

Βιολογικές Διεργασίες στην Επεξεργασία Υγρών Αποβλήτων

Μάθημα 7

Καθίζηση (sedimentation)

Τύποι καθίζησης

Η καθίζηση είναι η φυσική διεργασία απομάκρυνσης αιωρούμενων στερεών μέσω της βαρύτητας.

Η ταχύτητα καθίζησης είναι ανάλογη του μεγέθους των στερεών.

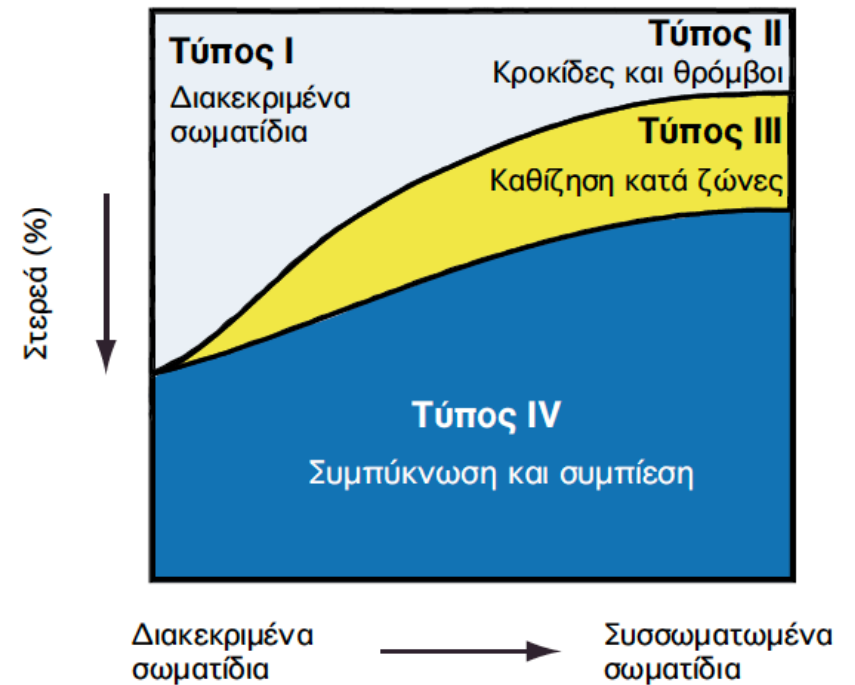
Υπάρχουν τέσσερις διαφορετικοί τύποι καθίζησης:

(α) **Τύπος-I**, καθίζηση διακεκριμένων σωματιδίων (π.χ. άμμος, μη συσσωματωμένα στερεά).

(β) **Τύπος-II**, μικρά συσσωματώματα (π.χ. κροκίδες, θρόμβοι).

(γ) **Τύπος-III**, έχει σχέση με μεγάλες συγκεντρώσεις αιωρούμενων στερεών (>500 mg/L) όπου κατά τη διάρκεια της καθίζησης σχηματίζονται ζώνες αιωρούμενων σωματιδίων. Σε αυτές τις ζώνες υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των στερεών και πρέπει να λαμβάνεται υπ' όψη η ανοδική κίνηση του νερού που εκτοπίζεται από τα στερεά σωματίδια που καθιζάνουν.

(δ) **Τύπος-IV**, περιοχή συμπύκνωσης και συμπίεσης των αιωρούμενων σωματιδίων σε πάρα πολύ μεγάλες συγκεντρώσεις.



Τύποι καθίζησης.

Καθίζηση διακεκριμένων στερεών

Όταν ένα στερεό με πυκνότητα μεγαλύτερη του νερού τοποθετηθεί σε μία δεξαμενή με νερό, το στερεό επιταχύνεται μέχρι να φτάσει την τερματική ή οριακή του ταχύτητα.

Στο στερεό ασκούνται τρεις δυνάμεις:

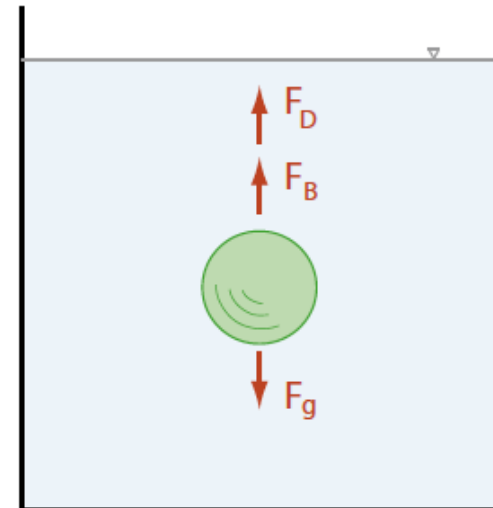
- (1) άνωση, F_B , (buoyant force)
- (2) βαρύτητα, F_g (gravity)
- (3) οπισθέλκουσα, F_D (drag force)

Εξ' ορισμού έχουμε:

$$F = ma$$

$$\Rightarrow F_g - F_B - F_D = m \frac{dv_s}{dt}$$

όπου m είναι η μάζα του στερεού, a η επιτάχυνση και v_s η ταχύτητα του στερεού.



Δυνάμεις που ασκούνται σε ένα στερεό βυθισμένο κατά τη διάρκεια καθίζησης σε δεξαμενή νερού (άνωση F_B , βαρύτητα F_g , και οπισθέλκουσα F_D).

Καθίζηση σε συνθήκες μόνιμης κατάστασης

Όταν το στερεό φτάσει την οριακή ή τερματική του ταχύτητα, τότε βρίσκεται σε συνθήκες μόνιμης κατάστασης. Δηλαδή:

$$\frac{dv_s}{dt} = 0$$
$$\Rightarrow F_g - F_B = F_D$$

$$\left. \begin{array}{l} F_g = \rho_p V_p g \\ F_B = \rho_w V_p g \end{array} \right\} \Rightarrow F_g - F_B = (\rho_p - \rho_w) V_p g$$

όπου ρ_p είναι η πυκνότητα του στερεού (kg/m^3), ρ_w η πυκνότητα του νερού (kg/m^3), V_p ο όγκος του στερεού (m^3) και g η επιτάχυνση βαρύτητας (m/s^2).

Η οπισθέλκουσα δύναμη για μικρά σφαιρικά σωματίδια που καθιζάνουν, δίνεται από τη σχέση του Stokes:

$$F_D = 3\pi\mu_w d_p v_s$$

Η σχέση του Stokes ισχύει όταν ο αδιάστατος αριθμός Reynolds (Re), ο οποίος για σφαιρικά στερεά ορίζεται:

$$Re = \frac{\rho_w d_p v_s}{\mu_w}$$

έχει τιμή μικρότερη της μονάδας ($Re < 1$), δηλαδή για συνθήκες στρωτής γραμμικής ροής.

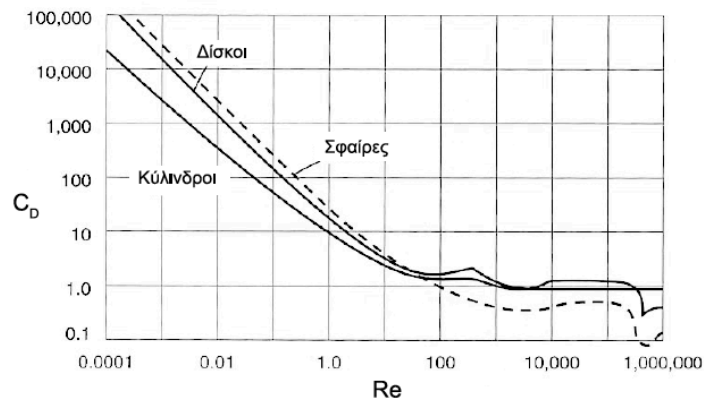
Ο αδιάστατος αριθμός Re αντιπροσωπεύει το λόγο της δύναμης αδράνειας (*inertial force*) προς τη δύναμη συνεκτικότητας (*viscous force*). Δηλαδή μικρές τιμές του Re υποδηλώνουν σημαντικές δυνάμεις συνεκτικότητας και μεγάλες τιμές υποδηλώνουν σημαντικές δυνάμεις αδράνειας.

Για συνθήκες ροής όπου $Re > 1$ η οπισθέλκουσα δύναμη δίνεται από τον νόμο του Newton:

$$F_D = C_D A_p \rho_w \frac{v_s^2}{2}$$

όπου C_D είναι ο συντελεστής οπισθέλκουσας και A_p είναι η επιφάνεια διατομής του στερεού.

Ο Newton θεώρησε ότι ο συντελεστής C_D είναι σταθερός. Αλλά στην πραγματικότητα ο συντελεστής C_D εξαρτάται από τον Re , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Μεταβολή του συντελεστή οπισθέλκουσας με τον Re .

Για σφαιρικά σωματίδια σε στρωτή γραμμική ροή (περιοχή Stokes, $Re < 1$) ο συντελεστής οπισθέλκουσας δίνεται από την εξίσωση:

$$C_D = \frac{24}{Re}$$

Στη μεταβατική περιοχή ($1 < Re < 10^3$) ισχύει η εμπειρική σχέση:

$$C_D = \frac{24}{Re} + \frac{3}{Re^{1/2}} + 0,34 \approx \frac{13}{Re^{1/2}}$$

Στην περιοχή τυρβώδους ροής (δηλαδή περιοχή Newton, $Re > 10^3$) ο συντελεστής C_D είναι ανεξάρτητος του αδιάστατου αριθμού Re και ισχύει:

$$C_D \approx 0,44$$

Η ταχύτητα καθίζησης για $Re < 1$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\left. \begin{aligned} F_D &= 3\pi\mu_w d_p v_s \\ F_g - F_B &= (\rho_p - \rho_w) V_p g \\ F_g - F_B &= F_D \\ V_p &= \frac{\pi d_p^3}{6} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(\frac{\pi d_p^3}{6} \right) (\rho_p - \rho_w) g = 3\pi\mu_w d_p v_s$$

$$\Rightarrow v_s = \frac{g}{18 \mu_w} (\rho_p - \rho_w) d_p^2$$

Για συνθήκες όπου $Re > 1$ η ταχύτητα καθίζησης υπολογίζεται ως εξής:

$$\left. \begin{aligned} F_D &= C_D A_p \rho_w \frac{v_s^2}{2} \\ A_p &= \frac{\pi d_p^2}{4} \\ F_g - F_B &= (\rho_p - \rho_w) V_p g \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(\frac{\pi d_p^3}{6} \right) (\rho_p - \rho_w) g = C_D \frac{\pi d_p^2}{4} \rho_w \frac{v_s^2}{2}$$

$$\Rightarrow v_s^2 = \frac{4}{3} \frac{g}{C_D} \left(\frac{\rho_p - \rho_w}{\rho_w} \right) d_p$$

$$\Rightarrow v_s = \left[\frac{4}{3} \frac{g}{C_D} \left(\frac{\rho_p - \rho_w}{\rho_w} \right) d_p \right]^{1/2}$$

Καθίζηση σε συνθήκες μη-μόνιμης κατάστασης

Όταν ένα σφαιρικό στερεό με πυκνότητα μεγαλύτερη του νερού τοποθετείται σε μία δεξαμενή με νερό, η αρχική του ταχύτητα καθίζησης είναι $v_s=0$ και το στερεό επιταχύνεται μέχρι να φτάσει την τερματική ή οριακή του ταχύτητα. Για τη μεταβατική περίοδο αυτή και για $Re < 1$, ισχύουν τα εξής:

$$F_g - F_B - F_D = m \frac{dv_s}{dt}$$

$$(\rho_p - \rho_w) V_p g - 3\pi\mu_w d_p v_s = m \frac{dv_s}{dt}$$

Η μάζα του στερεού δίνεται από τη σχέση:

$$m = V_p \rho_p$$

όπου όγκος του σφαιρικού στερεού δίνεται από τη σχέση:

$$V_p = \frac{\pi d_p^3}{6}$$

Συνδυάζοντας τις τρεις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει:

$$(\rho_p - \rho_w) \frac{\pi d_p^3}{6} g - 3\pi\mu_w d_p v_s = \frac{\pi d_p^3}{6} \rho_p \frac{dv_s}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dv_s}{dt} + \frac{18\mu_w}{d_p^2 \rho_p} v_s = \frac{(\rho_p - \rho_w)}{\rho_p} g$$

Η λύση της παραπάνω συνήθους διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$e^{\int_0^t \frac{18\mu_w}{d_p^2 \rho_p} dt} v_s = \int_0^t e^{\int_0^t \frac{18\mu_w}{d_p^2 \rho_p} dt} \frac{(\rho_p - \rho_w)}{\rho_p} g \cdot dt + c$$

$$\Rightarrow e^{\frac{18\mu_w t}{d_p^2 \rho_p}} v_s = \int_0^t e^{\frac{18\mu_w t}{d_p^2 \rho_p}} \frac{(\rho_p - \rho_w)}{\rho_p} g \cdot dt + c$$

$$\Rightarrow \exp\left[\frac{18\mu_w t}{d_p^2 \rho_p}\right] v_s = \frac{d_p^2 (\rho_p - \rho_w) g}{18\mu_w} \exp\left[\frac{18\mu_w t}{d_p^2 \rho_p}\right] \Big|_0^t + c$$

$$\Rightarrow \exp\left[\frac{18\mu_w t}{d_p^2 \rho_p}\right] v_s = \frac{d_p^2 (\rho_p - \rho_w) g}{18\mu_w} \left\{ \exp\left[\frac{18\mu_w t}{d_p^2 \rho_p}\right] - 1 \right\} + c$$

$$\Rightarrow v_s(t) = \frac{d_p^2 (\rho_p - \rho_w) g}{18\mu_w} \left\{ 1 - \exp\left[\frac{-18\mu_w t}{d_p^2 \rho_p}\right] \right\} + c \exp\left[\frac{-18\mu_w t}{d_p^2 \rho_p}\right]$$

Η παραπάνω εξίσωση πρέπει να ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $v_s(t=0)=0$. Αντικαθιστώντας $v_s=0$ σε χρόνο $t=0$ προκύπτει η σταθερά $c=0$. Επομένως,

$$v_s(t) = \frac{d_p^2(\rho_p - \rho_w)g}{18\mu_w} \left[1 - \exp\left[\frac{-18\mu_w t}{d_p^2\rho_p} \right] \right]$$

Η τερματική ταχύτητα είναι ανεξάρτητη του χρόνου, $v_s(t)=v_s$, **μόνο όταν:**

$$\begin{aligned} \left\{ 1 - \exp\left[\frac{-18\mu_w t}{d_p^2\rho_p} \right] \right\} &\cong 1 \\ \Rightarrow \frac{18\mu_w t}{d_p^2\rho_p} &\gg 1 \\ \Rightarrow t &\gg \frac{d_p^2\rho_p}{18\mu_w} \quad (*) \end{aligned}$$

Η εξίσωση (*) δίνει το χρόνο που χρειάζεται ένα σφαιρικό σωματίδιο με διάμετρο d_p να αποκτήσει την τερματική του ταχύτητα μέσα σε μια δεξαμενή καθίζησης για $Re < 1$.

