

Βιολογικές Διεργασίες στην Επεξεργασία Υγρών Αποβλήτων

Μάθημα 6

Εξισορρόπηση παροχής λυμάτων

Για την εξομάλυνση της παροχής λυμάτων από τις διακυμάνσεις που οφείλονται σε καθημερινές ανθρώπινες δραστηριότητες, οι οποίες έχουν μια σχετική περιοδικότητα, ή σε τυχαίες απρόβλεπτες εισροές υγρών αποβλήτων χρησιμοποιούνται δεξαμενές εξισορρόπησης.

Μια δεξαμενή εξισορρόπησης είναι απαραίτητη σε βιομηχανικές περιοχές όπου τα περισσότερα απόβλητα παράγονται 5 ημέρες την εβδομάδα και η παροχή θα πρέπει να ισοκατανεμηθεί σε 7 ημέρες.

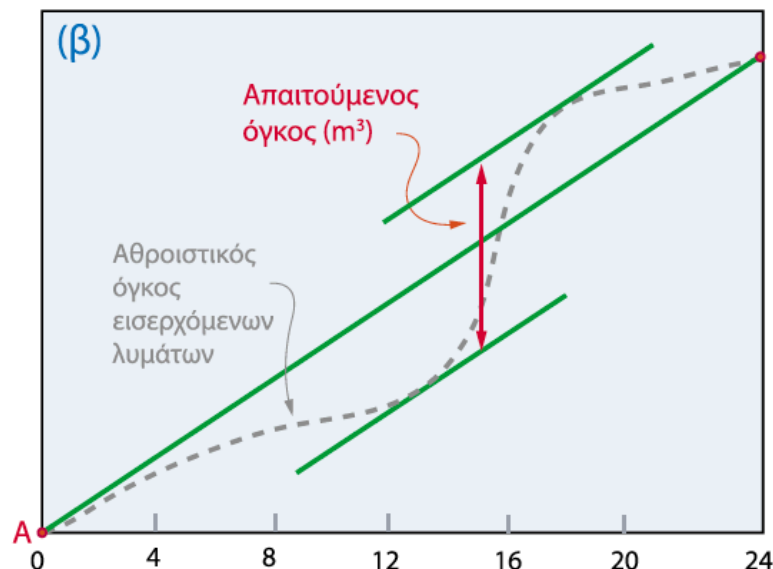
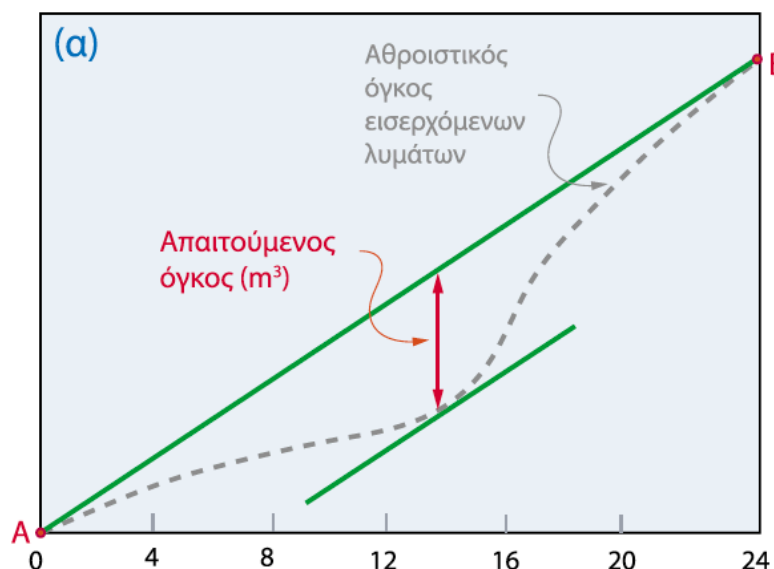
Μια δεξαμενή εξισορρόπησης μπορεί να τοποθετηθεί σε δύο πιθανές διατάξεις: (i) σε σειρά και (ii) παράλληλα ή πλευρικά.

Για το σχεδιασμό δεξαμενής εξισορρόπησης συνιστάται η συλλογή ωριαίας παροχής λυμάτων κατά τη διάρκεια μιας ημέρας, όπου παρουσιάζονται μεγάλες ωριαίες διακυμάνσεις, αλλά και μια από τις μεγαλύτερες ημερήσιες παροχές, γιατί η ημερησία παροχή μπορεί να διαφέρει από τη μια ημέρα στην άλλη.

