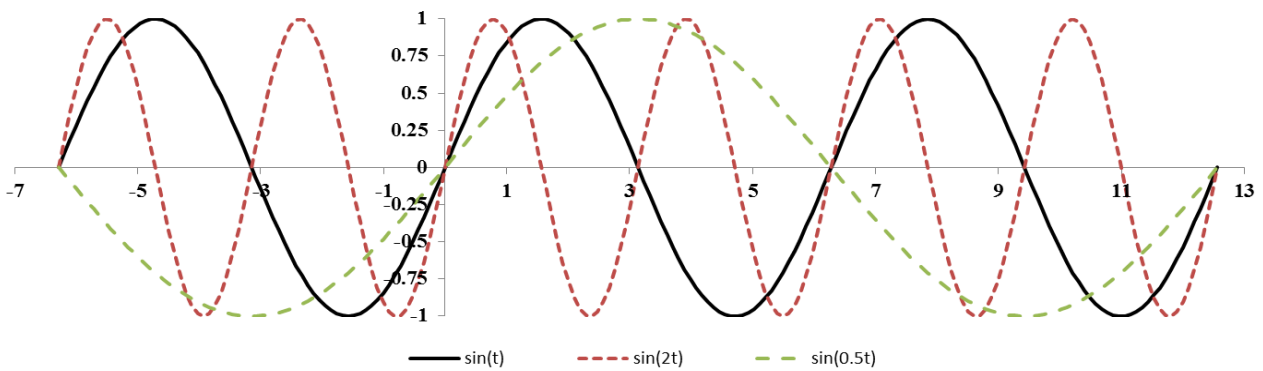
$$y = \tan(t) \quad \text{με περίοδο } T = \pi$$

Όμοια, η συνάρτηση  $y = \sin(\omega t)$  έχει περιοδικότητα ίση με  $2\pi$ . Επομένως η περιοδικότητα αυτή αφορά στην ποσότητα  $\omega t$ . Άρα η περίοδος της συνάρτησης αυτής (φυσικά ως προς το  $t$ ) είναι ίση με:

$$T = 2\pi/\omega$$

ενώ η ποσότητα  $\omega$  ονομάζεται **κυκλική συχνότητα** της συνάρτησης και ισούται με το πλήθος των κύκλων που διαγράφει η  $\sin(\omega t)$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ , κάτι που γίνεται φανερό κι από το παρακάτω γράφημα.

Η συνάρτηση  $y=\sin(\omega t)$  για τις τιμές του  $\omega=1, 2$  και  $1/2$



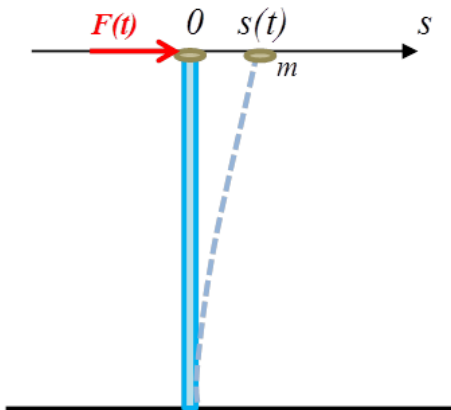
**Σχήμα 9.27** Η γεωμετρική-φυσική σημασία της κυκλικής συχνότητας των τριγωνομετρικών συναρτήσεων (εδώ για τη συνάρτηση  $y=\sin(\omega t)$ ).

### γ) Η εξαναγκασμένη ταλάντωση

Επιστρέφουμε στο σύστημα Λάμας – Μάζας, που προσομοιάζει σε ένα υδραγωγείο. Θεωρούμε πως στη μάζα  $m$  επιδρά ένα σύνολο εσωτερικών δυνάμεων της λάμας (στις οποίες θα αναφερθούμε αμέσως μετά), και μία εξωτερική δύναμη που εξαρτάται από το χρόνο, η  $F(t)$ .

Η μάζα  $m$  κινείται πάνω στην ευθεία  $s$ , και η κίνησή της περιγράφεται (συναρτήσει του χρόνου  $t$ ) από τη συνάρτηση θέσης:

Συνάρτηση θέσης:  $s=s(t)$



Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης θέσης είναι η συνάρτηση που περιγράφει την ταχύτητα της κίνησης, ενώ η δεύτερη παράγωγος είναι η συνάρτηση που περιγράφει την επιτάχυνση της κίνησης:

$$s = s(t) \quad \Rightarrow$$

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t) \quad \Rightarrow$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2s(t)}{dt^2} = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$$

Ως γνωστόν, ο τρίτος νόμος του Newton συνδέει τη δύναμη που δέχεται μία μάζα, με την επιτάχυνση που υφίσταται η μάζα, λόγω αυτής της δύναμης. Στην περίπτωση της μάζας που βρίσκεται στο άνω μέρος της λάμας, ο νόμος του Newton παίρνει τη μορφή:

$$m\ddot{s}(t) = F_{\text{συνολ.}}$$

όπου ως συνολική δύναμη αναφέρουμε τη συνισταμένη όλων των δυνάμεων που επιδρούν στη μάζα  $m$ .

Οι δυνάμεις που επιδρούν στη μάζα  $m$ , στο πρόβλημα του συστήματος Λάμας – Μάζας είναι οι:

1. **Η δύναμη ελαστικής επαναφοράς** (οι Μηχανικοί την αναφέρουν ως δύναμη δυσκαμψίας), η οποία είναι ανάλογη της απομάκρυνσης  $s$  από το ελκτικό κέντρο  $0$ . Η μαθηματική της έκφραση είναι:

$$F_{\text{ελαστ.επ.}}(t) = -ks(t)$$

όπου η σταθερή  $k$  (σταθερά του ελατηρίου) λέγεται και **σταθερά του Hook**, ενώ, όπως είπαμε ήδη, το αρνητικό πρόσημο δείχνει πως η δύναμη έχει πάντα το αντίθετο πρόσημο (την αντίθετη φορά) από την απομάκρυνση.

2. **Η δύναμη απόσβεσης**. Ονομάζουμε απόσβεση (ή ιξώδη απόσβεση), την ιδιότητα που έχουν τα υλικά σώματα να αντιδρούν σε οποιαδήποτε αλλαγή της μορφής τους. Η δύναμη της αντίδρασης αυτής είναι ανάλογη της ταχύτητας με την οποία μεταβάλλεται το σχήμα του σώματος. Άρα, η δύναμη της απόσβεσης είναι συνάρτηση της ταχύτητας με την οποία αλλάζει μορφή η λάμα, πράγμα που ισοδυναμεί με την ταχύτητα με την οποία μετακινείται η μάζα  $m$ . Η αναλυτική έκφραση της δύναμης απόσβεσης είναι:

$$F_{\text{απόσβ.}} = -cv(t)$$

όπου η σταθερή αναλογίας  $c$  ονομάζεται **συντελεστής απόσβεσης**, ενώ το πρόσημο μείον δείχνει πως η δύναμη της αντίδρασης έχει αντίθετη φορά με την ταχύτητα  $v(t)$ .

3. Τέλος, θεωρούμε πως στη μάζα  $m$  επιδρά μία εξωτερική δύναμη  $F_{\text{εξωτ.}}(t)$ , η οποία μπορεί να είναι οποιασδήποτε μορφής. Όμως η μορφή που έχει το μεγαλύτερο ενδιαφέρον είναι αυτή μιας περιοδικής συνάρτησης, μια και με τον τρόπο αυτό προσομοιάζεται συχνά η επίδραση ενός σεισμού, σε μια κατασκευή που θα μπορούσε να αντιστοιχηθεί με το σύστημα λάμας – μάζας. Στη συνέχεια θα επιλέξουμε συχνά τη μορφή:

$$F_{\text{εξωτ.}}(t) = D\sin(\omega t)$$

όπου το  $D$  είναι μία πραγματική σταθερή, που σηματοδοτεί το πλάτος της ημιτονοειδούς κίνησης, ενώ το  $\omega$ , όπως ήδη είδαμε, είναι η κυκλική συχνότητα της εξωτερικής δύναμης.

Καταλήγουμε λοιπόν στη διαφορική εξίσωση της κίνησης της μάζας  $m$ , στο σύστημα λάμας–μάζας:

$$\begin{aligned} ma(t) &= F_{\text{συνολ.}}(t) \quad \Rightarrow \\ m\ddot{s}(t) &= F_{\text{ελαστ.επ.}} + F_{\text{αποσβ.}} + F_{\text{εξωτ.}} \quad \Rightarrow \\ m\ddot{s}(t) &= -ks(t) - c\dot{s}(t) + F_{\text{εξωτ.}} \quad \Rightarrow \\ \ddot{s}(t) &= -\frac{k}{m}s(t) - \frac{c}{m}\dot{s}(t) + \frac{1}{m}F_{\text{εξωτ.}} \end{aligned} \quad (9.4.2)$$

### Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>:

Στο σύστημα λάμας – μάζας δίνονται οι τιμές των σταθερών:  $m=4$ ,  $k=101$  και  $c=4$ . Στη μάζα  $m$  επιδρά η δύναμη  $F_{\text{εξωτ.}}(t)=4\sin(3t)$ , ενώ ισχύουν μηδενικές αρχικές συνθήκες. Ζητούνται:

1. να γίνει ο πίνακας τιμών της απόκρισης του συστήματος, με βήμα ολοκλήρωσης  $h=0.1$ .
2. να γίνει μελετηθεί η επίδραση την οποία έχει στην απόκριση του συστήματος, η αλλαγή στην τιμή της κυκλικής συχνότητας  $\omega$  (της  $F_{\text{εξωτ.}}(t)$ ) και
3. να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις.

### Λύση:

Αρχικά να τονισθεί πως η έκφραση «απόκριση του συστήματος μάζας-λάμας» αναφέρεται, ουσιαστικά, στη συνάρτηση θέσης της μάζας  $m$ , δηλαδή, στον τρόπο που κινείται η μάζα  $m$ . Θα επιλέξουμε, για το παράδειγμα αυτό, να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του Taylor 4<sup>ης</sup> τάξης, όπως αυτή περιγράφηκε στο παράδειγμα της παραγράφου 9.4.1.