Όπως φαίνεται από τον πίνακα που ακολουθεί, **οι χρόνοι απόκτησης μόνιμης κατάστασης** (τερματικής ταχύτητας) για σωματίδια που πιθανόν να βρεθούν σε δεξαμενή καθίζησης **είναι αρκετά μικροί.**

Επομένως, **είναι ασφαλές** να θεωρηθεί οι δεξαμενές καθίζησης λειτουργούν σε συνθήκες μόνιμης κατάστασης και τα αιωρούμενα σωματίδια καθιζάνουν με την τερματική τους ταχύτητα.

Απαιτούμενος χρόνος για την απόκτηση τερματικής ταχύτητας

Διάμετρος στερεού (mm)	Είδος στερεού	Χρόνος απόκτησης τερματικής ταχύτητας
1	Άμμος (sand)	$3,7 \times 10^{-2} \text{ s}$
0,1	Λεπτή άμμος (sand, fine)	$3,7 \times 10^{-4} \text{ s}$
0,01	Άργιλος (clay)	$3,7 \times 10^{-6} \text{ s}$
0,001	Βακτήρια (bacteria)	$3,7 \times 10^{-8} \text{ s}$
0,0001	Κολλοειδή (colloids)	$3,7 \times 10^{-10} \text{ s}$
0,00001	Κολλοειδή (colloids)	$3,7 \times 10^{-12} \text{ s}$

Δεξαμενή καθίζησης διακεκριμένων σωματιδίων

Στο σχήμα δεξιά φαίνεται μια ορθογώνια δεξαμενή καθίζησης με μήκος L , πλάτος W , και βάθος H . Ο συνολικός όγκος της δεξαμενής, V , είναι:

$$V = L \cdot W \cdot H$$

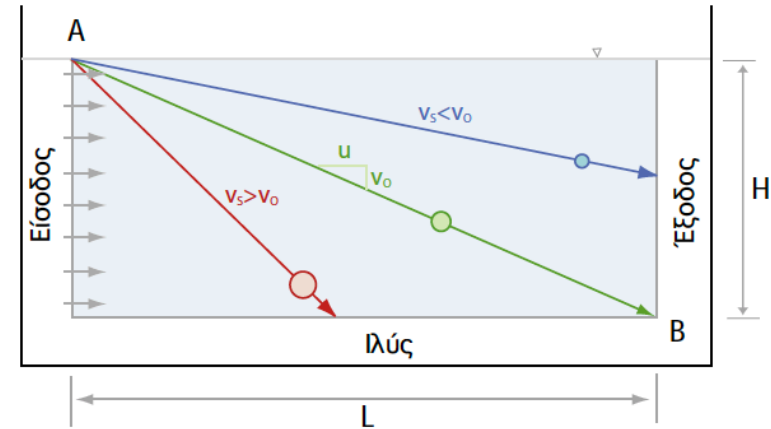
Η ταχύτητα ενός στερεού σωματιδίου που καθιζάνει είναι v_s . Η κρίσιμη ταχύτητα (επιφανειακή ταχύτητα υπερχείλισης ή οριακή ταχύτητα) είναι αυτή η οποία αντιστοιχεί στο στερεό που εισέρχεται στο σημείο A και καθιζάνει στο ακραίο σημείο της ζώνης ιλύος B.

Γίνονται οι εξής παραδοχές:

- (α) η ταχύτητα του νερού, u , στη δεξαμενή θεωρείται ομοιόμορφη και οριζόντια σε όλη τη ζώνη καθίζησης,
- (β) επικρατούν συνθήκες μόνιμης κατάστασης,
- (γ) η ογκομετρική παροχή στη δεξαμενή είναι:

$$Q = u \cdot W \cdot H, \quad \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$$

- (δ) η κατανομή των στερεών στην είσοδο της δεξαμενής είναι ομοιόμορφη,
- (ε) τα στερεά που δεν φτάνουν τον πυθμένα της δεξαμενής παρασύρονται στη ζώνη εξόδου.



Ιδανική ορθογώνια δεξαμενή καθίζησης.

Η κρίσιμη ή οριακή ταχύτητα (ταχύτητα υπερχείλισης) δίνεται από τη σχέση:

$$\left. \begin{aligned} v_o &= \frac{Q}{A_s} \\ A_s &= WL \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_o = \frac{Q}{WL}$$

όπου το $A_s = V/H$ είναι η επιφάνεια (επιφανειακό εμβαδόν) της δεξαμενής.

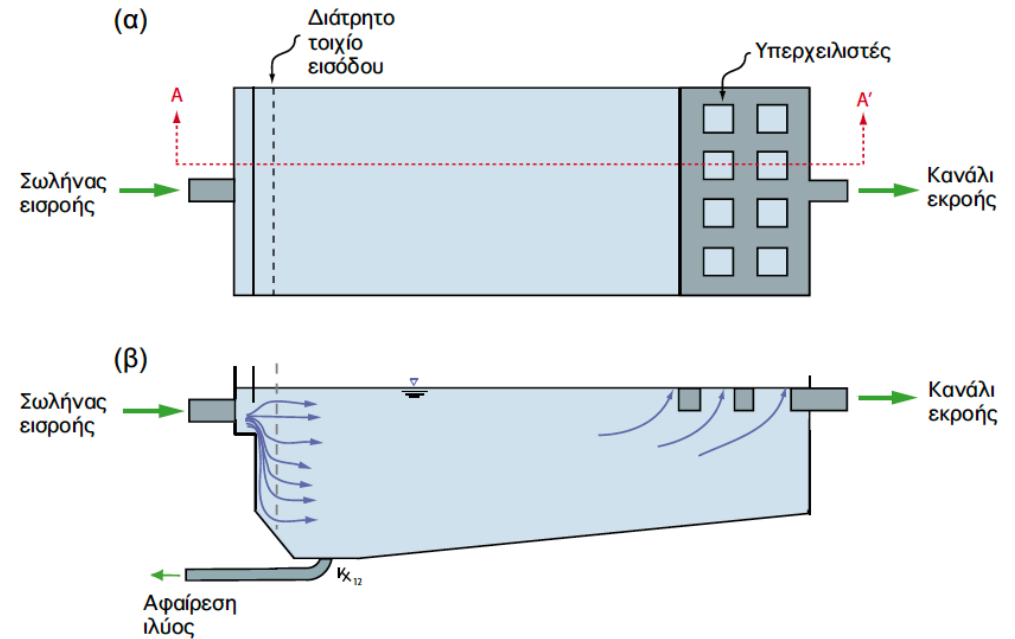
Μελετώντας το παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι τα στερεά με $v_s \geq v_o$ αφαιρούνται κατά 100% και τα στερεά με $v_s < v_o$ αφαιρούνται κατά ποσοστό $(v_s/v_o)100\%$.

Τα **στερεά εισέρχονται** στη δεξαμενή **από διαφορετικά σημεία** και όχι όλα από την κορυφή. Δηλαδή ένα μικρό σωματίδιο με $v_s < v_o$ είναι δυνατόν να φτάσει τον πυθμένα της δεξαμενής και να αφαιρεθεί από το νερό εάν εισέλθει την είσοδο της δεξαμενής σε σχετικά χαμηλό ύψος ($< H$).

Ορίζουμε ένα **δείκτη αποδοτικότητας αφαίρεσης**, η_s (removal efficiency), διακεκριμένων σωματιδίων:

$$\eta_s = \frac{v_s}{v_o} \quad (v_s \leq v_o)$$

- Οι ορθογώνιες δεξαμενές καθίζησης είναι συνήθως **μακρόστενες**.
- Όσο μεγαλύτερος είναι ο **λόγος του μήκους διά του πλάτους** της δεξαμενής, τόσο πιο αποτελεσματικά αποφεύγονται ανεπιθύμητα βραχυκυκλώματα.
- Συνήθως οι ορθογώνιες δεξαμενές καθίζησης έχουν τιμές του λόγου μήκος/πλάτος μεταξύ **3/1 με 7/1**.
- Ο **πυθμένας** της ορθογώνιας δεξαμενής καθίζησης **έχει κατάλληλη κλίση** για εύκολη αφαίρεση της ιλύος.
- Η **ιλύς αφαιρείται από τον πυθμένα** της δεξαμενής στην πλευρά εισροής του νερού.
- Στη ζώνη εισόδου ένα **διάτρητο τοίχιο** βοηθάει στην ομοιόμορφη κατανομή της παροχής του νερού.
- Η **εκροή** γίνεται από κατάλληλους **υπερχειλιστές**.



Αντιπροσωπευτική ορθογώνια δεξαμενή καθίζησης: (α) κάτωψη, και (β) πλάγια όψη κατά μήκος της τομής AA'.

Καθίζηση σε κυλινδρική δεξαμενή

Η ροή του νερού σε μία κυλινδρική δεξαμενή καθίζησης είναι από το κέντρο προς την περιφέρεια. Η **οριζόντια ταχύτητα** του νερού σε ένα σημείο μέσα στην δεξαμενή δίνεται από την εξίσωση:

$$\left. \begin{array}{l} u(r) = \frac{Q}{A_r} \\ A_r = 2\pi r H_o \end{array} \right\} \Rightarrow u(r) = \frac{Q}{2\pi r H_o}$$

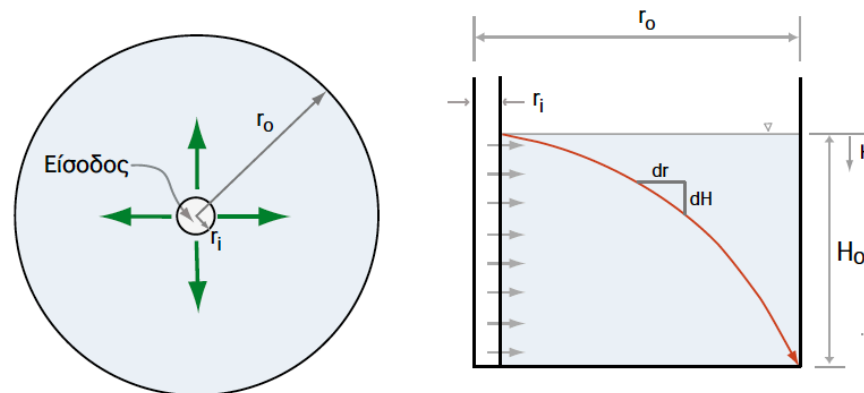
όπου r είναι η οριζόντια **κυλινδρική συντεταγμένη**, A_r η κάθετος **κυλινδρική επιφάνεια** με ακτίνα r μέσα στην κυλινδρική δεξαμενή, και H_o το **βάθος** της κυλινδρικής δεξαμενής.