Ο απαιτούμενος όγκος της δεξαμενής εξισορρόπησης υπολογίζεται γραφικά κατασκευάζοντας ένα διάγραμμα του συνολικού όγκου των αποβλήτων κατά τη διάρκεια του εικοσιτετράωρου.

Στο διάγραμμα αυτό, μια **ευθεία γραμμή** ενώνει τον αθροιστικό όγκο σε αρχικό χρόνο (σημείο A, $t=0$ h) με τον αθροιστικό όγκο μετά από 24 ώρες (σημείο B, $t=24$ h). Η **εφαπτομένη της καμπύλης** θα πρέπει να είναι παράλληλη της ευθείας AB. Η **κατακόρυφη απόσταση** μεταξύ της ευθείας AB και της εφαπτομένης δίνει τον όγκο της δεξαμενής εξισορρόπησης.

Αν η ευθεία AB τέμνει την καμπύλη του αθροιστικού όγκου εισερχόμενων λυμάτων, τότε χρειάζεται και μια **δεύτερη εφαπτομένη της καμπύλης**. Στην περίπτωση αυτή η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των δύο παράλληλων εφαπτομένων δίνει τον όγκο της δεξαμενής εξισορρόπησης.



Γραφικός υπολογισμός του όγκου δεξαμενής εξισορρόπησης όταν η καμπύλη του αθροιστικού όγκου εισερχόμενων λυμάτων: (α) δεν τέμνει και (β) τέμνει την ευθεία AB.

Παράδειγμα 1

Τα δεδομένα παροχής λυμάτων για ένα εικοσιτετράωρο από μία μονάδα βιολογικής επεξεργασίας υγρών αποβλήτων δίνονται στον Πίνακα Π5.1.

Πίνακας Π5.1: Ωριαία παροχή υγρών αποβλήτων

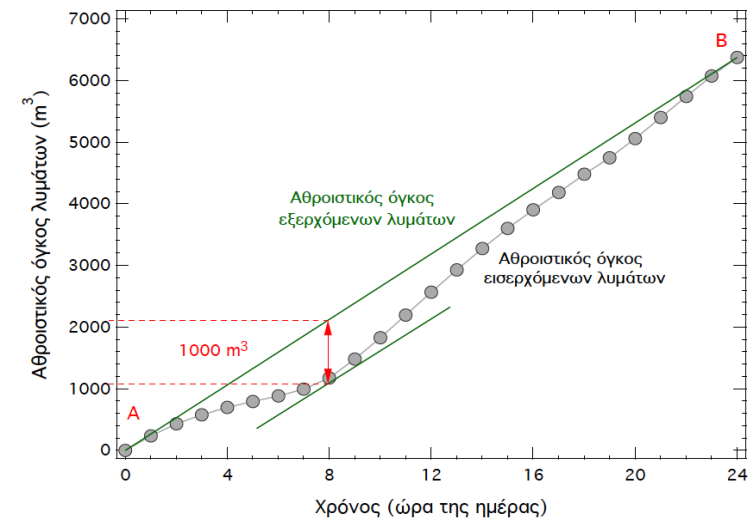
Ωρα 24ώρου	Παροχή λυμάτων (m ³ /h)	Αθροιστικός όγκος λυμάτων (m ³)
1	235	235
2	195	430
3	150	580
4	120	700
5	95	795
6	90	885
7	110	995
8	180	1175
9	305	1480
10	350	1830
11	365	2195
12	375	2570
13	360	2930
14	345	3275
15	330	3605
16	300	3905
17	280	4185
18	295	4480
19	270	4750
20	310	5060
21	340	5400
22	345	5745
23	330	6075
24	300	6375

Να βρεθεί ο απαιτούμενος όγκος της δεξαμενής εξισορρόπησης παροχής.

Λύση:

Κατασκευάζουμε ένα διάγραμμα του συνολικού όγκου των αποβλήτων κατά τη διάρκεια του εικοσιτετράωρου. Ενώνουμε τον αρχικό αθροιστικό όγκο εισερχόμενων λυμάτων (σημείο Α) με τον εικοσιτετράωρο αθροιστικό όγκο εισερχόμενων λυμάτων (σημείο Β). Φέρουμε μια εφαπτόμενη επί της καμπύλης του αθροιστικού όγκου των εισερχόμενων λυμάτων, η οποία είναι και παράλληλη με την ευθεία ΑΒ (βλέπε Σχήμα Π5.1).