Αρχικά πρέπει να καταστρωθεί η διαφορική εξίσωση της κίνησης:

$$\ddot{s}(t) = -\frac{k}{m}s(t) - \frac{c}{m}\dot{s}(t) + \frac{1}{m}F_{\text{εξωτ.}} \Rightarrow$$

$$\ddot{s}(t) = -\frac{101}{4}s(t) - \frac{4}{4}\dot{s}(t) + \frac{1}{4}4\sin(3t) \Rightarrow$$

$$\ddot{s}(t) = -25.25s(t) - \dot{s}(t) + \sin(3t)$$

Στην προσπάθεια να δημιουργήσουμε ένα φύλλο εργασίας στο Excel θα θέσουμε ως παράμετρο την κυκλική συχνότητα  $\omega$ , έτσι ώστε να μπορούμε να τη μεταβάλλουμε. Γράφουμε, λοιπόν, τις παραγωγούς:

$$\ddot{s}(t) = -\frac{k}{m}s(t) - \frac{c}{m}\dot{s}(t) + \frac{1}{m}\sin(\omega t) \Rightarrow$$

$$\ddot{\ddot{s}}(t) = -\frac{k}{m}\dot{s}(t) - \frac{c}{m}\ddot{s}(t) + \frac{\omega}{m}\cos(\omega t) \Rightarrow$$

$$s^{(4)}(t) = -\frac{k}{m}\ddot{s}(t) - \frac{c}{m}\ddot{\ddot{s}}(t) - \frac{\omega^2}{m}\sin(\omega t) \Rightarrow$$

$$s^{(5)}(t) = -\frac{k}{m}\ddot{\ddot{s}}(t) - \frac{c}{m}s^{(4)}(t) - \frac{\omega^3}{m}\cos(\omega t)$$

και υπολογίζουμε τον πίνακα της αριθμητικής λύσης:

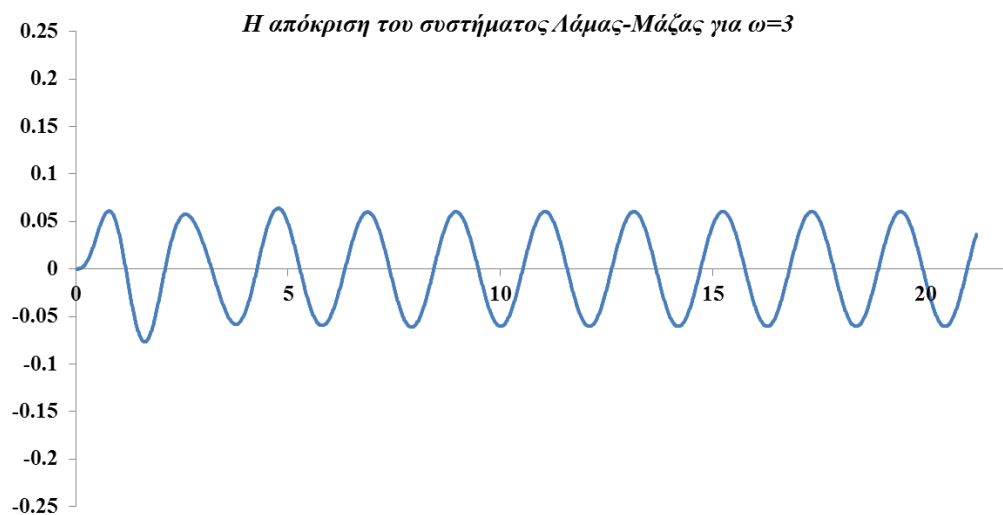
$t$	$s(t)$	$\dot{s}(t)$	$\ddot{s}(t)$	$\ddot{\ddot{s}}(t)$	$s^{(4)}(t)$	$s^{(5)}(t)$
0	0	0	0	5	-5	-246.25
0.1	0.00079	0.02314	0.4363	3.3673	-26.3692	-168.354
0.2	0.00572	0.07851	0.6184	0.1007	-36.7524	-33.329
0.3	0.01653	0.13459	0.4456	-3.4903	-32.6974	111.985
0.4	0.03151	0.15671	-0.0430	-5.9947	-15.6529	219.038
0.5	0.04592	0.12075	-0.6817	-6.3729	8.6235	252.434
0.6	0.05358	0.02320	-1.2349	-4.3009	31.9548	200.392
0.7	0.04916	-0.11563	-1.4764	-0.2862	46.3337	77.949
0.8	0.03036	-0.25665	-1.2668	4.4791	46.4282	-77.820
0.9	-0.00070	-0.35353	-0.6063	8.4788	31.2675	-219.008
1	-0.03756	-0.36746	0.3570	10.3397	4.6201	-301.155

Να παρατηρήσουμε πως οι στήλες  $[t, s(t)]$  εκφράζουν τη συνάρτηση θέσης, ενώ οι στήλες  $[t, \dot{s}(t)]$  εκφράζουν τη συνάρτηση ταχύτητας.

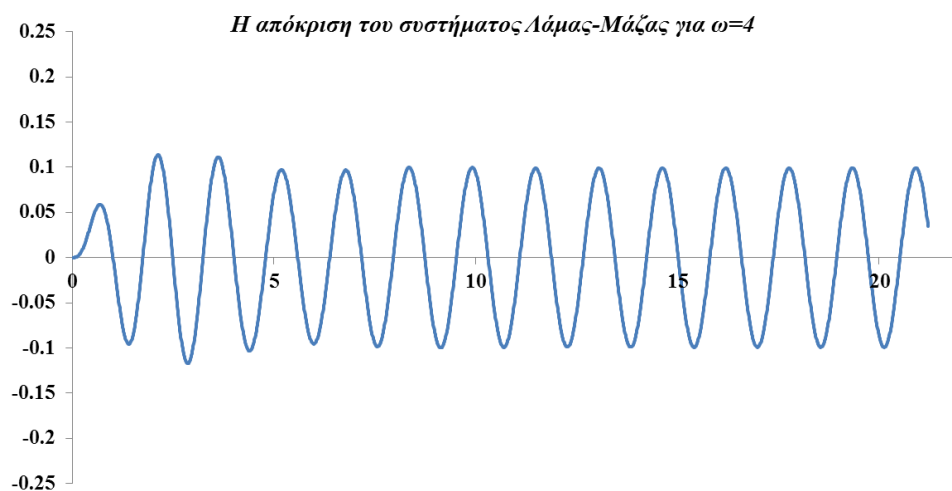


### Γραφικές παραστάσεις:

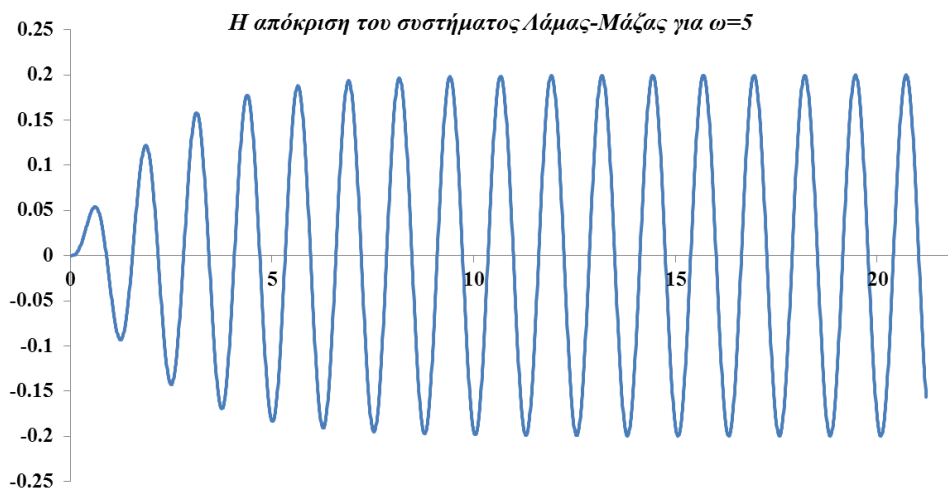
Στις επόμενες γραφικές παραστάσεις μεταβάλλεται η τιμή της κυκλικής συχνότητας της εξωτερικής δύναμης, έτσι ώστε να προσπαθήσουμε να αντιληφθούμε την επίδραση της τιμής του  $\omega$  στην απόκριση του συστήματος. Για να έχουμε άμεση συγκρισιμότητα, κρατάμε την κλίμακα των δύο αξόνων σταθερή.



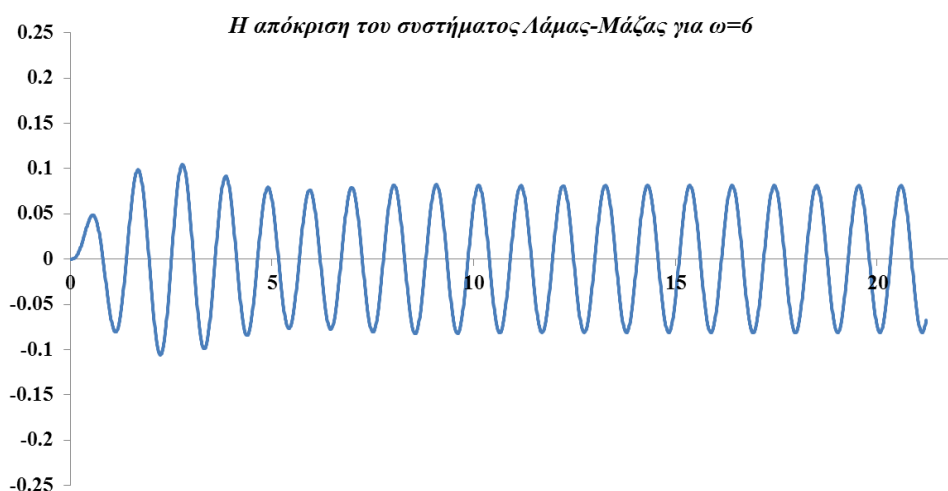
**Σχήμα 9.28** Η απόκριση του συστήματος Λάμας – Μάζας σε ημιτονοειδή εξωτερική δύναμη με κυκλική συχνότητα  $\omega = 3$ .