Η μεταβολή ύψους ενός σωματιδίου με την οριζόντια απόσταση από το κέντρο της δεξαμενής εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dr} &= \frac{v_s}{u(r)} = \frac{v_s}{Q/2\pi r H_o} \\ \Rightarrow \int_0^H dH &= \frac{2\pi H_o v_s}{Q} \int_{r_i}^r r dr \\ \Rightarrow H &= \frac{\pi H_o v_s}{Q} (r^2 - r_i^2) \end{aligned}$$

Για την οριακή συνθήκη όπου $H=H_o$, $v_s=v_o$, και $r=r_o$, η οριακή ταχύτητα (**ταχύτητα υπερχειλίσης**) δίνεται από την εξίσωση:

$$v_o = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi r_o^2}$$



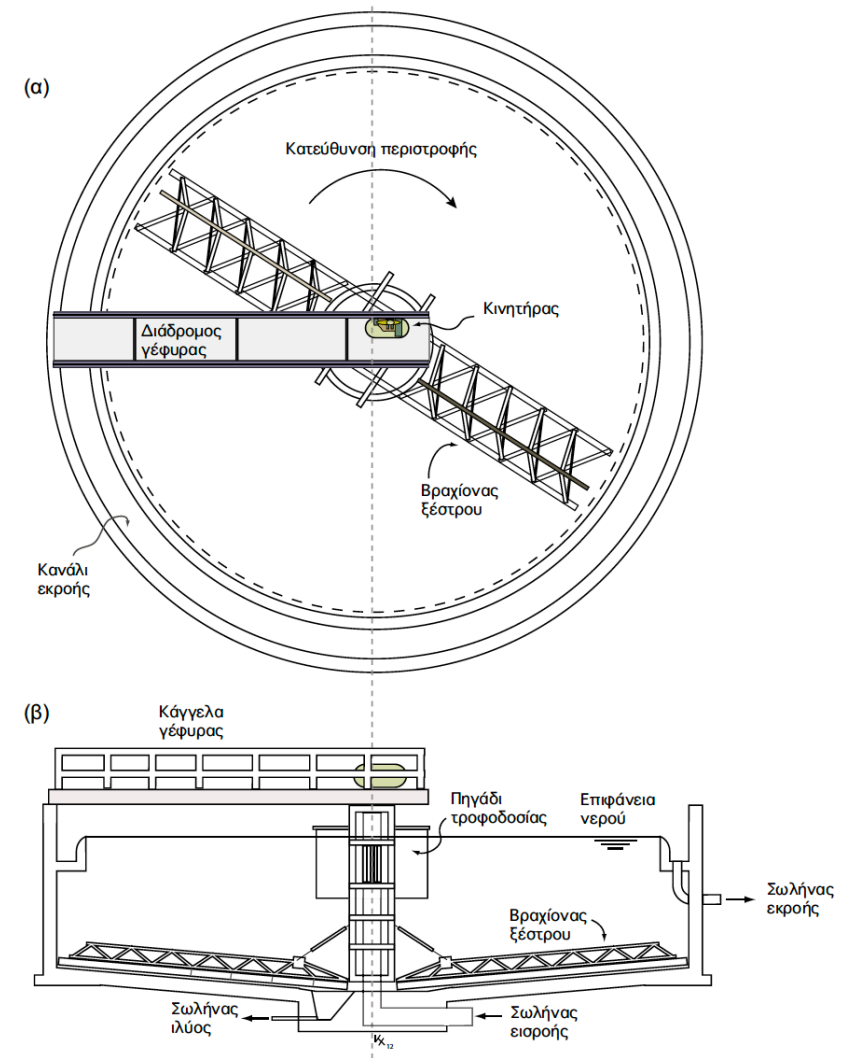
(α)

(β)

(α) Κάτοψη, και (β) μισή κατά μήκος τομή ιδανικής κυλινδρικής δεξαμενής καθίζησης με ακτίνα r_o και βάθος H_o .

Οι κυλινδρικές δεξαμενές καθίζησης επιλέγονται συνήθως σε τυπικές εγκαταστάσεις επεξεργασίας νερού και λυμάτων επειδή έχουν υψηλές αποδόσεις απομάκρυνσης αιωρούμενων σωματιδίων.

- Η **εισροή του νερού** γίνεται στο κέντρο της δεξαμενής μέσα από την κεντρική δοκό στήριξης των βραχιόνων του ξέστρου.
- Η **πορεία του νερού** μέσα στη δεξαμενή είναι **ακτινική** από το κέντρο προς την περίμετρο.
- Η **εκροή** του επεξεργασμένου νερού γίνεται από **κανάλι υπερχείλισης** το οποίο βρίσκεται στην περιφέρεια της δεξαμενής.
- Ο **πυθμένας** της κυλινδρικής δεξαμενής καθίζησης έχει κατάλληλη **κλίση προς το κέντρο**, ώστε να αφαιρείται εύκολα η ιλύς.
- Για την καλύτερη συλλογή της ιλύος υπάρχει **περιστρεφόμενο ξέστρο** με μηχανική κίνηση για τη σάρωση του πυθμένα της κυλινδρικής δεξαμενής.



Απεικόνιση αντιπροσωπευτικής κυλινδρικής δεξαμενής καθίζησης: (α) κάτοψη, και (β) πλάγια τομή.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί το ελάχιστο μήκος L , μιας ορθογώνιας δεξαμενής καθίζησης με βάθος $H=3$ m και πλάτος $W=5,5$ m στην οποία αιωρούμενα στο νερό σφαιρικά σωματίδια με διάμετρο $d_p=35$ μm και πυκνότητα $\rho_p=2600$ kg/m^3 αφαιρούνται σε ποσοστό 100%. Θεωρείστε ότι το δυναμικό ιξώδες του νερού είναι $\mu_w = 10^{-3}$ $\text{kg/m}\cdot\text{s}$, η πυκνότητά του νερού $\rho_w=998$ kg/m^3 και η ογκομετρική παροχή νερού είναι $Q=0,1$ m^3/s . Η οριζόντια ταχύτητα του νερού μέσα στη δεξαμενή είναι ομοιόμορφη και παράλληλη με το πυθμένα της δεξαμενής. Χρησιμοποιώντας το ελάχιστο μήκος L που βρέθηκε για την παραπάνω περίπτωση, να κατασκευαστεί ένα διάγραμμα που να περιγράφει το ποσοστό αφαίρεσης ή αντίστοιχα το δείκτη αποδοτικότητας καθίζησης ($\eta_s=v_s/v_o$) σφαιρικών σωματιδίων στη δεξαμενή καθίζησης συναρτήσει του μεγέθους των σωματιδίων για το εύρος διαμέτρου μεταξύ $d_p=1$ μm και 40 μm .

Λύση:

Θεωρούμε ότι σχέση του Stokes ισχύει ($Re < 1$) και υπολογίζουμε την τιμή της ταχύτητας καθίζησης:

$$v_s = \frac{g}{18 \mu_w} (\rho_p - \rho_w) d_p^2$$

$$\Rightarrow v_s = \frac{9,81 \text{ m/s}^2}{18 (10^{-3} \text{ kg/m}\cdot\text{s})} (2600 - 998) \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} (35 \times 10^{-6} \text{ m})^2$$

$$\Rightarrow v_s = 0,001 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Εξετάζουμε τώρα εάν είναι σωστή η αρχική παραδοχή ότι το $Re < 1$.

$$Re = \frac{d_p v_s}{\mu_w / \rho_w} \left. \begin{array}{l} \mu_w = \frac{10^{-3} \text{ kg/m}\cdot\text{s}}{998 \text{ kg/m}^3} = 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \end{array} \right\} \Rightarrow Re = \frac{(35 \times 10^{-6} \text{ m})(0,001 \text{ m/s})}{10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}}$$

$$\Rightarrow Re = 0,035 < 1$$

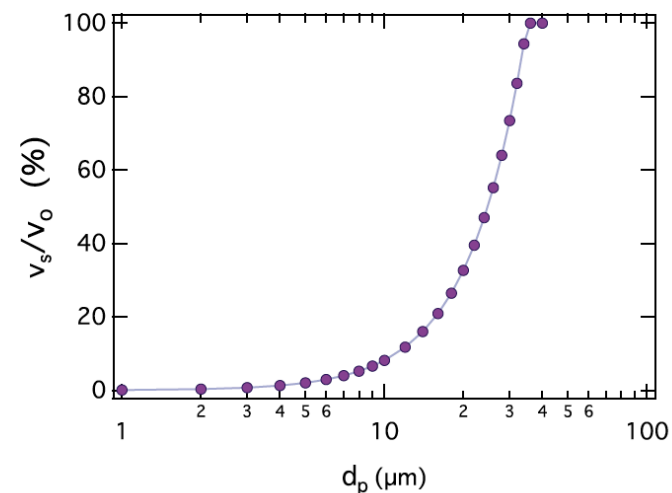
Ο αδιάστατος αριθμός Re είναι μικρότερος της μονάδας, άρα η παραδοχή είναι σωστή. Το μήκος της δεξαμενής βρίσκεται από τον ορισμό της οριακής ταχύτητας:

$$v_o = \frac{Q}{A_s} = \frac{Q}{WL} = 0,001 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow 0,001 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{0,1 \text{ m}^3 / \text{s}}{(5,5 \text{ m}) L}$$

$$\Rightarrow L = 18,2 \text{ m} \quad \bullet$$

Χρησιμοποιώντας το μήκος $L=18,2$ m υπολογίζεται το ποσοστό αφαίρεσης σφαιρικών σωματιδίων στη δεξαμενή για ένα εύρος μεγέθους μεταξύ $d_p=1$ μm και 40 μm . Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται γραφικά στο Σχήμα Π7.2 και δείχνουν ότι το ποσοστό αφαίρεσης αυξάνει εκθετικά για σωματίδια με $d_p > 10$ μm . Για σωματίδια με $d_p \geq 35$ μm το ποσοστό αφαίρεσης είναι 100 %.



Σχήμα Π7.2: Διάγραμμα ποσοστού αφαίρεσης σφαιρικών σωματιδίων στη δεξαμενή καθίζησης συναρτήσει του μεγέθους των σωματιδίων.

Παράδειγμα 2

Νερό εισέρχεται σε δεξαμενή καθίζησης με βάθος $H=4$ m, μήκος $L=30$ m και πλάτος $W=10$ m. Το νερό περιέχει κόκκους άμμου με διάμετρο $12 \mu\text{m}$ και πυκνότητα 2600 kg/m^3 στους 20°C . Η ογκομετρική παροχή του νερού στη δεξαμενή είναι $Q=2 \times 10^4 \text{ m}^3/\text{d}$. Να υπολογιστεί ο δείκτης αποδοτικότητας καθίζησης.

Λύση:

Θεωρούμε ότι σχέση του Stokes ισχύει ($Re < 1$) και υπολογίζουμε την τιμή της ταχύτητας καθίζησης:

$$v_s = \frac{g}{18 \mu_w} (\rho_p - \rho_w) d_p^2$$
$$\Rightarrow v_s = \frac{9,81 \text{ m/s}^2}{18 (10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s})} (2600 - 998) \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} (12 \times 10^{-6} \text{ m})^2$$
$$\Rightarrow v_s = 1,26 \times 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Εξετάζουμε τώρα εάν είναι σωστή η αρχική παραδοχή ότι το $Re < 1$.

$$Re = \frac{d_p v_s}{\mu_w / \rho_w} = \frac{(12 \times 10^{-6} \text{ m})(1,26 \times 10^{-4} \text{ m/s})}{10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}} = 0,0015 < 1$$

Ο αδιάστατος αριθμός Re είναι μικρότερος της μονάδας, άρα η παραδοχή είναι σωστή. Η οριακή ταχύτητα υπολογίζεται ως εξής:

$$v_o = \frac{Q}{A_s} = \frac{Q}{WL} = \frac{(2 \times 10^4 \text{ m}^3 / \text{d})(\text{d}/86400 \text{ s})}{(10 \text{ m})(30 \text{ m})} = 7,72 \times 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ο δείκτης αποδοτικότητας καθίζησης βρίσκεται από το λόγο:

$$\eta_s = \frac{v_s}{v_o} = \frac{1,26 \times 10^{-4} \text{ m/s}}{7,72 \times 10^{-4} \text{ m/s}} = 0,16 \quad \bullet$$

Επομένως 16% των κόκκων άμμου αφαιρούνται στη ζώνη ιλύος στον πυθμένα της δεξαμενής.

Παράδειγμα 3

Η δεξαμενή πρωτοβάθμιας καθίζησης σε μια μονάδα επεξεργασίας αστικών λυμάτων είναι κυκλική και δέχεται λύματα με παροχή 6000 m³/d. Να βρεθεί το μήκος του κυκλικού υπερχειλιστή εάν η κρίσιμη ή επιφανειακή ταχύτητα υπερχειλίσης είναι v_o=40 m/d.