Ο απαιτούμενος όγκος της δεξαμενής εξισορρόπησης είναι 1000 m³ και υπολογίζεται από τη μέγιστη απόσταση μεταξύ της γραμμής ΑΒ (αθροιστικός όγκος εξερχόμενων λυμάτων) και της καμπύλης του αθροιστικού όγκου των εισερχόμενων λυμάτων.



Σχήμα Π5.1: Διάγραμμα αθροιστικού όγκου λυμάτων για ένα εικοσιτετράωρο.

Μέτρηση παροχής

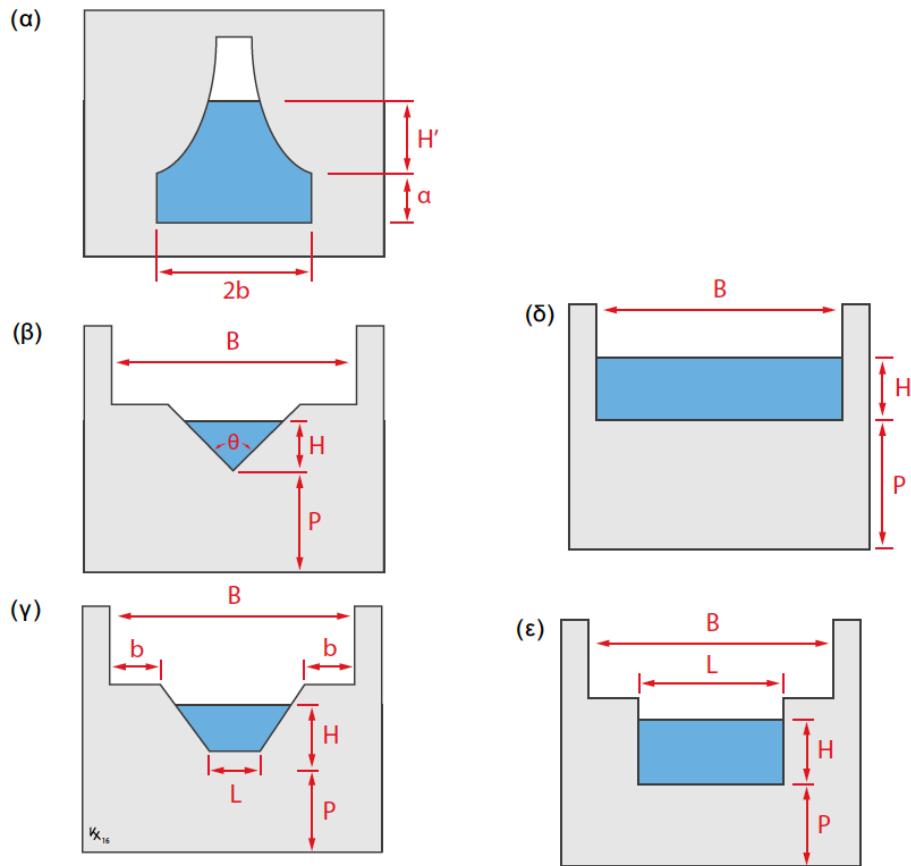
Το νερό ή τα λύματα μεταφέρονται σε εγκαταστάσεις επεξεργασίας με κλειστούς ή ανοικτούς αγωγούς.

Ο προσδιορισμός της παροχής σε κλειστούς αγωγούς επιτυγχάνεται με σωλήνες Venturi, ροόμετρα και συσκευές καταγραφής υπερήχων, μαγνητικών πεδίων, στροβιλισμών ή ταχύτητας περιστροφής προπέλας.

Η παροχή σε ανοικτούς αγωγούς μετριέται με:

- (i) αυλάκια (flumes) τύπου Parshall, Palmer-Bowls, H-flume, cutthroat και τραπεζοειδή και
- (ii) υπερχειλιστές (weirs) τύπου Sutro, V-notch, Cipoletti, εκτεταμένης ορθογώνιας διάταξης και περιορισμένης ορθογώνιας διάταξης.