**Σχήμα 9.29** Η απόκριση του συστήματος Λάμας – Μάζας σε ημιτονοειδή εξωτερική δύναμη με κυκλική συχνότητα  $\omega = 4$ .



**Σχήμα 9.30** Η απόκριση του συστήματος Λάμας – Μάζας σε ημιτονοειδή εξωτερική δύναμη με κυκλική συχνότητα  $\omega = 5$ .



**Σχήμα 9.31** Η απόκριση του συστήματος Λάμας – Μάζας σε ημιτονοειδή εξωτερική δύναμη με κυκλική συχνότητα  $\omega = 6$ .

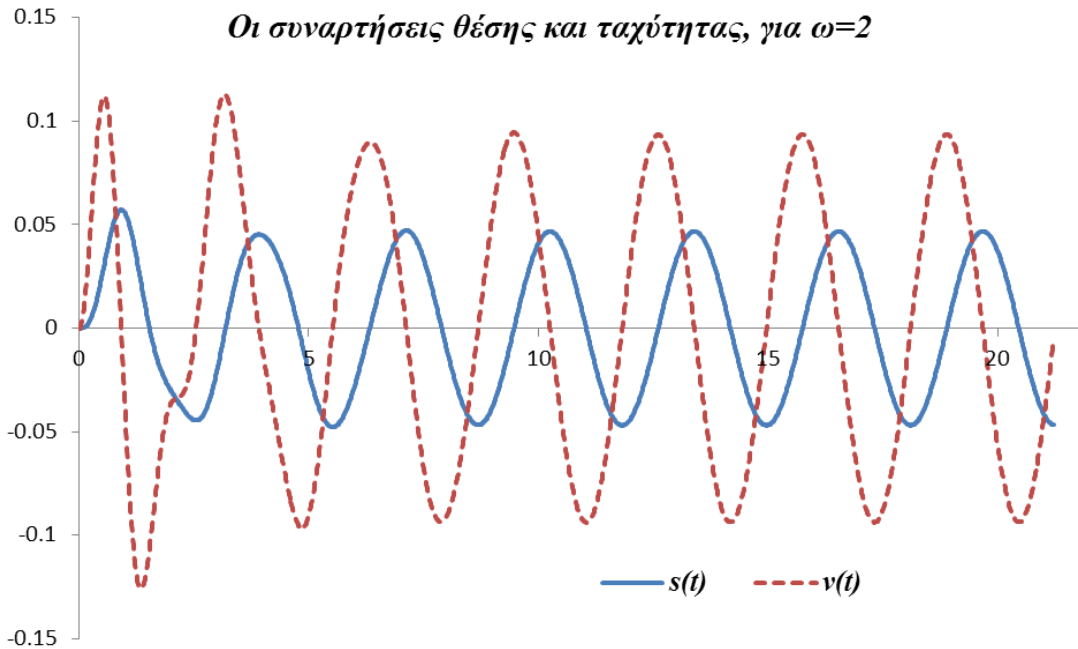
### Παρατηρήσεις:

1. Σε όλες τις περιπτώσεις οι γραφικές παραστάσεις παρουσιάζουν μια ακανόνιστη κίνηση, σύντομα όμως οι καμπύλες ομαλοποιούνται. Αυτό το φαινόμενο ερμηνεύεται με τη βοήθεια της αναλυτικής λύσης της διαφορικής εξίσωσης, η οποία περιέχει δύο ανεξάρτητα τμήματα. Το 1<sup>ο</sup> περιέχει τον όρο  $e^{-at}$  ( $a>0$ ), λόγω του οποίου τείνει στο μηδέν, καθώς αυξάνεται το  $t$  και λέγεται **μεταβατικός όρος**. Αντίθετα, ο 2<sup>ος</sup> όρος δεν μηδενίζεται (όσο χρονικό διάστημα υπάρχει η εξωτερική δύναμη) και γι' αυτό λέγεται **παραμένον**.
2. Από τα γραφήματα καταλαβαίνουμε πως η επίδραση της μεταβατικής κίνησης σταματάει μετά το σημείο  $t=3$ . Στη συνέχεια λειτουργεί μόνο η παραμένουσα κίνηση.
3. Όσο μεγαλύτερη γίνεται η κυκλική συχνότητα της εξωτερικής δύναμης, τόσο μεγαλύτερη είναι και η κυκλική συχνότητα της κίνησης μετά το σημείο  $t=3$ . Στην αναλυτική λύση λέγαμε πως η παραμένουσα κίνηση έχει την ίδια κυκλική συχνότητα με την εξωτερική δύναμη.
4. Το πλάτος της ταλάντωσης της παραμένουσας κίνησης παίρνει τη μέγιστη τιμή του για την τιμή  $\omega=5$ . Σε πρώτη προσέγγιση θα μπορούσαμε να πούμε πως **όσο η κυκλική συχνότητα της εξωτερικής δύναμης πλησιάζει στην τιμή**

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

που καλείται ιδιοσυχνότητα του συστήματος Λάμας – Μάζας (όπως αντίστοιχα του συστήματος Ελατηρίου – Μάζας), τόσο το πλάτος της παραμένουσας αυξάνεται. Πρόκειται για το γνωστό φαινόμενο του συντονισμού.

5. Πολλές φορές τοποθετούμε στην ίδια γραφική παράσταση τις συναρτήσεις θέσης και ταχύτητας, οπότε παίρνουμε το επόμενο γράφημα (για  $\omega=2$ ):



**Σχήμα 9.32** Η πλήρης απόκριση του συστήματος Λάμας–Μάζας περιλαμβάνει τις συναρτήσεις θέσης και ταχύτητας. Να παρατηρήσουμε πως τα μέγιστα της ταχύτητας παρουσιάζονται στα σημεία όπου μηδενίζεται η θέση, ενώ η ταχύτητα μηδενίζεται εκεί που η θέση έχει τη μέγιστη απομάκρυνση (φυσιολογικό, αν σκεφτούμε το παράδειγμα μιας αιώρας – κούνιας–).



### Παράδειγμα 2°:

Στο σύστημα λάμας – μάζας δίνονται οι τιμές των σταθερών:

$m=1$ ,  $k=25$  και  $c=0$  (δεν υπάρχει απόσβεση).

Στην μάζα  $m$  επιδρά η δύναμη  $F_{\text{εξωτ.}}(t)=\sin(\omega t)$ , ενώ ισχύουν μηδενικές αρχικές συνθήκες. Ζητούνται:

- να γίνει ο πίνακας τιμών της απόκρισης του συστήματος, για την τιμή  $\omega=2$ , με βήμα ολοκλήρωσης  $h=0.1$ .
- να γίνει μελετηθεί η επίδραση την οποία έχει στην απόκριση του συστήματος η αλλαγή στην τιμή της κυκλικής συχνότητα  $\omega$  (της  $F_{\text{εξωτ.}}(t)$ ) και
- να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις.

### Λύση:

Αρχικά πρέπει να καταστρωθεί η διαφορική εξίσωση της κίνησης:

$$\ddot{s}(t) = -\frac{k}{m}s(t) - \frac{c}{m}\dot{s}(t) + \frac{1}{m}F_{\text{εξωτ.}} \Rightarrow$$
$$\ddot{s}(t) = -25s(t) + \sin(2t)$$

Στην προσπάθεια να δημιουργήσουμε ένα φύλλο εργασίας στο Excel θα θέσουμε ως παράμετρο την κυκλική συχνότητα  $\omega$ , έτσι ώστε να μπορούμε να τη μεταβάλλουμε. Γράφουμε, λοιπόν, τις παραγώγους:

$$\ddot{s}(t) = -25s(t) + \sin(2t) \Rightarrow$$

$$\ddot{\dot{s}}(t) = -25\dot{s}(t) + 2\cos(2t) \Rightarrow$$

$$s^{(4)}(t) = -25\ddot{s}(t) - 4\sin(2t) \Rightarrow$$

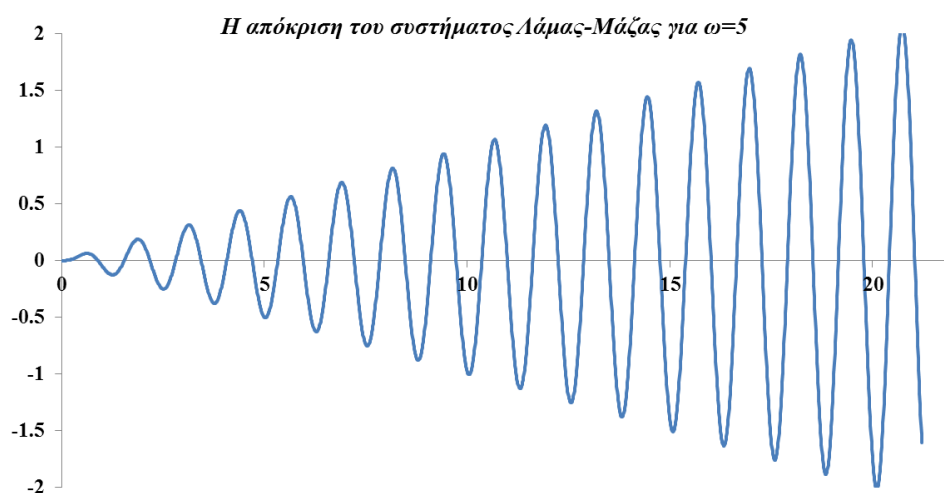
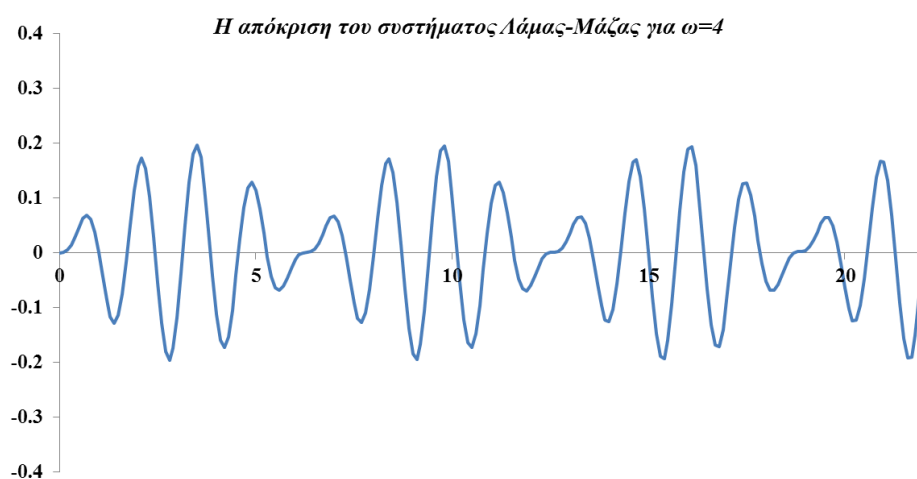
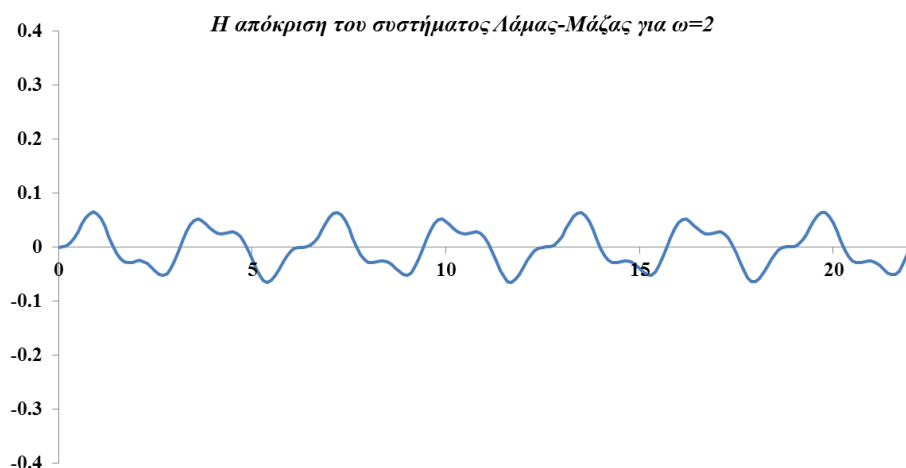
$$s^{(5)}(t) = -25\ddot{\dot{s}}(t) - 8\cos(2t)$$