Λύση:

Το εμβαδόν (A_s) της κυκλικής δεξαμενής πρωτοβάθμιας καθίζησης είναι:

$$A_s = \frac{Q}{v_o} = \frac{6000 \text{ m}^3 / \text{d}}{40 \text{ m/d}} = 150 \text{ m}^2$$

Επομένως, η διάμετρος της δεξαμενής είναι:

$$A_s = \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow d = \left(\frac{4A_s}{\pi} \right)^{1/2} = \left[\frac{4(150 \text{ m}^2)}{\pi} \right]^{1/2} \Rightarrow d = 13,8 \text{ m}$$

Το μήκος του υπερχειλιστή, L, βρίσκεται ως εξής:

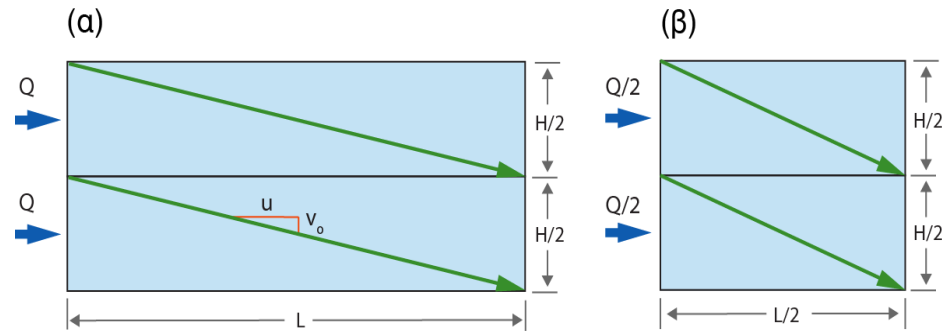
$$L = \pi d \Rightarrow L = \pi(13,8 \text{ m}) \Rightarrow L = 43,4 \text{ m} \quad \bullet$$

Ταχύρρυθμη καθίζηση

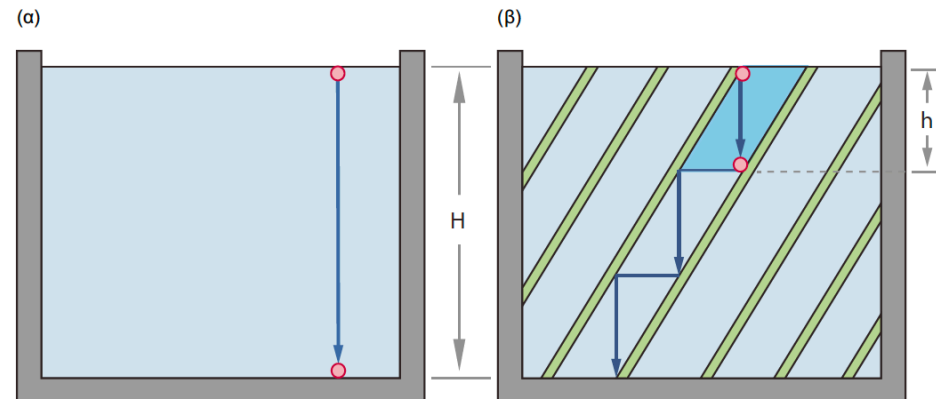
Ο ρυθμός καθίζησης μπορεί να επιταχυνθεί μικραίνοντας το βάθος της δεξαμενής.

Οι πολλαπλοί εσωτερικοί πυθμένες στις δεξαμενές καθίζησης πολλαπλασιάζουν την επιφάνεια πάνω στην οποία επιτυγχάνεται η καθίζηση και έχουν ως αποτέλεσμα είτε την αύξηση του συνολικού ρυθμού καθίζησης ή τη μείωση του όγκου της δεξαμενής. Βέβαια, θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι δεξαμενές καθίζησης με πολλαπλούς πυθμένες παρουσιάζουν δυσκολίες στον καθαρισμό της ιλύος.

Το πρόβλημα μεταφοράς της ιλύος λύνεται με δεξαμενές καθίζησης όπου οι πολλαπλοί πυθμένες είναι **κεκλιμένες παράλληλες** πλάκες. Σε μια δεξαμενή καθίζησης με κεκλιμένες παράλληλες πλάκες, ένα αιωρούμενο σωματίδιο καθιζάνει διανύοντας πολύ μικρότερη απόσταση από ότι σε μια δεξαμενή καθίζησης με συμβατική σχεδίαση ($H > h$).



Δεξαμενές καθίζησης με πολλαπλούς πυθμένες όπου: (α) επιταχύνεται ο ρυθμός καθίζησης και (β) μικραίνει ο όγκος της δεξαμενής. Η ταχύτητα υπερχείλισης v_o είναι ακριβώς ίδια και στις δύο περιπτώσεις, αλλά η παροχή νερού είναι διπλάσια στην πρώτη περίπτωση.

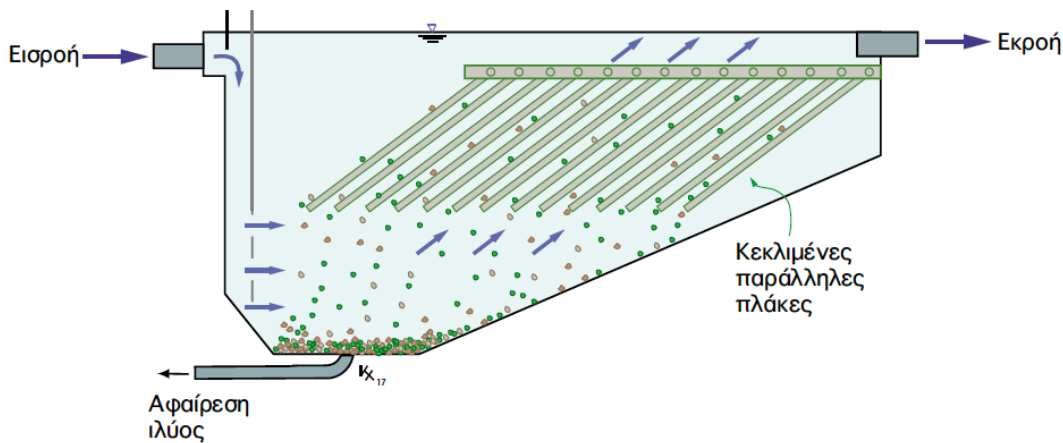


Σύγκριση καθίζησης σε δεξαμενή με: (α) συμβατική σχεδίαση και (β) κεκλιμένες παράλληλες πλάκες.

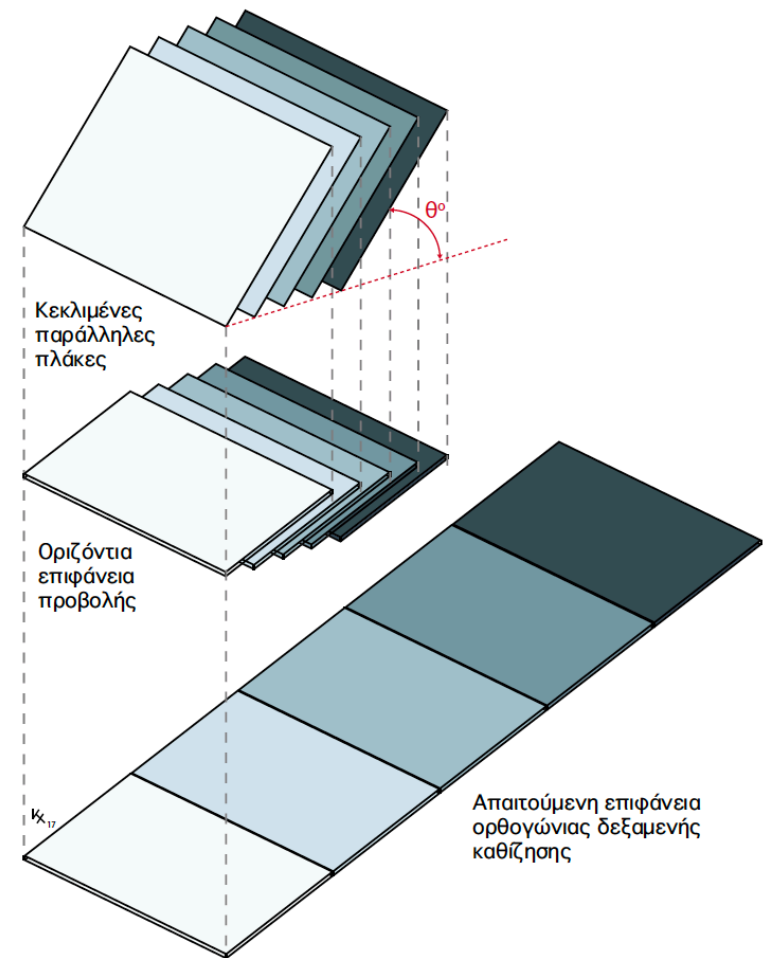
Καθίζηση σε δεξαμενή με κεκλιμένες πλάκες

Οι δεξαμενές καθίζησης με κεκλιμένες παράλληλες πλάκες περιέχουν στοιβάδες μετατοπισμένων παράλληλων πλακών ή δέσμες μικρών πλαστικών σωλήνων, με σκοπό να επιταχύνουν τη διεργασία καθίζησης.

Οι δεξαμενές αυτές βασίζονται στη θεωρία ότι η διεργασία καθίζησης εξαρτάται από τη διαθέσιμη επιφάνεια καθίζησης και όχι από το χρόνο παραμονής του νερού ή των λυμάτων στη δεξαμενή.

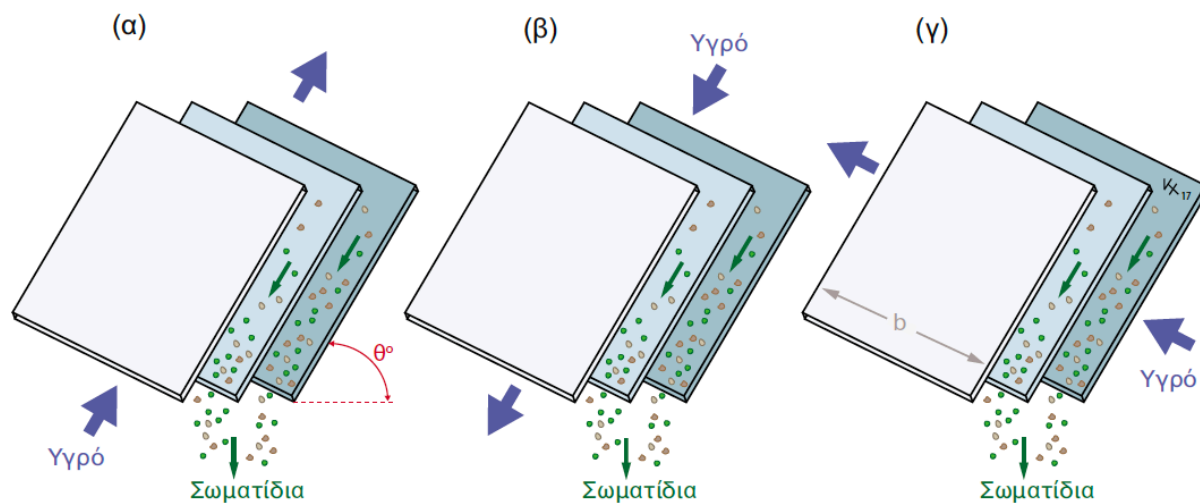


Διάταξη ορθογώνιας δεξαμενής καθίζησης με κεκλιμένες παράλληλες πλάκες.



Σύγκριση επιφάνειας προβολής κεκλιμένων παράλληλων πλακών που σχηματίζουν με το οριζόντιο επίπεδο γωνία θ , με την απαιτούμενη επιφάνεια του πυθμένα σε αντίστοιχη ορθογώνια δεξαμενή καθίζησης με συμβατική σχεδίαση.

- Το **διάκενο** μεταξύ των **πλακών** είναι από **5 έως 15 cm** και το **κεκλιμένο** τους μήκος από **1 έως 2 m**.
- Η **βέλτιστη θεωρητική απόδοση** μιας δεξαμενής καθίζησης με **κεκλιμένες παράλληλες πλάκες** επιτυγχάνεται μόνον όταν η **παροχή** του υγρού στη δεξαμενή **κατανέμεται ισομερώς** μεταξύ των πλακών και τα **στερεά** που καθιζάνουν **συλλέγονται** έγκαιρα ώστε να **αποτρέπεται** η επαναιώρησή τους.
- Δύο από τα **κυριότερα προβλήματα** των δεξαμενών καθίζησης με **κεκλιμένες πλάκες** είναι η **βιολογική ανάπτυξη** (biological growth) και η **παραγωγή οσμών**.



Εναλλακτικοί τρόποι ροής του υγρού σε σχέση με την κατεύθυνση καθίζησης των αιωρούμενων σωματιδίων σε δεξαμενές καθίζησης με **κεκλιμένες παράλληλες πλάκες**: (α) **κατ' αντιρροή**, (β) **στην ίδια κατεύθυνση ή ομορροή** και (γ) **σταυρωτής ή κάθετης ροής**.

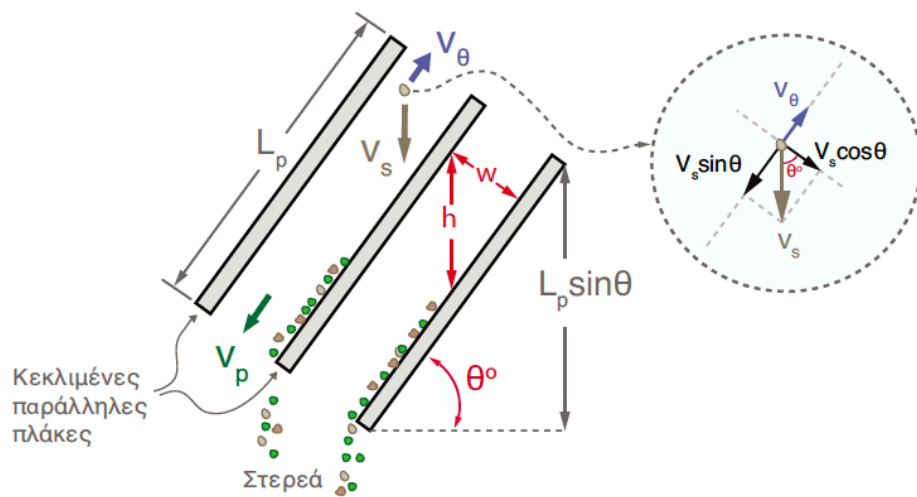
Τα **προβλήματα** αυτά αντιμετωπίζονται με **περιοδικό καθαρισμό** των συσσωρευμένων στερεών από τις **κεκλιμένες πλάκες**, συνήθως με **νερό υψηλής πίεσης**.