και υπολογίζουμε τον πίνακα της αριθμητικής λύσης:

$t$	$s(t)$	$\dot{s}(t)$	$\ddot{s}(t)$	$\ddot{\dot{s}}(t)$	$s^{(4)}(t)$	$s^{(5)}(t)$
0	0	0	0	2	0	-58
0.1	0.00033	0.00976	0.1905	1.7162	-5.5561	-50.745
0.2	0.00252	0.03625	0.3265	0.9359	-9.7211	-30.767
0.3	0.00789	0.07183	0.3675	-0.1451	-11.4461	-2.974
0.4	0.01683	0.10594	0.2965	-1.2550	-10.2819	25.802
0.5	0.02866	0.12771	0.1250	-2.1120	-6.4898	48.479
0.6	0.04168	0.12876	-0.1100	-2.4943	-0.9786	59.459
0.7	0.05359	0.10538	-0.3544	-2.2945	4.9171	56.002
0.8	0.06200	0.05952	-0.5504	-1.5464	9.7629	38.894
0.9	0.06499	-0.00147	-0.6508	-0.4177	12.3752	12.261
1	0.06157	-0.06652	-0.6299	0.8308	12.1110	-17.441

### Γραφικές παραστάσεις:

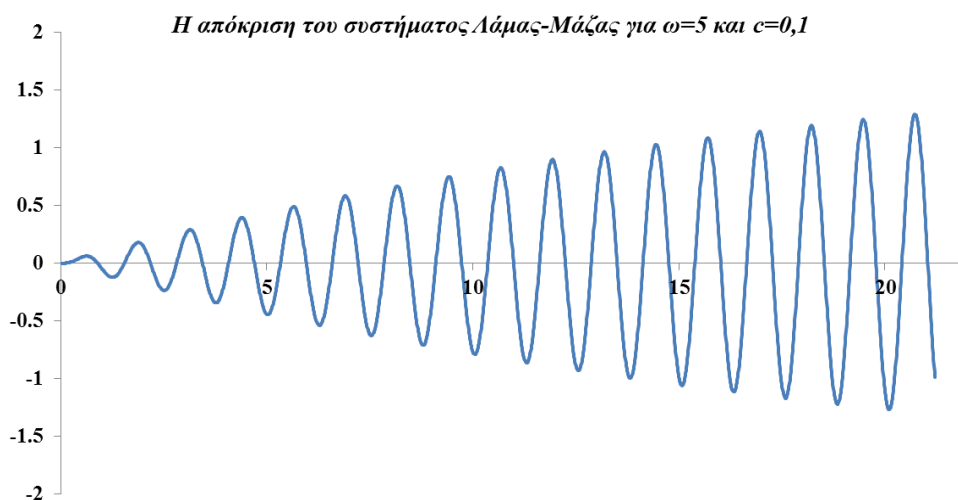
Στις επόμενες γραφικές παραστάσεις μεταβάλλεται η τιμή της κυκλικής συχνότητας της εξωτερικής δύναμης, έτσι ώστε να προσπαθήσουμε να αντιληφθούμε την επίδραση της τιμής του  $\omega$  στην απόκριση του συστήματος. Για να έχουμε άμεση συγκρισιμότητα, κρατάμε την κλίμακα των δύο αξόνων σταθερή.



**Σχήματα 9.33, 9.34 και 9.35** Η απόκριση του συστήματος Λάμας – Μάζας με μηδενική απόσβεση, σε ημιτονοειδή εξωτερική δύναμη με κυκλικές συχνότητες  $\omega = 2, 4$  και  $5$ . Αναγκαστήκαμε να αλλάζουμε την κλίμακα του άξονα των διαστημάτων ( $s(t)$ ) στην περίπτωση του  $\omega=5$ , διότι το εύρος ταλάντωσης ήταν ιδιαίτερα μεγάλο.

### Παρατήρηση.

Στην ειδική περίπτωση όπου η απόσβεση είναι μηδέν, έχουμε έναν ιδιαίτερα επιθετικό συντονισμό, με το πλάτος ταλάντωσης να αυξάνεται διαρκώς. Αυτό είναι κάτι αδύνατο στη φύση μια και είναι αδύνατο να μην υπάρξει απόσβεση. Όμως η περίπτωση του συντονισμού εξακολουθεί να είναι ιδιαίτερα επικίνδυνη στην περίπτωση όπου η απόσβεση  $c$  είναι ιδιαίτερα μικρή, όπως στο επόμενο γράφημα ( $c=0.1$ ).



**Σχήμα 9.36** Η απόκριση του συστήματος Λάμας – Μάζας με πολύ μικρή απόσβεση, σε ημιτονοειδή εξωτερική δύναμη, στην περιοχή του συντονισμού.



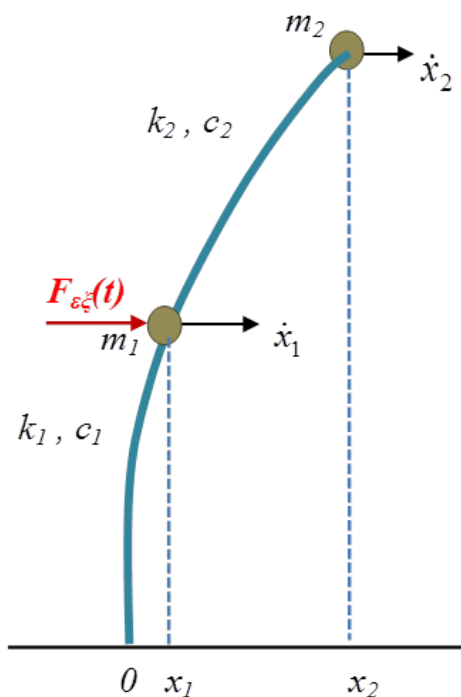
### 9.4.3 Ο Διβάθμιος Ταλαντωτής

Πρόκειται για ένα σύστημα αντίστοιχο με τον μονοβάθμιο ταλαντωτή, με δύο λάμες, στα άκρα των οποίων έχουν προσαρμοστεί δύο μάζες  $m_1$  και  $m_2$ . Η κάθε λάμα έχει τους δικούς της συντελεστές ελαστικότητας και απόσβεσης. Όπως παρατηρούμε στην επόμενη εικόνα, ορίζουμε:

- τις συναρτήσεις θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης της μάζας  $m_1$ :  $x_1(t)$ ,  $\dot{x}_1(t)$ ,  $\ddot{x}_1(t)$
- τις συναρτήσεις θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης της μάζας  $m_2$ :  $x_2(t)$ ,  $\dot{x}_2(t)$ ,  $\ddot{x}_2(t)$
- την εξωτερική δύναμη  $F_{e\xi}(t)$ , η οποία επιδρά στη μάζα  $m_1$ , πράγμα που είναι ισοδύναμο με το να επιδρά μία ίση και αντίθετη δύναμη στη βάση της πρώτης λάμας.

Οι εξισώσεις της κίνησης είναι οι:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1(t) &= -c_1 \dot{x}_1(t) - c_2 [\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)] - k_1 x_1(t) - k_2 [x_1(t) - x_2(t)] + F_{e\xi}(t) \\ m_2 \ddot{x}_2(t) &= -c_2 [\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] - k_2 [x_2(t) - x_1(t)] \end{aligned} \quad (9.4.1)$$



**Σχήμα 9.37** Η μορφή του διβάθμιου ταλαντωτή.

Για να υπολογισθούν οι εξισώσεις αυτές πρέπει να σκεφτούμε ως εξής:

1. Η εξίσωση που αφορά στην επάνω μάζα ( $m_2$ ) υπολογίζει τις αντιδράσεις της επάνω λάμας, σαν αυτή να είναι πακτωμένη στην κάτω μάζα (πράγμα που συμβαίνει). Άρα η δύναμη ελαστικής της επαναφοράς θα υπολογίζεται με βάση τη σχετική απόσταση των δύο μαζών:

$$-k_2 [x_2(t) - x_1(t)]$$

ενώ η απόσβεσή της θα εξαρτάται από τη σχετική ταχύτητα των δύο μαζών:

$$-c_2 [\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)]$$

2. Αντίθετα, για να καταλήξουμε στην εξίσωση της κάτω μάζας ( $m_1$ ), θα πρέπει να σκεφτούμε πως αυτή είναι πακτωμένη σε δύο λάμες, με αποτέλεσμα να επηρεάζεται από τις δυνάμεις επαναφοράς κι απόσβεσης και των δύο. Άρα η δύναμη ελαστικής επαναφοράς είναι ένα άθροισμα της δύναμης επαναφοράς της κάτω λάμας:

$$-k_1 x_1(t)$$

και της επαναφοράς, λόγω της θέσης της επάνω λάμας, η οποία προκύπτει από τη σχετική απόσταση των δύο μαζών:

$$-k_2 [x_1(t) - x_2(t)]$$

3. Όμοια, η απόσβεση της μάζας  $m_1$  είναι ένα άθροισμα της απόσβεσης της κάτω λάμας:

$$-c_1 \dot{x}_1(t)$$

και της απόσβεσης της επάνω λάμας, λόγω της σχετικής ταχύτητας των δύο μαζών:

$$-c_2 [\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)]$$

### Παρατήρηση:

Κάνοντας πράξεις στο σύστημα (9.4.1) έχουμε:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1(t) + (c_1 + c_2) \dot{x}_1(t) - c_2 \dot{x}_2(t) + (k_1 + k_2) x_1(t) - k_2 x_2(t) &= F_{\varepsilon\xi}(t) \\ m_2 \ddot{x}_2(t) - c_2 \dot{x}_1(t) + c_2 \dot{x}_2(t) - k_2 x_1(t) + k_2 x_2(t) &= 0 \end{aligned} \quad (9.4.2)$$

η οποία είναι μια έκφραση που μπορεί να γραφεί, με τη βοήθεια πινάκων, ως εξής:

$$M \cdot \ddot{X} + C \cdot \dot{X} + K \cdot X = F$$

όπου οι πίνακες που αναφέρονται, είναι οι:

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{X} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

και

$$F = \begin{pmatrix} F_{\varepsilon\xi}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

### Παράδειγμα:

Έστω ένα σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας με στοιχεία:

- 1<sup>η</sup> Λάμα – Μάζα  $m_1=10, c_1=4, k_1=20$
- 2<sup>η</sup> Λάμα – Μάζα  $m_1=10, c_1=4, k_1=20$
- Εξωτερική δύναμη  $F_{\varepsilon\xi\omega t}(t)=\sin(3t)$ , δηλαδή  $D=1$  και  $\omega=3$

και μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Ζητούνται:

- Η κατάσταση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων της κίνησης των μαζών.
- Ο πίνακας τιμών της αριθμητικής λύσης, με βήμα ολοκλήρωσης  $h=0.2$ , μέχρι το σημείο  $t=2$ .
- Οι γραφικές παραστάσεις για διάφορες τιμές των παραμέτρων  $m, c, k$  και  $\omega$ .



### Λύση:

Το σύστημα διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει το πρόβλημά μας είναι το (9.4.2). Αρχικά διαιρούμε την 1η και την 2η εξίσωση του συστήματος, με τις  $m_1$  και  $m_2$  αντίστοιχα. Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του Taylor, 4ης τάξης, χωρίς όμως να φθάσουμε και στην 5η παράγωγο (όπως κάναμε στο 1ο και στο 2ο παράδειγμα της παραγράφου 9.4.2). Για τον λόγο αυτό υπολογίζουμε τις απαιτούμενες παραγώγους.

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1(t) &= -\frac{c_1}{m_1} \dot{x}_1(t) - \frac{c_2}{m_1} [\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)] - \frac{k_1}{m_1} x_1(t) - \frac{k_2}{m_1} [x_1(t) - x_2(t)] + \frac{1}{m_1} F_{\varepsilon\xi}(t) \\ \ddot{x}_2(t) &= -\frac{c_2}{m_2} [\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] - \frac{k_2}{m_2} [x_2(t) - x_1(t)] \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\ddot{x}}_1(t) &= -\frac{c_1}{m_1} \ddot{x}_1(t) - \frac{c_2}{m_1} [\ddot{x}_1(t) - \ddot{x}_2(t)] - \frac{k_1}{m_1} \dot{x}_1(t) - \frac{k_2}{m_1} [\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)] + \frac{1}{m_1} \dot{F}_{\varepsilon\xi}(t) \\ \ddot{\ddot{x}}_2(t) &= -\frac{c_2}{m_2} [\ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t)] - \frac{k_2}{m_2} [\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

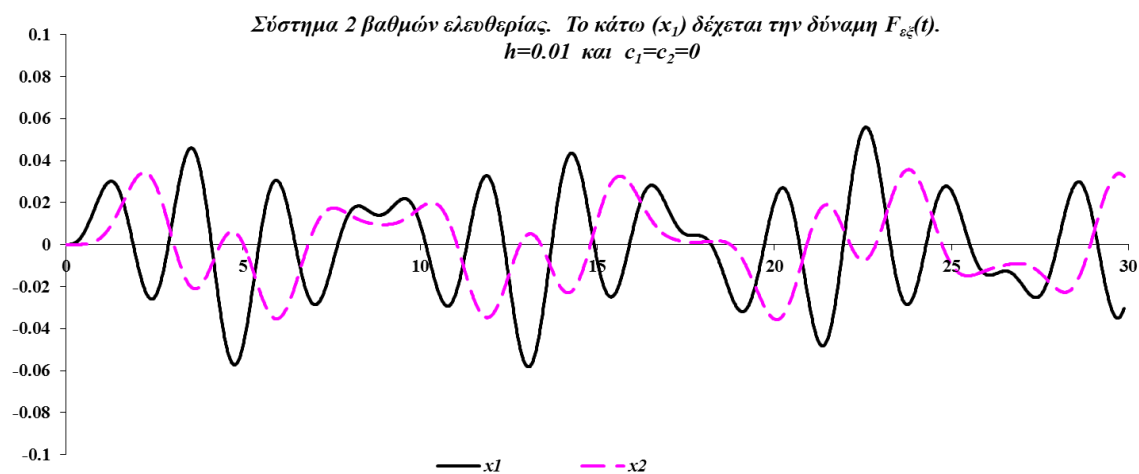
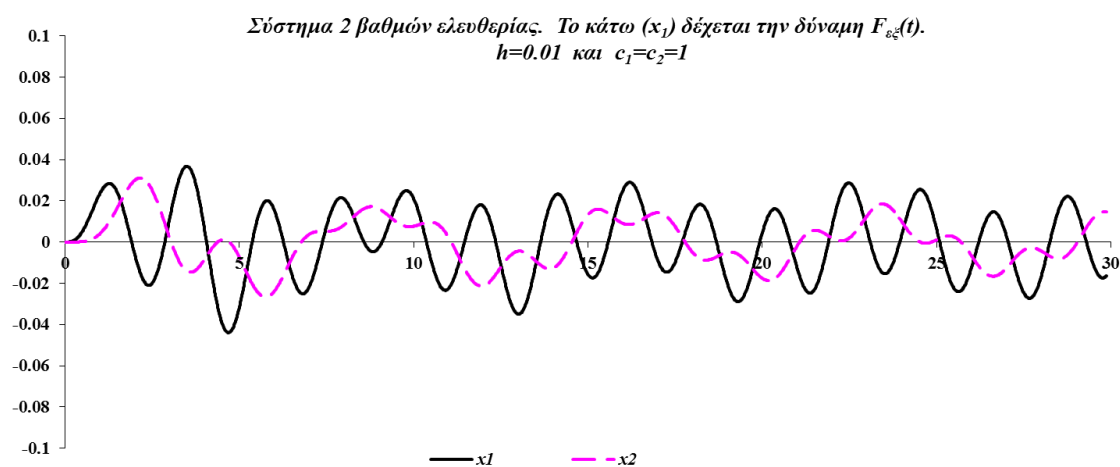
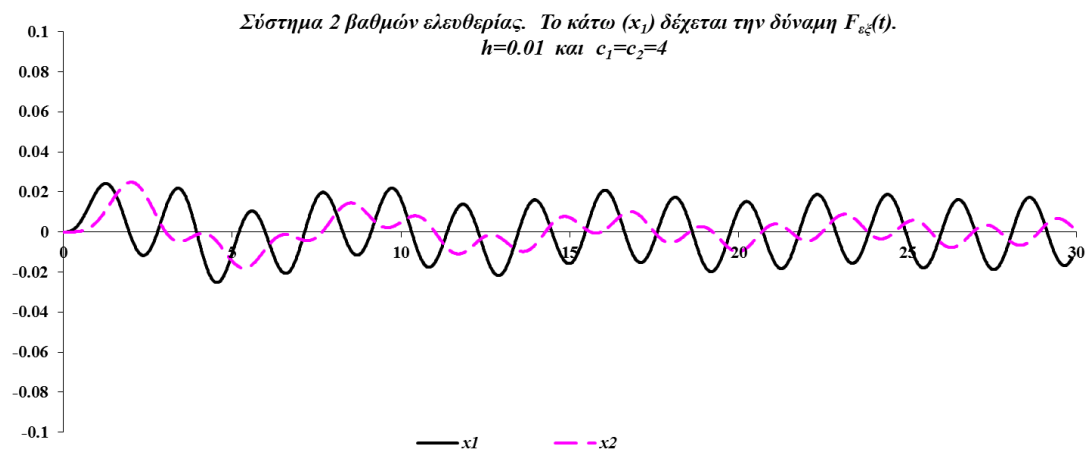
$$x_1^{(4)}(t) = -\frac{c_1}{m_1} \ddot{\ddot{x}}_1(t) - \frac{c_2}{m_1} [\ddot{\ddot{x}}_1(t) - \ddot{\ddot{x}}_2(t)] - \frac{k_1}{m_1} \ddot{x}_1(t) - \frac{k_2}{m_1} [\ddot{x}_1(t) - \ddot{x}_2(t)] + \frac{1}{m_1} \ddot{F}_{\varepsilon\xi}(t)$$

$$x_2^{(4)}(t) = -\frac{c_2}{m_2} [\ddot{\ddot{x}}_2(t) - \ddot{\ddot{x}}_1(t)] - \frac{k_2}{m_2} [\ddot{\ddot{x}}_2(t) - \ddot{\ddot{x}}_1(t)]$$