Για **δυνατότητα αυτοκαθαρισμού** οι **κεκλιμένες πλάκες** συνήθως **σχηματίζουν** με το **οριζόντιο επίπεδο** γωνία $45 < \theta < 60^\circ$.

- Εάν $\theta > 60^\circ$, η **απόδοση** μειώνεται.
- Εάν $\theta < 45^\circ$, τα **αιωρούμενα στερεά** τείνουν να **συσσωρεύονται** επάνω στις **πλάκες** (ή τους **σωλήνες**).

Οι **δεξαμενές καθίζησης** με **κεκλιμένες παράλληλες πλάκες** **κατασκευάζονται** με **τρεις εναλλακτικούς τρόπους** ώστε η **κατεύθυνση ροής** του υγρού σε σχέση με την **κατεύθυνση καθίζησης** των **αιωρούμενων σωματιδίων** να είναι:

- (1) **κατ' αντιρροή** (countercurrent settling),
- (2) **στην ίδια κατεύθυνση ή ομορροή** (concurrent settling),
- (3) **σταυρωτής ή κάθετης ροής** (cross-flow settling).



Διάγραμμα καθίζησης στερεών μεταξύ κεκλιμένων παράλληλων πλακών με μήκος L_p , που σχηματίζουν με το οριζόντιο επίπεδο γωνία θ . Εδώ, v_θ είναι η ταχύτητα του υγρού μεταξύ των παράλληλων πλακών, v_s είναι η ταχύτητα καθίζησης των αιωρούμενων στερεών και v_p είναι η ταχύτητα καθίζησης των αιωρούμενων στερεών στην κατεύθυνση παράλληλη των κεκλιμένων πλακών.

Για την περίπτωση καθίζησης κατ' αντιρροή, το υγρό με τα αιωρούμενα στερεά διοχετεύεται προς τα πάνω, μέσω των πλακών και εξέρχεται από το πάνω μέρος της δεξαμενής. Τα στερεά που καθιζάνουν εντός των πλακών, λόγω του βάρους τους, κινούνται προς τα κάτω και έξω από τις παράλληλες κεκλιμένες πλάκες.

Ο χρόνος που απαιτείται για ένα αιωρούμενο σωματίδιο να καθιζάνει την κατακόρυφη απόσταση, h [L], μεταξύ δύο παράλληλων κεκλιμένων πλακών δίνεται από τη σχέση:

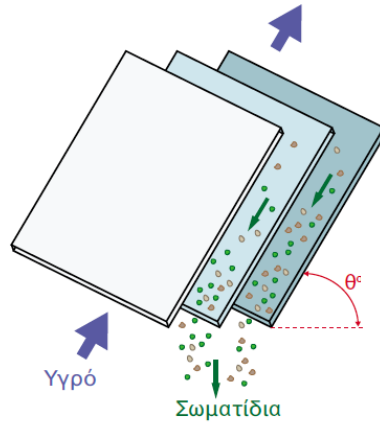
$$t_s = \frac{w}{v_s \cos \theta}$$

όπου w [L] είναι η κάθετη απόσταση μεταξύ των κεκλιμένων παράλληλων πλακών, v_s [L/t] είναι η ταχύτητα καθίζησης και θ [°] είναι η γωνία των πλακών με το οριζόντιο επίπεδο.

Η ταχύτητα του υγρού μεταξύ των $N+1$ παράλληλων πλακών είναι:

$$v_\theta = \frac{Q}{Nwb}$$

όπου Q [L³/t] είναι η ογκομετρική παροχή του υγρού στη δεξαμενή καθίζησης, N [-] είναι ο αριθμός των καναλιών που δημιουργούνται από τις $N+1$ παράλληλες πλάκες και b [L] είναι το πλάτος κάθε πλάκας.



Επίσης, από το σχήμα αριστερά προκύπτει ότι η **ταχύτητα των στερεών, v_p [L/t]**, στην κατεύθυνση παράλληλη των κεκλιμένων πλακών είναι:

$$v_p = \frac{L_p}{t_s} = v_\theta - v_s \sin \theta$$

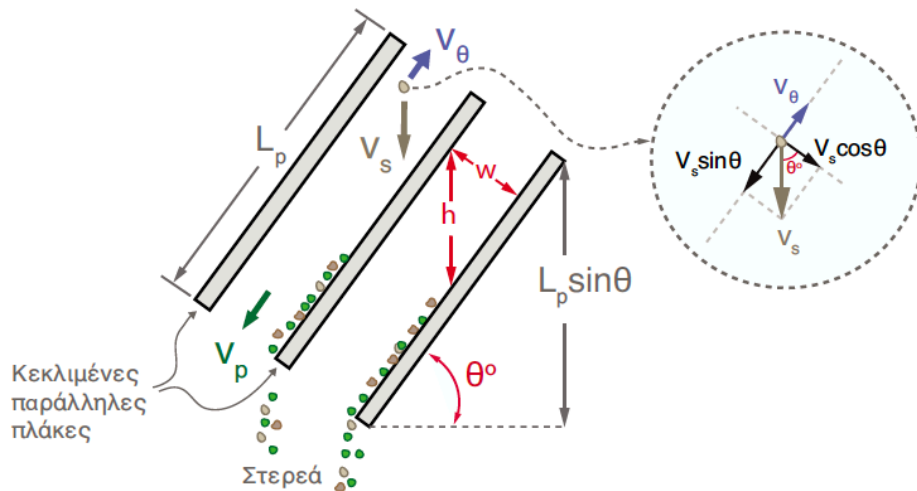
όπου L_p [L] είναι το **μήκος των κεκλιμένων πλακών**. Επομένως, με βάση το **χρόνο καθίζησης t_s** , το απαιτούμενο μήκος των πλακών L_p δίνεται από τη σχέση:

$$L_p = \frac{w v_p}{v_s \cos \theta} = \frac{w (v_\theta - v_s \sin \theta)}{v_s \cos \theta}$$

Αναδιάταξη της παραπάνω εξίσωσης δίνει την παρακάτω σχέση για την ταχύτητα καθίζησης

$$v_s \geq \frac{v_\theta w}{L_p \cos \theta + w \sin \theta}$$

Όλα τα **αιωρούμενα σωματίδια με ταχύτητα καθίζησης v_s** και μεγαλύτερη **αφαιρούνται** από την υγρή φάση σε ποσοστό **100%**.



Για την περίπτωση όπου η ροή του υγρού είναι στην ίδια κατεύθυνση με την καθίζηση των αιωρούμενων στερεών (ομορροή), το υγρό με τα αιωρούμενα στερεά διοχετεύεται στο πάνω μέρος της δεξαμενής, μέσω των πλακών (ή των σωλήνων). Τα στερεά που καθιζάνουν εντός των πλακών, λόγω του βάρους τους, κινούνται προς τα κάτω και έξω από τις παράλληλες κεκλιμένες πλάκες μαζί με το υγρό.

Ο χρόνος που απαιτείται για ένα αιωρούμενο σωματίδιο να καθιζάνει την κατακόρυφη απόσταση, w [L], μεταξύ δύο παράλληλων κεκλιμένων πλακών είναι ίδιος με την περίπτωση καθίζησης κατ' αντιστροφή:

$$t_s = \frac{w}{v_s \cos \theta}$$

Όμως, το μήκος L_p και η ταχύτητα καθίζησης v_s εξαρτώνται από την καθοδική πορεία του υγρού και δίνονται από τις σχέσεις:

$$L_p = \frac{w(v_\theta + v_s \sin \theta)}{v_s \cos \theta}$$

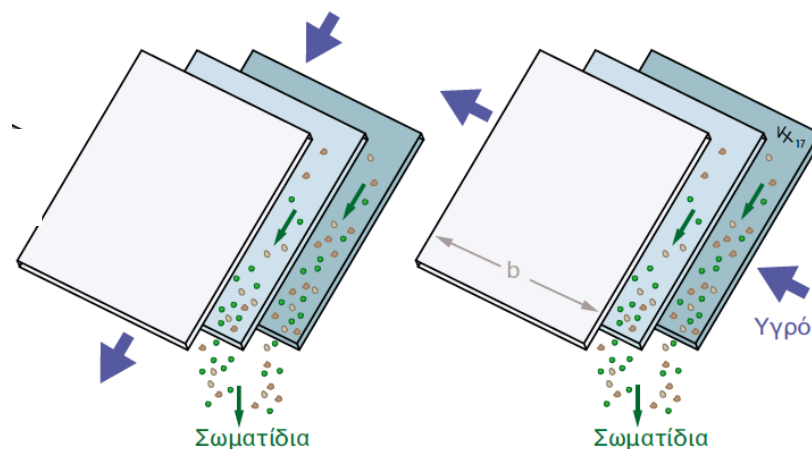
$$v_s \geq \frac{v_\theta w}{L_p \cos \theta - w \sin \theta}$$

Για την περίπτωση όπου η καθίζηση των αιωρούμενων στερεών είναι **σταυρωτή ή κάθετη της ροής του υγρού**, η ροή του υγρού είναι οριζόντια και δεν αλληλεπιδρά με την κατακόρυφη ταχύτητα καθίζησης των αιωρούμενων στερεών.

Επομένως, το μήκος L_p και η ταχύτητα καθίζησης v_s δεν εξαρτώνται από την πορεία του υγρού και δίνονται από τις σχέσεις:

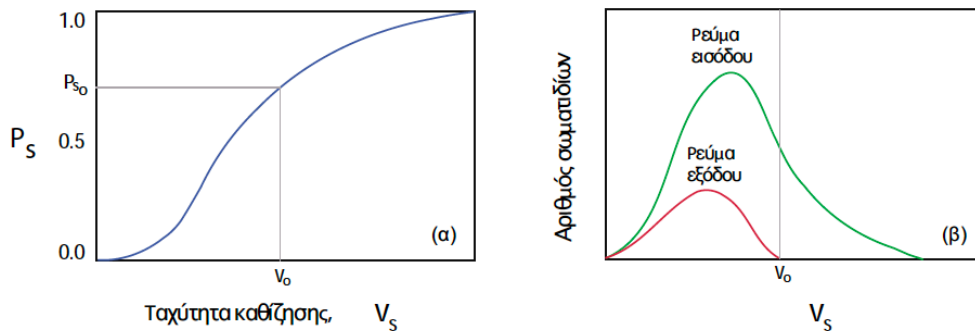
$$L_p = \frac{v_\theta w}{v_s \cos \theta}$$

$$v_s \geq \frac{v_\theta w}{L_p \cos \theta}$$



Εκτίμηση ποσοστού αφαίρεσης στερεών

Για αιώρημα στερεών με κατανομή μεγέθους, η σχέση του κλάσματος των αιωρούμενων σωματιδίων με ταχύτητα καθίζησης v_s μικρότερη από μια δεδομένη ταχύτητα καθίζησης v (δηλαδή το κλάσμα των στερεών που αφαιρούνται λόγω καθίζησης, P_s), σε συνάρτηση της ταχύτητας καθίζησης v_s παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.



(α) Κλάσμα αιωρούμενων στερεών με ταχύτητα καθίζησης μικρότερη ή ίση με v_s τα οποία αφαιρούνται ως συνάρτηση της ταχύτητας καθίζησης, και (β) τυπική κατανομή των αιωρούμενων σωματιδίων στα ρεύματα εισόδου και εξόδου δεξαμενής καθίζησης.

Το ποσοστό των σωματιδίων (όλα τα κλάσματα μεγέθους) με $v_s \geq v_0$ που απομακρύνονται από την δεξαμενή είναι $1 - P_{s0}$.

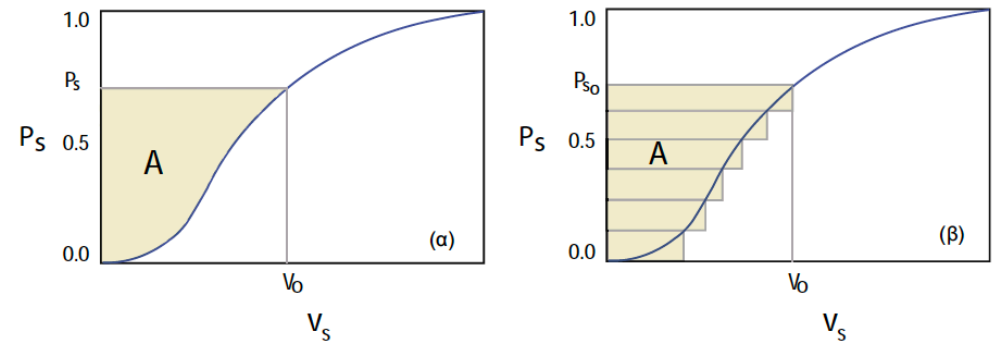
Τα στερεά με $v_s < v_0$ απομακρύνονται κατά ποσοστό $(v_s/v_0)100$ για κάθε κλάσμα μεγέθους, και κατά

$$\int_0^{P_{s0}} (v_s / v_0) dP_s$$

για όλα τα κλάσματα μεγέθους. Το συνολικό ποσοστό των αιωρούμενων στερεών (με $v_s < v_0$ και $v_s \geq v_0$) που αφαιρούνται, P_s , δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$P_s = (1 - P_{s0}) + \int_0^{P_{s0}} \frac{v_s}{v_0} dP_s$$

Ο δεύτερος όρος (Α) στο δεξί σκέλος της παραπάνω εξίσωσης μπορεί να υπολογιστεί με γραφικές μεθόδους.