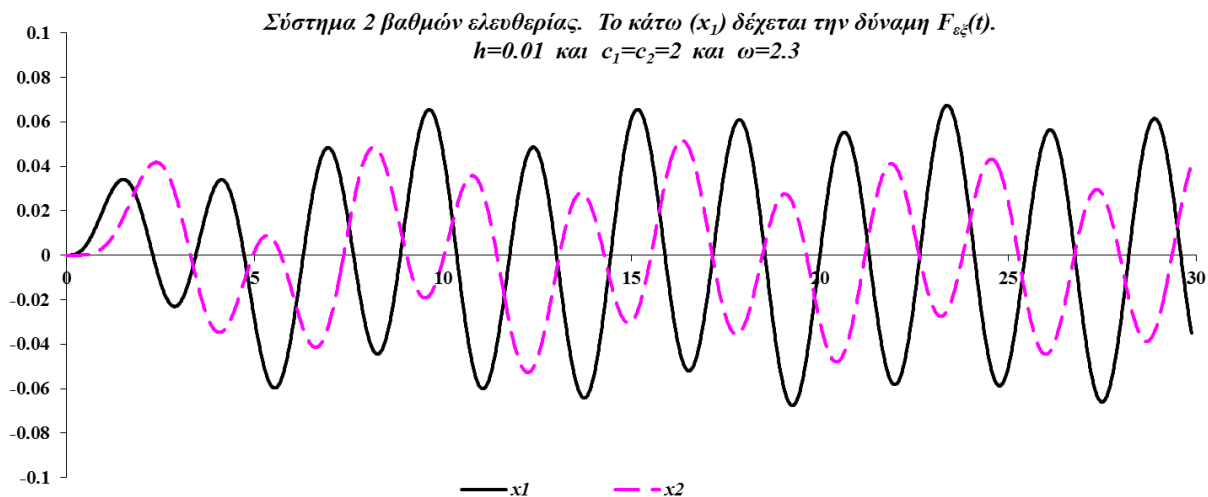
### Ο πίνακας τιμών:

$t$	$x_1$	$x_2$	$x_1'$	$x_2'$	$x_1''$	$x_1'''$	$x_2'''$	$x_1^{(4)}$	$x_2^{(4)}$
0	0	0	0	0	0	0.3	0	-0.24	0.12
0.2	0.000374	9.22E-06	0.005436	0.00019	0.050713	0.186798	0.029645	-0.84295	0.158631
0.4	0.002663	0.000154	0.018045	0.001555	0.069046	-0.01096	0.055954	-1.06064	0.088099
0.6	0.007568	0.000776	0.030225	0.005075	0.046516	-0.20667	0.05945	-0.82612	-0.0607
0.8	0.014218	0.002337	0.03444	0.010856	-0.00786	-0.3177	0.030745	-0.24361	-0.2215
1	0.020518	0.005196	0.026417	0.017767	-0.0716	-0.29621	-0.02498	0.454563	-0.31989
1.2	0.024014	0.009376	0.007001	0.023647	-0.1177	-0.14653	-0.08942	0.995752	-0.30348
1.4	0.022936	0.01442	-0.01801	0.026004	-0.12525	0.076958	-0.13791	1.167544	-0.16341
1.6	0.017008	0.019417	-0.03999	0.022977	-0.08764	0.290256	-0.14898	0.895293	0.060426
1.8	0.007699	0.023221	-0.05067	0.014159	-0.01543	0.41097	-0.11304	0.26925	0.292705
2	-0.00219	0.024785	-0.04543	0.000962	0.067107	0.388993	-0.03693	-0.48792	0.449586

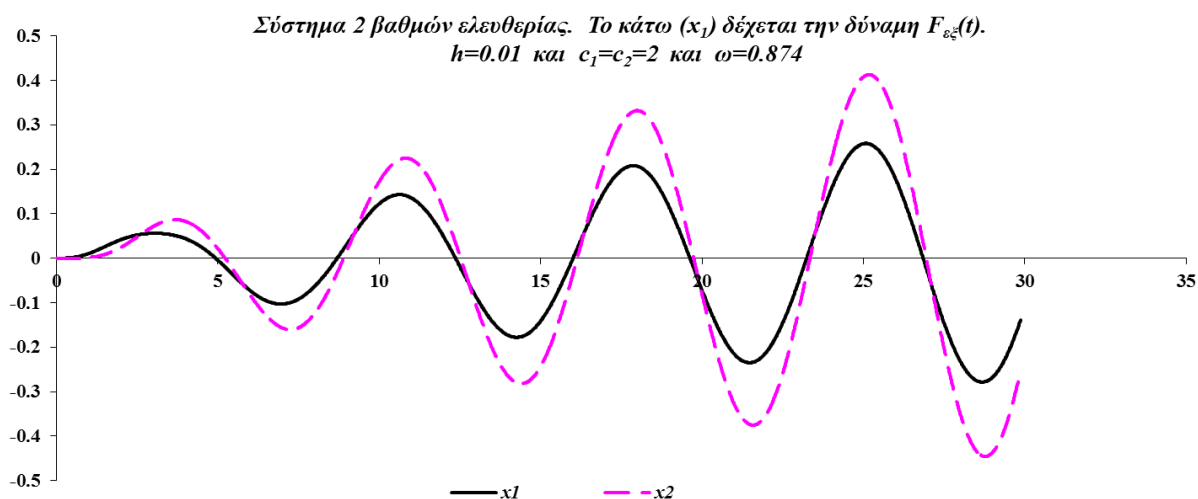
## Γραφικές παραστάσεις



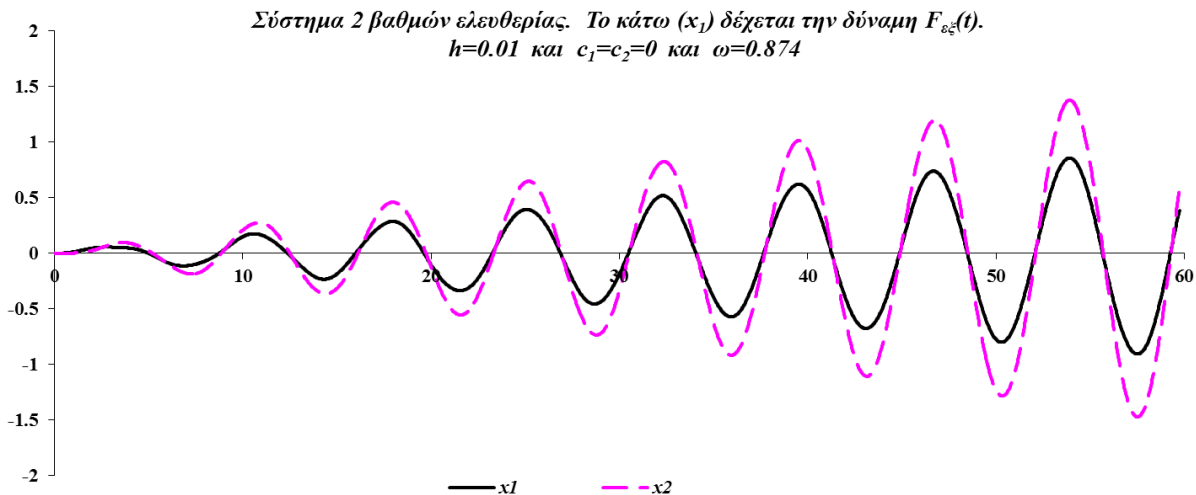
**Σχήματα 9.38, 9.39 και 9.40** Τρεις γραφικές παραστάσεις για τρεις διαφορετικές τιμές της απόσβεσης  $c$ . Παρατηρούμε πως όσο ελαττώνεται η απόσβεση, τόσο αυξάνεται το πλάτος της ταλάντωσης των δύο μαζών.



**Σχήμα 9.41** Στο γράφημα αυτό, ενώ αυξήθηκε η απόσβεση, αυξήθηκε ταυτόχρονα και το πλάτος ταλάντωσης. Αυτό οφείλεται στην αλλαγή της συχνότητας  $\omega$ , της  $F$ . Πρόκειται για τη μία από τις δύο περιπτώσεις συντονισμού, κατά την οποία η κίνηση των δύο μαζών είναι ακριβώς αντίστροφη.



**Σχήμα 9.42** Σε σχέση με το γράφημα του σχήματος 9.41, το παρόν γράφημα έχει ακριβώς τα ίδια στοιχεία. Η μόνη αλλαγή αφορά στη συχνότητα  $\omega$ . Πρόκειται για τη δεύτερη συχνότητα συντονισμού, όπου οι δύο μάζες κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση ταυτόχρονα. Εδώ ήταν απαραίτητο να μεταβάλλουμε την κλίμακα του άξονα των διαστημάτων, διότι το πλάτος της κίνησης των μαζών δεκαπλασιάζεται, σε σχέση με τα προηγούμενα. Αν συνεχιζόταν η γραφική παράσταση θα παρατηρούσαμε τη σταθεροποίηση του πλάτους ταλάντωσης στο 0.4 για την  $x_1$  και στο 0.7 για τη  $x_2$ .



**Σχήμα 9.43** Σε αντίθεση με το γράφημα του σχήματος 9.42, εδώ έχει μηδενιστεί η απόσβεση και για τις δύο λάμες. Τώρα, το πλάτος ταλάντωσης αυξάνεται ασταμάτητα... Βέβαια στη φύση πάντα θα υπάρχει μια, έστω και μικρή, απόσβεση. Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε πως όσο μικρότερη είναι η απόσβεση, τόσο μεγαλύτερο θα είναι το οριακό πλάτος στο οποίο θα τείνει η κίνηση των δύο μαζών, όταν σταθεροποιηθεί.

## 9.5 Υλοποίηση των μεθόδων σε MATLAB

Στην συνέχεια παρουσιάζονται τα προγράμματα σε MATLAB που υλοποιούν τις μεθόδους Euler, Taylor και Runge – Kutta για την αριθμητική επίλυση μιας διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης. Τα προγράμματα αυτά εύκολα μπορούν να γενικευτούν και για διαφορικές εξισώσεις μεγαλύτερης τάξης ή για συστήματα διαφορικών εξισώσεων

### Μέθοδος Euler

Η συνάρτηση `df_euler`, που ακολουθεί, έχει παραμέτρους

- `dy` = τη διαφορική εξίσωση π.χ. ' $x^2*y$ '
- `x0` = την αρχική τιμή του  $x$
- `xt` = την τελική τιμή του  $x$  (τιμή τέλους ολοκλήρωσης)
- `y0` = την αρχική τιμή του  $y$ ,  $y0=y(x0)$
- `h` = το βήμα ολοκλήρωσης

Οι έξοδοι της

- `xr` = ο πίνακας με τις τιμές του  $x$
- `yr` = ο πίνακας με τις αντίστοιχες τιμές του  $y$

```
function[xr,yr]=df_euler(dy,x0,xt,y0,h)
dy=vectorize(inline(dy,'x','y'));

i=1;
xr(1)=x0;
```

```

yr(1)=y0;
x=x0;
y=y0;

while ((xt-x)/h>0)
    y=y+dy(x,y)*h
    x=x+h;
    i=i+1;
    xr(i)=x;
    yr(i)=y;
end

```

## Μέθοδος Taylor 2<sup>ης</sup> τάξης

Η συνάρτηση df\_Taylor2, που ακολουθεί, έχει παραμέτρους

- fdy= τη διαφορική εξίσωση π.χ. 'x^2\*y'
- fd2y= την παράγωγο ως προς x της διαφορικής εξίσωσης, που είναι η δεύτερη παράγωγος της άγνωστης συνάρτησης y(x).
- x0 = την αρχική τιμή του x
- xt = την τελική τιμή του x (τιμή τέλους ολοκλήρωσης)
- y0 = την αρχική τιμή του y, y0=y(x0)
- h = το βήμα ολοκλήρωσης

Οι έξοδοι της

- xr = ο πίνακας με τις τιμές του x
- yr = ο πίνακας με τις αντίστοιχες τιμές του y

```

function[xr,yr]=df_Taylor2(fdy,fd2y,x0,xt,y0,h)
fdy=vectorize(inline(fdy));
fd2y=vectorize(inline(fd2y));

i=1;
xr(1)=x0;
yr(1)=y0;
x=x0;
y=y0;

while ((xt-x)/h>0)
    dy=fdy(x,y);

```

```

d2y=fd2y(x,y,dy);
y=y+dy*h+d2y/2*h^2;
x=x+h;
i=i+1;
xr(i)=x;
yr(i)=y;
end

```

### Μέθοδος Taylor 3<sup>ης</sup> τάξης

Η συνάρτηση df\_Taylor3, που ακολουθεί, έχει παραμέτρους

- fdy= τη διαφορική εξίσωση π.χ. 'x^2\*y'
- f2dy= την παράγωγο, ως προς x, της διαφορικής εξίσωσης, που είναι η δεύτερη παράγωγος της άγνωστης συνάρτησης y(x).
- f3dy= τη δεύτερη παράγωγο, ως προς x, της διαφορικής εξίσωσης, που είναι η τρίτη παράγωγος της άγνωστης συνάρτησης y(x).
- x0 = την αρχική τιμή του x
- xt = την τελική τιμή του x (τιμή τέλους ολοκλήρωσης)
- y0 = την αρχική τιμή του y, y0=y(x0)
- h = το βήμα ολοκλήρωσης

Οι έξοδοι της

- xr = ο πίνακας με τις τιμές του x
- yr = ο πίνακας με τις αντίστοιχες τιμές του y

```

function[xr,yr]=df_Taylor3(fdy,fd2y,fd3y,x0,xt,y0,h)
fdy=vectorize(inline(fdy,'x','y'));
fd2y=vectorize(inline(fd2y,'x','y','dy'));
fd3y=vectorize(inline(fd3y,'x','y','dy','d2y'));

i=1;
xr(1)=x0;
yr(1)=y0;
x=x0;
y=y0;

while ((xt-x)/h>0)
    dy=fdy(x,y);
    d2y=fd2y(x,y,dy);
    d3y=fd3y(x,y,dy,d2y);

```

```

y=y+dy*h+d2y/2*h^2+d3y/6*h^3;
x=x+h;
i=i+1;
xr(i)=x;
yr(i)=y;
end

```

### Μέθοδος Runge – Kutta 2<sup>ης</sup> τάξης

Η συνάρτηση df\_RK2, που ακολουθεί, έχει παραμέτρους

- dy= τη διαφορική εξίσωση π.χ. 'x^2\*y'
- x0= την αρχική τιμή του x
- xt= την τελική τιμή του x (τιμή τέλους ολοκλήρωσης)
- y0= την αρχική τιμή του y, y0=y(x0)
- h= το βήμα ολοκλήρωσης

Οι έξοδοι της

- xr= ο πίνακας με τις τιμές του x
- yr= ο πίνακας με τις αντίστοιχες τιμές του y

```

function[xr,yr]=df_RK2(dy,x0,xt,y0,h)
dy=vectorize(inline(dy,'x','y'));

```

```

i=1;
xr(1)=x0;
yr(1)=y0;
x=x0;
y=y0;

while ((xt-x)/h>0)
    k1=dy(x,y);
    k2=dy(x+h,y+k1*h);
    y=y+(k1+k2)/2*h;
    x=x+h;
    i=i+1;
    xr(i)=x;
    yr(i)=y;
end

```

## Μέθοδος Runge – Kutta 4<sup>ης</sup> τάξης

Η συνάρτηση df\_RK4, που ακολουθεί, έχει παραμέτρους

- dy= τη διαφορική εξίσωση π.χ. 'x^2\*y'
- x0 = την αρχική τιμή του x
- xt = την τελική τιμή του x (τιμή τέλους ολοκλήρωσης)
- y0 = την αρχική τιμή του y, y0=y(x0)
- h = το βήμα ολοκλήρωσης

Οι έξοδοι της

- xr = ο πίνακας με τις τιμές του x
- yr = ο πίνακας με τις αντίστοιχες τιμές του y

```
function[xr,yr]=df_RK4(dy,x0,xt,y0,h)
dy=vectorize(inline(dy,'x','y'));
```

```
i=1;
```

```
xr(1)=x0;
```

```
yr(1)=y0;
```

```
x=x0;
```

```
y=y0;
```

```
while ((xt-x)/h>0)
```

```
    k1=dy(x,y);
```

```
    k2=dy(x+h/2,y+k1*h/2);
```

```
    k3=dy(x+h/2,y+k2*h/2);
```

```
    k4=dy(x+h,y+k3*h);
```

```
    y=y+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6*h;
```

```
    x=x+h;
```

```
    i=i+1;
```

```
    xr(i)=x;
```

```
    yr(i)=y;
```

```
end
```



## Κριτήρια αξιολόγησης

### Κριτήριο αξιολόγησης 1

Να λυθούν με τη μέθοδο του Euler τις διαφορικές εξισώσεις:

$$\alpha) y' = f(x, y) = 3x^2y$$

$$\beta) y' = f(x, y) = x - y$$

με κοινή αρχική συνθήκη  $y(0)=1$ , κοινό βήμα  $h=0.05$ , φθάνοντας μέχρι την τιμή  $y(0.5)$ . Στη συνέχεια, οι δύο διαφορικές εξισώσεις να λυθούν αναλυτικά (να βρεθεί η μαθηματική, ακριβής λύση τους) και να υπολογισθούν τα δύο σχετικά σφάλματα της τιμής  $y(0.5)$ .

### Κριτήριο αξιολόγησης 2

Να λυθούν με τη μέθοδο του Taylor τις διαφορικές εξισώσεις:

$$\alpha) y' = f(x, y) = 3x^2y$$

$$\beta) y' = f(x, y) = x - y$$

με κοινή αρχική συνθήκη  $y(0)=1$ , κοινό βήμα  $h=0.1$ , φθάνοντας μέχρι την τιμή  $y(1)$ . Στη συνέχεια, οι δύο διαφορικές εξισώσεις να λυθούν αναλυτικά (να βρεθεί η μαθηματική, ακριβής λύση τους) και να υπολογισθούν τα δύο σχετικά σφάλματα της τιμής  $y(1)$ .

### Κριτήριο αξιολόγησης 3

Δίνεται η διαφορική εξίσωση  $y' = f(x, y) = \frac{3x^2}{2y}$ , με αρχική συνθήκη  $y(0)=1$ . Ζητούνται:

- Να δείξετε πως η γενική λύση της είναι η:  $y(x, c) = \pm \sqrt{x^3 + c}$  και να υπολογίσετε τη μερική της λύση (πρέπει να επιλέξετε και το κατάλληλο πρόσημο).
- Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση με τις μεθόδους του Euler, του Taylor και των Runge–Kutta, 2<sup>ης</sup> τάξης, με βήμα  $h=0.2$  και έως την τιμή  $x=1$ .

**Λύση:**  $y(1) = 1.327$  (Euler),  $1.375$  (Taylor),  $1.422$  (Runge–Kutta),  $1.414$  (Ακριβές)

### Κριτήριο αξιολόγησης 4

Δίνεται η διαφορική εξίσωση  $y' = f(x, y) = \frac{y}{x^2}$ , με αρχική συνθήκη  $y(1)=1$ . Ζητούνται:

- Να δείξετε πως η γενική λύση της είναι η:  $y(x, c) = ce^{-\frac{1}{x}}$  και να υπολογίσετε τη μερική της λύση.
- Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση με τις μεθόδους του Euler, του Taylor και των Runge–Kutta, 2<sup>ης</sup> τάξης, με βήμα  $h=0.2$  και έως την τιμή  $x=2$ .