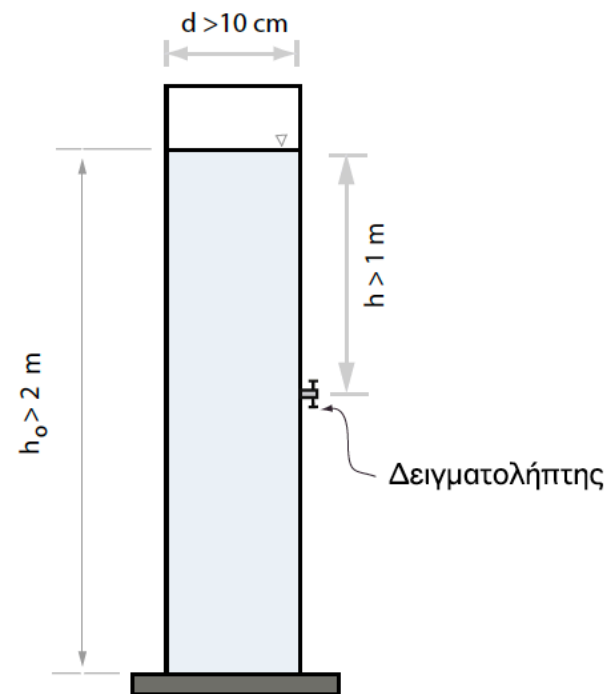
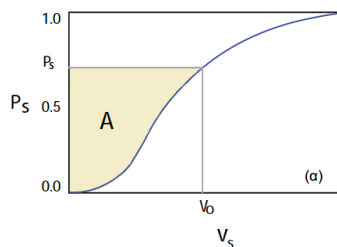
(α) Ακριβές, και (β) προσεγγιστικό εμβαδόν Α που αντιπροσωπεύει το ποσοστό P_{s0} των σωματιδίων με ταχύτητα καθίζησης μικρότερη ή ίση της v_0 .

Τα **απαιτούμενα δεδομένα** για το **γραφικό υπολογισμό** του ποσοστού των σωματιδίων που αφαιρούνται από τη δεξαμενή με ταχύτητα καθίζησης μικρότερη ή ίση της v_o (P_s) συλλέγονται από πειράματα σε στήλες καθίζησης.

Τυπικές στήλες καθίζησης έχουν ύψος τουλάχιστον 2 m και διάμετρο μεγαλύτερη των 10 cm.

Η **πειραματική διαδικασία** είναι απλή. Αρχικά ανακατεύουμε το αιώρημα στη στήλη ώστε το περιεχόμενο της να γίνει ομοιογενές. Στο χρόνο $t=0$ παίρνουμε ένα δείγμα από το δειγματολήπτη και προσδιορίζουμε τα χαρακτηριστικά του αιωρήματος (π.χ. συγκέντρωση στερεών). Κατόπιν παίρνουμε δείγματα σε διαφορετικούς χρόνους και επαναλαμβάνουμε τις μετρήσεις.

Κατασκευάζουμε ένα διάγραμμα από τις κανονικοποιημένες συγκεντρώσεις C/C_o συναρτήσει του $h/t=v_s$ (όπου h είναι η απόσταση του δειγματολήπτη από την ελεύθερη επιφάνεια).



Πειραματική στήλη για την μελέτη χαρακτηριστικών καθίζησης.

Παράδειγμα 4

Η αρχική συγκέντρωση αιωρούμενων στερεών είναι 100 mg/L. Μετά από μια ώρα καθίζησης η συγκέντρωση στο δειγματολήπτη, ο οποίος είναι 2 m από την ελεύθερη επιφάνεια, είναι 20 mg/L. Να βρεθεί το ποσοστό των στερεών με ταχύτητα $v_s \geq 2$ m/hr.

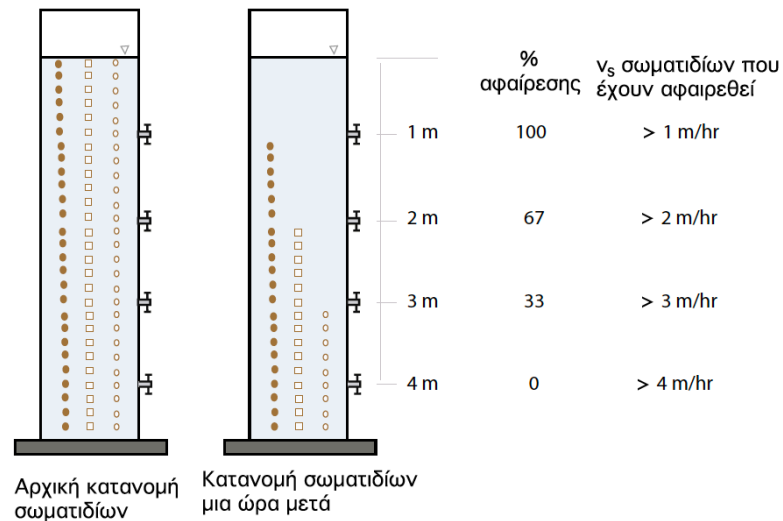
Λύση:

$$\left(\frac{100-20}{100} \right) 100 = 80\%$$

Δηλαδή, 80% των αιωρούμενων στερεών έχουν ταχύτητα καθίζησης $v_s \geq 2$ m/hr.

Παράδειγμα 5

Σε μια στήλη για την μελέτη χαρακτηριστικών καθίζησης υπάρχουν σωματίδια με τρία διαφορετικά μεγέθη σε ίσες συγκεντρώσεις. Τα σωματίδια με το σύμβολο '●' έχουν ταχύτητα καθίζησης $v_s > 1$ m/hr, τα '□' σωματίδια έχουν ταχύτητα καθίζησης $v_s > 2$ m/hr, και τα '○' σωματίδια έχουν ταχύτητα καθίζησης $v_s > 3$ m/hr. Η αρχική κατανομή των σωματιδίων, και η κατανομή τους μια ώρα μετά την έναρξη του πειράματος φαίνονται στο Σχήμα Π7.5. Ποια είναι τα συμπεράσματα από το πείραμα;



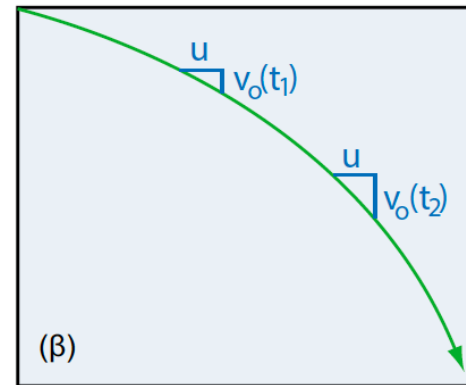
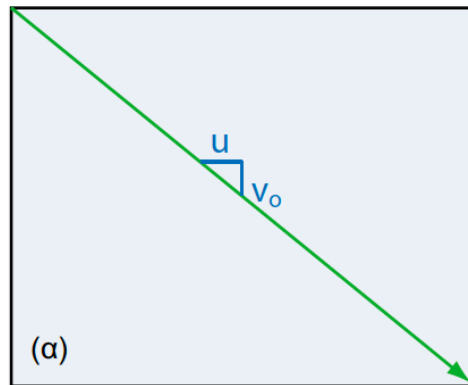
Σχήμα Π7.5: Αρχική κατανομή αιωρούμενων σωματιδίων, και κατανομή σωματιδίων μια ώρα αργότερα σε στήλη καθίζησης με τέσσερις δειγματολήπτες.

Λύση:

Με βάση το Σχήμα Π7.5, από το πείραμα αυτό συμπεραίνουμε ότι 33% από τα σωματίδια έχουν ταχύτητα καθίζησης v_s μεταξύ 1 και 2 m/hr, 33% από τα σωματίδια έχουν v_s μεταξύ 2 και 3 m/hr και 33% από τα σωματίδια έχουν v_s μεταξύ 3 και 4 m/hr.

Καθίζηση τύπου II - Συσσωμάτωση σωματιδίων

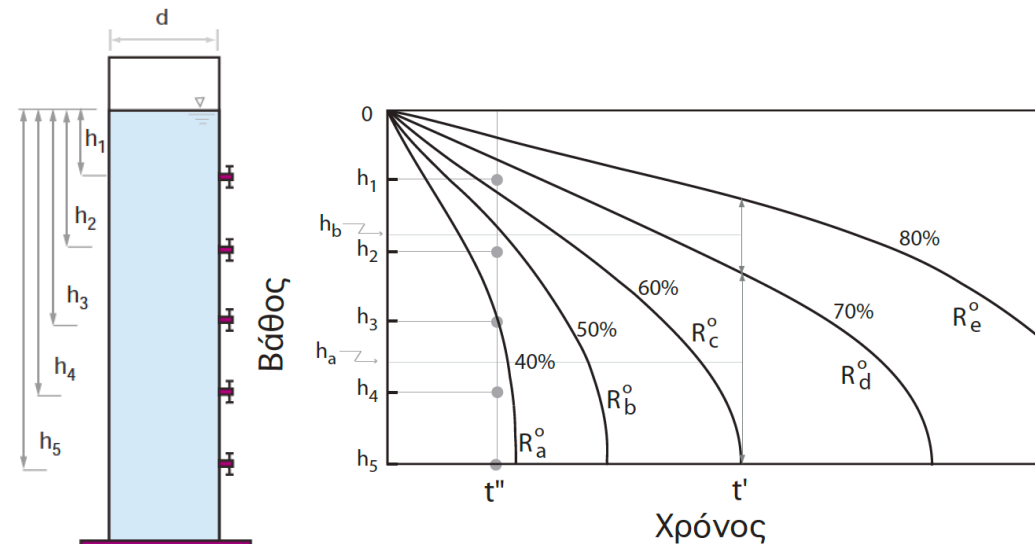
Κατά τη διάρκεια της καθίζησης αιωρούμενων σωματιδίων που συσσωματώνονται, η κατακόρυφη ταχύτητα τους αυξάνει με την πάροδο του χρόνου λόγω της συσσωμάτωσης των στερεών που μεγαλώνουν σε όγκο. Επομένως, η πορεία που ακολουθείται δεν είναι ευθύγραμμη, όπως στην περίπτωση των διακεκριμένων σωματιδίων, αλλά κυρτή.



Πορεία καθίζησης (α) διακεκριμένων και (β) συσσωματωμένων σωματιδίων (εδώ $t_1 < t_2$).

Μελέτη καθίζησης σωματιδίων που συσσωματώνονται

Χρησιμοποιούμε πειραματική στήλη με ύψος 2-4 m και διάμετρο 15-20 cm. Η στήλη πρέπει να έχει πολλαπλά στόμια δειγματοληψίας κατανεμημένα καθ' όλο το ύψος της. Παίρνουμε δείγματα από όλους τους δειγματολήπτες σε διάφορα χρονικά διαστήματα και υπολογίζουμε το ποσοστό των στερεών για κάθε ύψος και χρόνο δειγματοληψίας. Με τα δεδομένα αυτά δημιουργούμε τις ισοαφαιρετικές καμπύλες, όπως αυτές στο παρακάτω σχήμα. Η κάθε καμπύλη αντιπροσωπεύει ένα ποσοστό απομάκρυνσης ή αφαίρεσης των αιωρούμενων σωματιδίων (R^o , σε μονάδες %).



Στήλη καθίζησης με πολλαπλούς δειγματολήπτες και τυπικές ισοαφαιρετικές καμπύλες.

Η απομάκρυνση ή αφαίρεση των αιωρούμενων σωματιδίων υπολογίζεται εύκολα από τις ισοαφαιρετικές καμπύλες. Εάν θεωρήσουμε ότι μια δεξαμενή καθίζησης έχει επιφανειακή ταχύτητα υπερχειλίσης:

$$v_o = \frac{Q}{A_s} = \frac{h_5}{t'}$$

όπου h_5 είναι το βάθος του τελευταίου δειγματολήπτη στη στήλη καθίζησης και t' είναι ένας χρόνος παραμονής.

Από τις ισοαφαιρετικές καμπύλες παρατηρούμε ότι R_c^o (δηλαδή 60%) από τα σωματίδια έχουν $v_s \geq v_o$ και αφαιρούνται πλήρως. Τα υπόλοιπα στερεά τα οποία είναι μεταξύ των ισοαφαιρετικών καμπύλων R_c^o και R_d^o έχουν μέση ταχύτητα καθίζησης $v_s = h_a/t'$. Τα στερεά μεταξύ των ισοαφαιρετικών καμπύλων R_d^o και R_e^o έχουν μέση ταχύτητα καθίζησης $v_s = h_b/t'$. Μια προσεγγιστική εξίσωση για την ολική αφαίρεση των αιωρούμενων σωματιδίων είναι:

$$R^o = R_c^o + \frac{h_a}{t'v_o} (R_d^o - R_c^o) + \frac{h_b}{t'v_o} (R_e^o - R_d^o)$$

Η παραπάνω εξίσωση βελτιώνεται εάν προσθέσουμε κι άλλους όρους στο δεξί σκέλος με το να αυξήσουμε τον αριθμό των ισοαφαιρετικών καμπύλων.

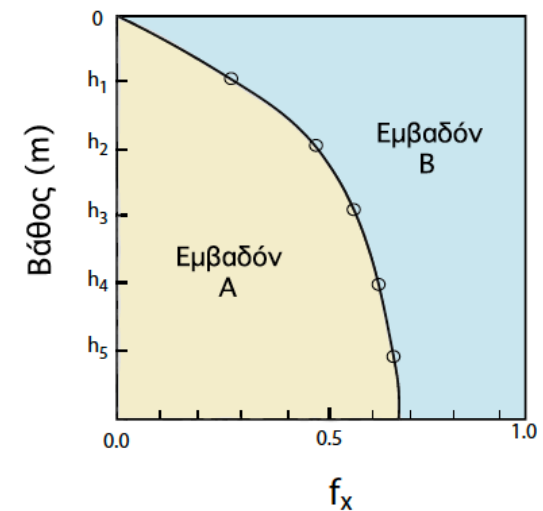
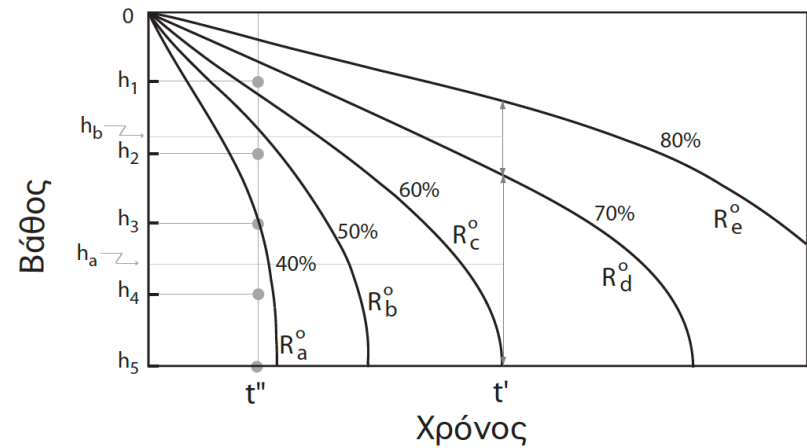
Εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού του R^o

Ορίζουμε f_x το ποσοστό των αιωρούμενων σωματιδίων που παραμένει σε ένα συγκεκριμένο σημείο δειγματοληψίας:

$$f_x = 1 - \left(\frac{\% \text{ αφαίρεσης}}{100} \right)$$

Από τις ισοαφαιρετικές καμπύλες για το χρόνο t'' μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα διάγραμμα με το βάθος δειγματοληψίας σε συνάρτηση του f_x . Το **εμβαδόν Α** είναι ανάλογο του ποσοστού των σωματιδίων που παραμένουν στη δεξαμενή καθίζησης. Το **εμβαδόν Β** είναι ανάλογο του ποσοστού των σωματιδίων που έχουν αφαιρεθεί από τη δεξαμενή καθίζησης. Επομένως, το ποσοστό ολικής αφαίρεσης των αιωρούμενων σωματιδίων δίνεται από την εξίσωση:

$$R^o = \left(\frac{B}{A+B} \right) 100$$



Παράδειγμα 6

Να υπολογιστεί η ποσοστιαία αφαίρεση των αιωρούμενων σωματιδίων από μια δεξαμενή πρωτοβάθμιας καθίζησης με βάθος 4 m και επιφανειακή ταχύτητα υπερχείλισης $v_o = Q/A_s = 6,0 \text{ m/hr}$ (κρίσιμη ή οριακή ταχύτητα), χρησιμοποιώντας τα παρακάτω πειραματικά δεδομένα καθίζησης σωματιδίων.

Πίνακας Π7.7α: Δεδομένα από πειράματα σε στήλη καθίζησης

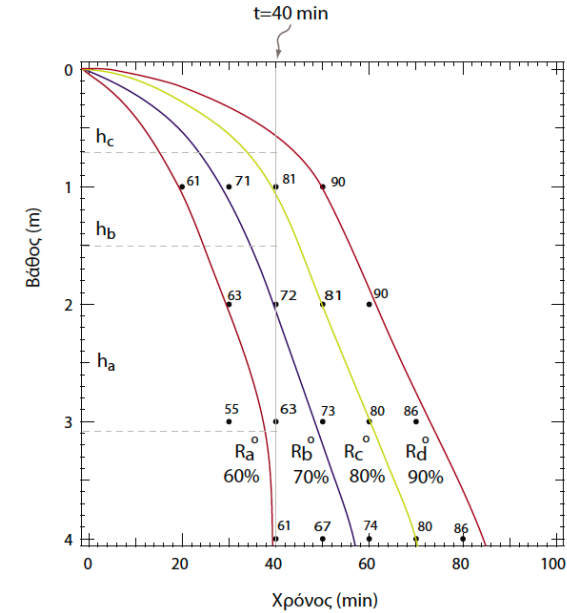
Ποσοστό αιωρούμενων σωματιδίων τα οποία έχουν απομακρυνθεί στο συγκεκριμένο βάθος (%)				
Χρόνος (min)	1 m	2 m	3 m	4 m
20	61	-	-	-
30	71	63	55	-
40	81	72	63	61
50	90	81	73	67
60	-	90	80	74
70	-	-	86	80
80	-	-	-	86

Λύση:

Υπολογίζουμε το χρόνο παραμονής στη δεξαμενή:

$$v_o = \frac{Q}{A_s} = \frac{h}{t} \Rightarrow t = \frac{h}{v_o} = \frac{4 \text{ m}}{6 \text{ m/hr}} \cdot \frac{60 \text{ min}}{\text{hr}} \Rightarrow t = \frac{2}{3} \text{ hr} = 40 \text{ min}$$

Χρησιμοποιώντας τα πειραματικά δεδομένα κατασκευάζονται οι σχετικές ισοαφαιρετικές καμπύλες (βλέπε Σχήμα Π7.7α). Από τις ισοαφαιρετικές καμπύλες φαίνεται ότι στο χρόνο $t=40$ έχει αφαιρεθεί πλήρως το 60% των σωματιδίων.



Σχήμα Π7.7α: Ισοαφαιρετικές καμπύλες.

Η ποσοστιαία αφαίρεση των αιωρούμενων σωματιδίων υπολογίζεται βάσει της εξίσωσης:

$$\begin{aligned}
 R^o &= R_a^o + \frac{h_a}{tv_o} (R_b^o - R_a^o) + \frac{h_b}{tv_o} (R_c^o - R_b^o) + \frac{h_c}{tv_o} (R_d^o - R_c^o) \\
 \Rightarrow R^o &= 60 + \frac{3,1}{(2/3)6} (70 - 60) + \frac{1,5}{(2/3)6} (80 - 70) + \frac{0,7}{(2/3)6} (90 - 80) \\
 &\Rightarrow R^o = 60 + 7,75 + 3,75 + 1,75 \\
 &\Rightarrow R^o = 73,25\% \quad \bullet
 \end{aligned}$$

Εναλλακτικός τρόπος λύσης

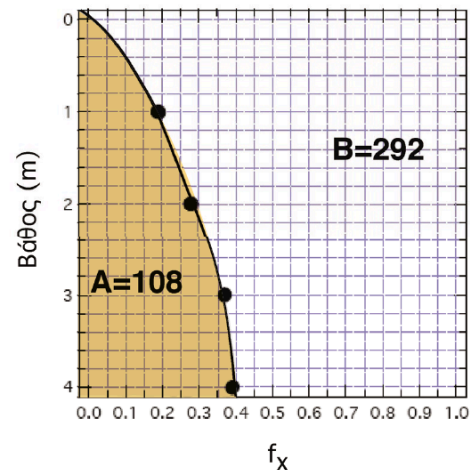
Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (7.43) και τα πειραματικά δεδομένα του Πίνακα Π7.7α μπορεί να υπολογιστεί το ποσοστό των αιωρούμενων σωματιδίων που παραμένουν σε κάθε βάθος δειγματοληψίας της πειρατικής στήλης ως εξής:

Πίνακας Π7.7β: Υπολογισμός της παραμέτρου f_x

Βάθος (m)	Ποσοστό σωματιδίων τα οποία έχουν αφαιρεθεί	f_x
1	81%	0,19
2	72%	0,28
3	63%	0,37
4	61%	0,39

Από τα στοιχεία αυτά κατασκευάζεται ένα διάγραμμα με το βάθος δειγματοληψίας σε συνάρτηση του f_x (βλέπε Σχήμα Π7.7β). Το ποσοστό ολικής αφαίρεσης των αιωρούμενων σωματιδίων υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$R^o = \left(\frac{B}{A+B} \right) 100 \Rightarrow R^o = \left(\frac{292}{108+292} \right) 100 \Rightarrow R^o = 73\% \quad \bullet$$



Σχήμα Π7.7β: Διάγραμμα βάθους δειγματοληψίας σε συνάρτηση της παραμέτρου f_x , όπου το εμβαδόν $A=108$ και το εμβαδόν $B=292$.

Καθίζηση τύπου III – Καθίζηση κατά ζώνες

Η καθίζηση Τύπου III αντιστοιχεί σε συνθήκες παρεμποδιζόμενης καθίζησης ή καθίζησης κατά ζώνες. Όταν μεγάλες συγκεντρώσεις αιωρούμενων σωματιδίων καθιζάνουν, το νερό που εκτοπίζεται κινείται ανοδικά. Η προσεγγιστική εξίσωση που περιγράφει την παρεμποδιζόμενη ταχύτητα καθίζησης αιωρούμενων σωματιδίων είναι ως εξής:

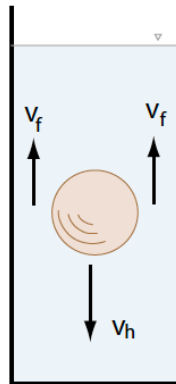
$$\frac{V_h}{V_s} = f_e^4$$

όπου f_e είναι ο όγκος του νερού σε μονάδα όγκου αιωρήματος (νερό και στερεά), v_h είναι η παρεμποδισμένη ταχύτητα καθίζησης που ορίζεται από την εξίσωση:

$$V_h = V_s - V_f$$

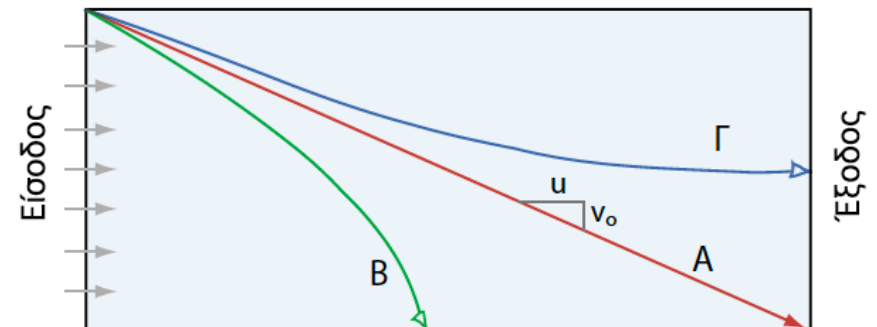
και v_f είναι η ανοδική ταχύτητα του νερού.

Παρεμποδισμένη καθίζηση στερεού με ταχύτητα v_h και ανοδική ταχύτητα νερού v_f .



Παρατηρείται ότι η ταχύτητα v_h ελαττώνεται σημαντικά με την αύξηση του όγκου των στερεών ($1 - f_e$).

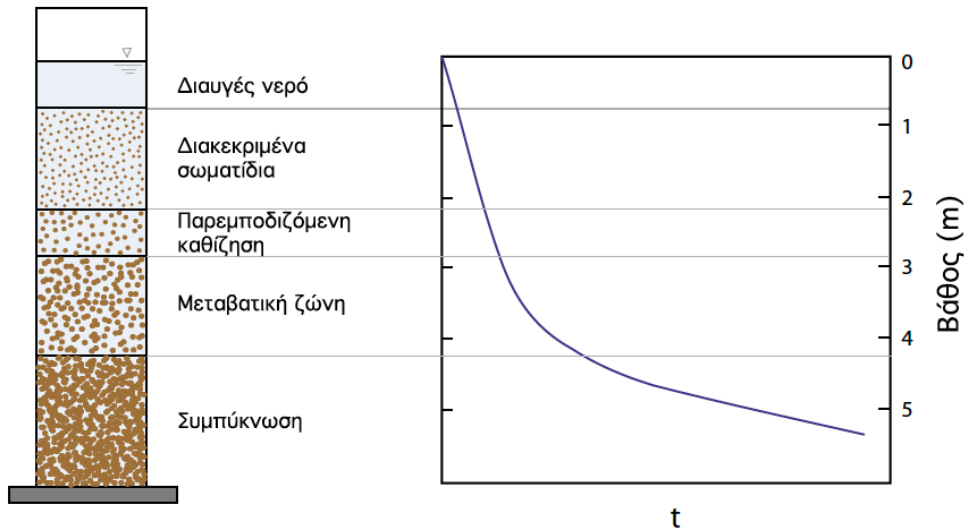
f_e	$1 - f_e$	V_h/V_s
0,9975	0,0025	0,99
0,99	0,01	0,96
0,95	0,05	0,81
0,90	0,10	0,66
0,80	0,20	0,41



Σύγκριση ταχύτητας καθίζησης σε ορθογώνια δεξαμενή για διάφορες συνθήκες: A=διακεκριμένα σωματίδια, B=σωματίδια που συσσωματώνονται, και Γ=παρεμποδιζόμενη καθίζηση.