**Λύση:**  $y(2) = 1.724$  (Euler),  $1.643$  (Taylor),  $1.655$  (Runge–Kutta),  $1.649$  (Ακριβές)

## Κριτήριο αξιολόγησης 5

Δίνεται η διαφορική εξίσωση  $y' = f(x, y) = y \sin(2x)$ , με αρχική συνθήκη  $y(0)=1$ . Ζητούνται:

- Να δείξετε πως η γενική λύση της είναι η:  $y(x, c) = ce^{0.5 \sin(2x)}$  και να υπολογίσετε τη μερική της λύση.
- Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση με τις μεθόδους του Euler, του Taylor και των Runge–Kutta, 2<sup>ης</sup> τάξης, με βήμα  $h=0.2$  και έως την τιμή  $x=1$ .

**Λύση:**  $y(1) = 1.726$  (Euler),  $1.605$  (Taylor),  $1.560$  (Runge–Kutta),  $1.576$  (Ακριβές)

## Κριτήριο αξιολόγησης 6

Στο σύστημα Λάμας – Μάζας με δεδομένα  $m=1$ ,  $c=2$  και  $k=17$ , επιδρά η εξωτερική δύναμη:

$$F_{\text{εξωτ.}}(t) = \begin{cases} 10 & \text{αν } 0 < t < 10 \\ 0 & \text{αν } t > 10 \end{cases}$$

ενώ έχουμε μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Ζητούνται:

- Η κατάστροψη της διαφορικής εξίσωσης της κίνησης της μάζας  $m$ .
- Ο πίνακας τιμών της αριθμητικής λύσης, με βήμα ολοκλήρωσης  $h=0.2$ , μέχρι το σημείο  $t=20$ .
- Η γραφική παράσταση της λύσης.

**Υπόδειξη:** Στις στήλες που αφορούν στις παραγώγους πρέπει να τοποθετηθεί ένας έλεγχος της τιμής του  $t$ , έτσι ώστε να αλλάζει η τιμή της εξωτερικής δύναμης, πριν και μετά την τιμή  $t=10$ .

**Λύση:** Η μάζα μετακινείται προς τα δεξιά, εκτελεί μία φθίνουσα ταλάντωση γύρω από την τιμή  $10/17$  και ακινητοποιείται μέχρι τη χρονική στιγμή  $t=10$ . Στη συνέχεια εκτελεί μια νέα φθίνουσα ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας, όπου και ηρεμεί.

## Κριτήριο αξιολόγησης 7

Άσκηση. Σε ένα σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας με στοιχεία:

1<sup>η</sup> Λάμα – Μάζα  $m_1=10$ ,  $c_1=4$ ,  $k_1=20$

2<sup>η</sup> Λάμα – Μάζα  $m_1=10$ ,  $c_1=4$ ,  $k_1=20$

Εξωτερική δύναμη  $F_{\text{εξωτ.}}(t)=\sin(3t)$ , δηλαδή  $D=1$  και  $\omega=3$

και μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Ζητούνται:

- Η κατάστροψη του συστήματος διαφορικών εξισώσεων της κίνησης των μαζών.
- Ο πίνακας τιμών της αριθμητικής λύσης, με βήμα ολοκλήρωσης  $h=0.2$ , μέχρι το σημείο  $t=2$ .
- Οι γραφικές παραστάσεις για διάφορες τιμές των παραμέτρων  $m, c, k$  και  $\omega$ .

Να λυθεί με τη βοήθεια της μεθόδου των Runge–Kutta.

**Υπόδειξη:** Για να εφαρμοστεί ο τύπος των Runge–Kutta πρέπει να μετατραπεί το σύστημα (9.4.2), το οποίο είναι ένα σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων 2<sup>ης</sup> τάξης, σε ένα σύστημα τεσσάρων διαφορικών εξισώσεων 1<sup>ης</sup> τάξης. Όπως ήδη ειπώθηκε, η μετατροπή αυτή συμβαίνει μέσω της αντικατάστασης:

$$\begin{aligned}v_1(t) &= \dot{x}_1(t) \\v_2(t) &= \dot{x}_2(t)\end{aligned}$$

εισάγοντας δύο νέες συναρτήσεις, οι οποίες είναι, ουσιαστικά, οι συναρτήσεις ταχύτητας των δύο μαζών. Το σύστημα στο οποίο καταλήγουμε:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= v_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= v_2(t) \\ \dot{v}_1(t) &= -\frac{c_1}{m_1}v_1(t) - \frac{c_2}{m_1}[v_1(t) - v_2(t)] - \frac{k_1}{m_1}x_1(t) - \frac{k_2}{m_1}[x_1(t) - x_2(t)] + \frac{1}{m_1}F_{\varepsilon\xi}(t) \\ \dot{v}_2(t) &= -\frac{c_2}{m_2}[v_2(t) - v_1(t)] - \frac{k_2}{m_2}[x_2(t) - x_1(t)]\end{aligned}$$

Ο πίνακας της λύσης θα περιέχει τις στήλες:

$t$	$x_1$	$x_2$	$v_1$	$v_2$	$K_1(x_1)$	$K_1(x_2)$	$K_1(v_1)$	$K_1(v_2)$	$t+h$	$x_1 = x_1 + hK_1$	$x_2 = x_2 + hK_1$	$v_1 = v_1 + hK_1$	$v_2 = v_2 + hK_1$	$K_2(x_1)$	$K_2(x_2)$	$K_2(v_1)$	$K_2(v_2)$
-----	-------	-------	-------	-------	------------	------------	------------	------------	-------	--------------------	--------------------	--------------------	--------------------	------------	------------	------------	------------

## Κριτήριο αξιολόγησης 8

Στο σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας με δεδομένα  $m_1=m_2=1$ ,  $c_1=c_2=2$  και  $k_1=k_2=17$ , επιδρά η εξωτερική δύναμη:

$$F_{\varepsilon\xi}(t) = \begin{cases} 10 & \text{αν } 0 < t < 10 \\ 0 & \text{αν } t > 10 \end{cases}$$

ενώ έχουμε μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Ζητούνται:

- Η κατάστροψη του συστήματος διαφορικών εξισώσεων της κίνησης των δύο μαζών.
- Ο πίνακας τιμών της αριθμητικής λύσης, με βήμα ολοκλήρωσης  $h=0.2$ , μέχρι το σημείο  $t=20$ .
- Η γραφική παράσταση της λύσης.

**Υπόδειξη:** Στις στήλες που αφορούν στις παραγώγους πρέπει να τοποθετηθεί ένας έλεγχος της τιμής του  $t$ , έτσι ώστε να αλλάζει η τιμή της εξωτερικής δύναμης, πριν και μετά την τιμή  $t=10$ .

**Λύση:** Οι μάζες μετακινούνται προς τα δεξιά, εκτελώντας μία φθίνουσα ταλάντωση γύρω από την τιμή  $10/17$  και ακινητοποιούνται μέχρι τη χρονική στιγμή  $t=10$ . Στη συνέχεια εκτελούν μια νέα φθίνουσα ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας, όπου και ηρεμούν.

## Βιντεοσκοπημένες διαλέξεις

Οι παρακάτω συνδέσεις οδηγούν στις βιντεοσκοπημένες διαλέξεις, κατά το ακαδημαϊκό έτος 2014 – 2015, του μαθήματος «Αριθμητική Ανάλυση», του β' εξαμήνου σπουδών, της κατεύθυνσης Πολιτικών Μηχανικών του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών ΤΕ και Τοπογραφίας & Γεωπληροφορικής ΤΕ, του ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας. Εισηγητής των διαλέξεων είναι ο συγγραφέας του βιβλίου κ. Παπαϊωάννου.

Οι διαλέξεις βιντεοσκοπήθηκαν στα πλαίσια του προγράμματος «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα του ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας». Το έργο υλοποιήθηκε στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτήθηκε από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Τα βίντεο βρίσκονται στο αποθετήριο του προγράμματος <http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/> στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας στις Σέρρες και υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons, Αναφορά Δημιουργού – Παρόμοια Διανομή 4.0 Διεθνές Άδεια. Για να δείτε ένα αντίγραφο της άδειας αυτής, επισκεφτείτε τη διεύθυνση <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.el>.

### Εισαγωγή, πολωνυμικές συναρτήσεις

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=481>

### Συμπτωτικό πολυώνυμο

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=353>

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=482>

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=302>

### Μετρήσεις και σφάλματα

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=80>

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=301>

### Αναπτύγματα Taylor και Mac Laurin

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=483>

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=484>

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=303>

### Πραγματικές ρίζες συναρτήσεων

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=304>

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=485> (μέχρι 34:45)

## Πεπερασμένες διαφορές

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=485> (από 34:45)

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=358>

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=486>

## Επαναληπτική διάλεξη. Πολυώνυμο Taylor, Πεπερασμένες διαφορές,

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=305>

## Αριθμητική παρεμβολή

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=487>

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=361>

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=488>

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=306>

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=307>

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=489>

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=490>

## Αριθμητική παραγωγή

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=491>

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=492>

## Αριθμητικός υπολογισμός ορισμένου ολοκληρώματος

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=308>

## Αριθμητική επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=309>

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=495>

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=496>

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=310>

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=495>

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=496>

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=497>

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=498>

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=310>

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=373>

<http://eclass.opencourses.teicm.gr/eclass/modules/video/play.php?course=TMC107&id=499>

## Προτεινόμενη Βιβλιογραφία για Περαιτέρω Μελέτη

- Ακριβής, Γ.Δ. & Δούγαλης, Β.Α. (2009). *Εισαγωγή στην αριθμητική ανάλυση*. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Βραχάτης, Μ. Ν. (2012). *Αριθμητική Ανάλυση*. Αθήνα: Εκδόσεις Κλειδάριθμος.
- Γουσίδου–Κουτίτα, Μ. Χ. (2004). *Αριθμητική Ανάλυση*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Χριστοδουλίδου.
- Σαρρής, Ι. & Καρακασίδης, Θ. (2014). *Αριθμητικές Μέθοδοι και Εφαρμογές για Μηχανικούς*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.
- Σοφιανός, Γ. Σ. & Τυχόπουλος, Ε. Θ. (2005). *Αριθμητική Ανάλυση*. Αθήνα: Εκδόσεις Σταμούλη.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P. (2007). *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing*. New York: Cambridge University Press.
- Scheid, F. (2004). *Αριθμητική Ανάλυση*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.