Σε δεξαμενές καθίζησης όπου το νερό στο ρεύμα εισόδου έχει αρκετά μεγάλη συγκέντρωση αιωρούμενων σωματιδίων δημιουργούνται **διάφορες ζώνες καθίζησης**.

- Η **επιφανειακή ζώνη** αποτελείται από διαυγές νερό, ακολουθεί η ζώνη των **διακεκριμένων σωματιδίων**, η ζώνη **παρεμποδιζόμενης καθίζησης**, η **μεταβατική ζώνη**, και στο πυθμένα δημιουργείται η ζώνη **συμπύκνωσης**.
- Ο **ρυθμός καθίζησης** μικραίνει με την αύξηση του βάθους της δεξαμενής.

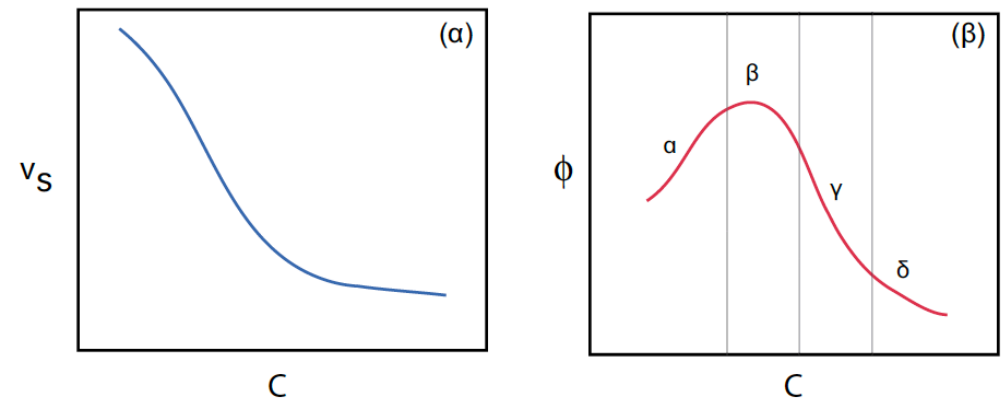


Ζώνες καθίζησης και διάγραμμα του απαιτούμενου χρόνου για την καθίζηση αιωρούμενου σωματιδίου στις διάφορες ζώνες της στήλης.

Σε πειραματικές στήλες καθίζησης **το πάχος των διαφόρων ζωνών καθίζησης μεταβάλλεται χρονικά**. Σε δεξαμενές καθίζησης όπου έχει αποκατασταθεί η ισορροπία (μόνιμη κατάσταση) το πάχος των διαφόρων ζωνών καθίζησης παραμένει σταθερό.

Η ταχύτητα καθίζησης εξαρτάται από τη **συγκέντρωση, C**, πυκνών αιωρημάτων, καθώς και η **σχέση της ροής των στερεών, Φ**, που ορίζεται ως εξής:

$$\Phi = v_s C$$



(α) Ταχύτητα καθίζησης, και (β) ροή στερεών σε συνάρτηση με τη συγκέντρωση πυκνών αιωρημάτων: το **α** αντιστοιχεί σε καθίζηση Τύπου I και II, **β** στην περιοχή παρεμποδιζόμενης καθίζησης, **γ** στη ζώνη μεταβατικής καθίζησης, και **δ** στη ζώνη συμπύκνωσης.

Καθίζηση τύπου IV – Συμπύκνωση

Ο ρυθμός συμπίεσης στη ζώνη συμπύκνωσης δίνεται από την εξίσωση:

$$-\frac{dh_z}{dt} = k(h_z - h_{z\infty})$$

όπου h_z είναι το πάχος της ζώνης συμπύκνωσης, $h_{z\infty}$ είναι το τελικό πάχος της ζώνης συμπύκνωσης ($t=\infty$), και k είναι ο συντελεστής συμπύκνωσης.

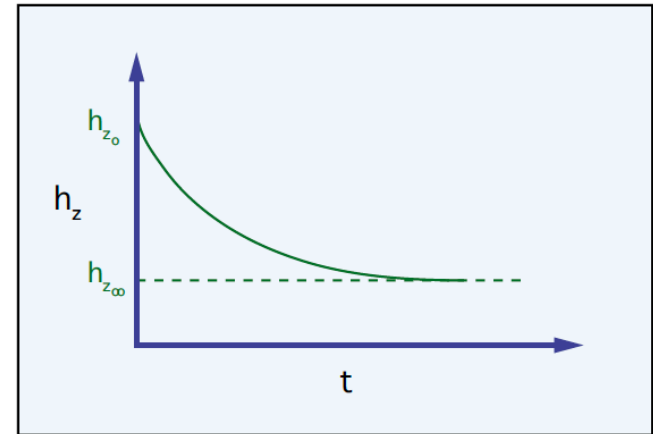
Ολοκληρώνοντας την παραπάνω εξίσωση, και θεωρώντας ότι το αρχικό ($t=0$) πάχος της ζώνης συμπύκνωσης είναι h_{zo} , έχουμε το προσομοίωμα συμπύκνωσης:

$$\int_{h_{zo}}^{h_z} \frac{dh_z}{h_z - h_{z\infty}} = - \int_0^t k dt$$

$$\Rightarrow \ln \left[\frac{h_z - h_{z\infty}}{h_{zo} - h_{z\infty}} \right] = -kt$$

$$\Rightarrow h_z - h_{z\infty} = (h_{zo} - h_{z\infty}) e^{-kt}$$

$$\Rightarrow (h_z - h_{zo}) = (h_z - h_{z\infty})(1 - e^{-kt})$$



Πάχος ζώνης συμπύκνωσης σε συνάρτηση με το χρόνο καθίζησης.

Καθίζηση μη-σφαιρικών σωματιδίων

Για σφαιρικά σωματίδια μπορούμε να υπολογίσουμε τον λόγο της επιφάνειας A_s ως προς τον όγκο V_s

$$\left. \begin{aligned} A_s &= \pi d_p^2 \\ V_s &= \frac{\pi d_p^3}{6} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(\frac{A}{V} \right)_s = \frac{6}{d_p}$$

Για μη σφαιρικά σωματίδια ορίζουμε τον συντελεστή σφαιρικότητας,

$$\psi = \frac{(A/V)_s}{(A/V)_p} \leq 1$$

όπου οι κάτω δείκτες s και p υποδηλώνουν σφαιρικά και μη-σφαιρικά σωματίδια, αντίστοιχα.

Για τον υπολογισμό της σφαιρικότητας θεωρούμε ότι και τα δύο σωματίδια (s και p) έχουν τον ίδιο όγκο αλλά διαφορετικές επιφάνειες.

Υλικό	ψ
Πυριτική άμμος	0,7-0,85
Ανθρακίτης	0,7-0,75
Υδρανθρακίτης	0,65
Κοκκώδης ενεργός άνθρακας	0,75
Άμμος γρανάτη	0,60-0,65

Για μη-σφαιρικά σωματίδια χρησιμοποιούμε την προσαρμοσμένη ή αποτελεσματική διάμετρο:

$$d'_s = \psi d_p$$

Δηλαδή, για μη-σφαιρικά σωματίδια και συνθήκες στρωτής γραμμικής ροής ($Re < 1$), η εξίσωση που περιγράφει την ταχύτητα καθίζησης τροποποιείται ως εξής:

$$v_s = \frac{g}{18\mu_w} (\rho_p - \rho_w) (\psi d_p)^2$$

και για $Re > 1$, η ταχύτητας καθίζησης μετατρέπεται ως εξής:

$$v_s = \left[\frac{4}{3} \frac{g}{C_D} \left(\frac{\rho_p - \rho_w}{\rho_w} \right) (\psi d_p) \right]^{1/2}$$

Παράδειγμα 7

Να υπολογιστεί η τερματική ταχύτητα καθίζησης από κόκκους άμμου με πυκνότητα 2600 kg/m^3 στους 20°C . Οι κόκκοι άμμου έχουν προσαρμοσμένη (αποτελεσματική) διάμετρο $0,5 \text{ mm}$ και σφαιρικότητα $0,75$.

Λύση:

Θεωρούμε ότι $Re < 1$ και υπολογίζουμε την τιμή της ταχύτητας καθίζησης

$$\left. \begin{aligned} v_s &= \frac{g}{18\nu_w}(\rho_p - \rho_w)(\psi d_p)^2 \\ g &= 9,81 \text{ m/s}^2 \\ \nu_w &= 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s} \\ \rho_p &= 2,6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ \rho_w &= 998 \text{ kg/m}^3 \\ \psi &= 0,75 \\ d_p &= 0,5 \text{ mm} = 5 \times 10^{-4} \text{ m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_s = \frac{9,81}{18 (10^{-3})} (2600 - 998) (0,75 \times 5 \times 10^{-4})^2$$
$$\Rightarrow v_s = 0,10 \text{ m/s}$$

Εξετάζουμε τώρα εάν είναι σωστή η αρχική παραδοχή ότι το $Re < 1$.

$$\left. \begin{aligned} Re &= \frac{(\psi d_p) v_s}{\mu_w / \rho_w} \\ \frac{\mu_w}{\rho_w} &= \frac{10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}}{998 \text{ kg/m}^3} = 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow Re = \frac{(0,75 \times 5 \times 10^{-4} \text{ m})(0,10 \text{ m/s})}{10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}}$$
$$\Rightarrow Re = 37 > 1$$

Ο αδιάστατος αριθμός Re είναι μεγαλύτερος της μονάδας. Άρα, θα πρέπει να θεωρήσουμε ότι οι συνθήκες ροής αντιστοιχούν στη μεταβατική περιοχή ($1 < Re < 1000$) και να υπολογίσουμε ξανά το v_s

$$\left. \begin{aligned} v_s &= \left[\frac{4}{3} \frac{g}{C_D} \left(\frac{\rho_p - \rho_w}{\rho_w} \right) (\psi d_p) \right]^{1/2} \\ C_D &\approx \frac{13}{Re^{1/2}} \\ Re &= \frac{(\psi d_p) v_s}{\mu_w / \rho_w} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_s = \left[\frac{4}{39} \frac{\rho_p - \rho_w}{(\rho_w \mu_w)^{1/2}} g \right]^{2/3} (\psi d_p)$$
$$\Rightarrow v_s = \left[\frac{4}{39} \frac{(2600 - 998)(9,81)}{[(998)(10^{-3})]^{1/2}} \right]^{2/3} (0,75 \times 5 \times 10^{-4})$$
$$\Rightarrow v_s = 0,052 \frac{\text{m}}{\text{s}} \bullet$$

Επαλήθευση:

$$Re = \frac{(\psi d_p) v_s}{\mu_w / \rho_w} = \frac{(0,75 \times 5 \times 10^{-4} \text{ m})(0,052 \text{ m/s})}{10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}} = 20$$

Οι συνθήκες ροής πράγματι αντιστοιχούν στη μεταβατική περιοχή ($1 < Re < 1000$).

Παράδειγμα 8

Να βρεθεί η σχέση που περιγράφει το λόγο της αρχικής τερματικής ταχύτητας καθίζησης ως προς τη τερματική ταχύτητα καθίζησης μετά από κάποιο βαθμό συσσώματωσης σε συνάρτηση του αρχικού (N_1) και του τελικού αριθμού των αιωρούμενων σωματιδίων (N_2), δηλαδή να βρεθεί η σχέση ($v_{s,συσσ}/v_s$)= $f(N_1, N_2)$. Να θεωρηθεί ότι η πυκνότητα των συσσωματωμάτων είναι ίδια με την πυκνότητα των διακεκριμένων σωματιδίων, και ότι $Re < 1$.

Λύση:

Θεωρούμε ότι $Re < 1$ και ότι η πυκνότητα των συσσωματωμάτων είναι ίδια με την πυκνότητα των διακεκριμένων σωματιδίων.

Πριν τη συσσώματωση (1) & μετά τη συσσώματωση (2)

$$\begin{aligned} N_1 &\rightarrow N_2 \\ d_{p1} &\rightarrow d_{p2} \\ v_s &\rightarrow v_{s,συσσ} \\ M_1 &\rightarrow M_2 \end{aligned}$$

Η συνολική μάζα των σωματιδίων M παραμένει αμετάβλητη πριν και μετά τη συσσώματωση, επομένως:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_2 \\ \Rightarrow \frac{\pi d_{p1}^3 \rho_p}{6} N_1 &= \frac{\pi d_{p2}^3 \rho_p}{6} N_2 \\ \Rightarrow \frac{d_{p2}}{d_{p1}} &= \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^{1/3} \end{aligned}$$

Για συνθήκες όπου $Re < 1$ η ταχύτητα καθίζησης υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$v_s = \frac{g}{18 \mu_w} (\rho_p - \rho_w) d_p^2$$

και ο επιθυμητός λόγος των ταχυτήτων καθίζησης δίνεται από τη σχέση:

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_{s,συσσ}}{v_s} &= \left(\frac{d_{p2}}{d_{p1}} \right)^2 \\ \frac{d_{p2}}{d_{p1}} &= \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^{1/3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{v_{s,συσσ}}{v_s} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^{2/3} \bullet$$