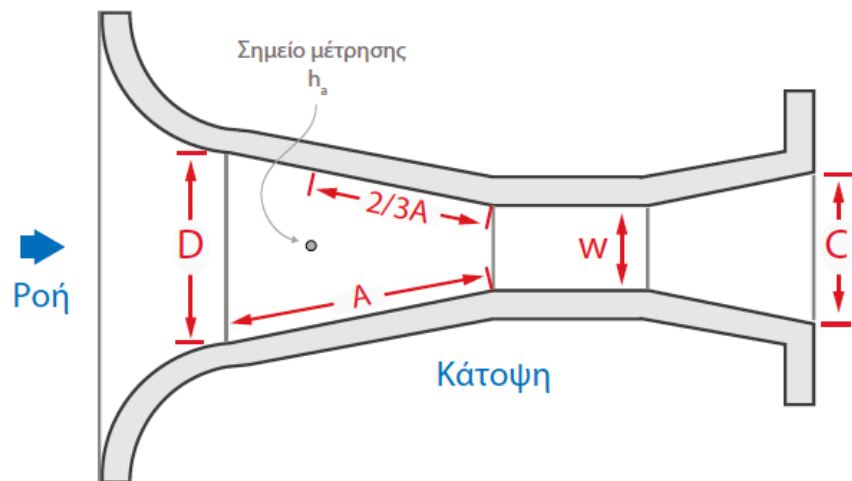
Η πιο συνηθισμένη τεχνική μέτρησης παροχής σε ανοικτούς αγωγούς και ροές που περιέχουν υψηλές συγκεντρώσεις αιωρούμενων στερεών είναι με αυλάκι Parshall.



Εμπειρικές εξισώσεις παροχής υπερχειλιστών

Τύπος υπερχειλιστή	Εξίσωση παροχής [μονάδες]	Περιορισμοί
Sutro ²	$Q = 2C_d b \sqrt{2ga} \left(H' - \frac{2a}{3} \right)$	$C_d \sim 0,62$
V-notch ³	$Q = 1,36 H^{2,48} \quad [m^3/s]$	$\theta = 90^\circ$ $H/P \leq 1,2$ $H/b \leq 0,4$ $P > 0,1 \text{ m}$ $B > 0,6 \text{ m}$
Cipoletti ⁴	$Q = 3,367 \cdot L \cdot H^{3/2} \quad [L/s]$	$H > 6,1 \text{ cm}$ $P/H \geq 2$ $b/H \geq 2$
Εκτεταμένη ορθογώνια διάταξη ³	$Q = 1,84 \cdot B \cdot H^{3/2} \quad [m^3/s]$	$H/P \leq 0,33$ $H/B \leq 0,33$
Περιορισμένη ορθογώνια διάταξη ³	$Q = 1,84 (L - 0,2H) H^{3/2} \quad [m^3/s]$	$H/L \leq 0,33$ $B - L \geq 4H_{\max}$ $P \geq 2H_{\max}$

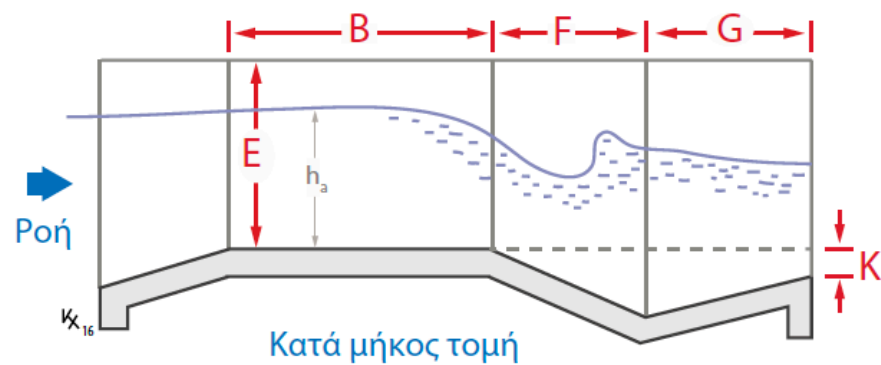
Υπερχειλιστές τύπου: (α) Sutro, (β) V-notch, (γ) Cipolletti, (δ) εκτεταμένης ορθογώνιας διάταξης και (ε) περιορισμένης ορθογώνιας διάταξης.



Διαστάσεις καναλιού Parshall

Πλάτος λαιμού w (m)	$2/3A$ (m)	B (m)	C (m)	D (m)
0,30	0,91	1,34	0,61	0,85
0,46	0,97	1,34	0,76	1,03
0,61	1,02	1,50	0,91	1,21
0,91	1,12	1,64	1,22	1,57
1,22	1,22	1,79	1,52	1,94
1,52	1,32	1,94	1,83	2,30
1,83	1,42	2,11	2,13	2,67
2,13	1,52	2,25	2,44	3,03
2,44	1,63	2,39	2,74	3,40

$E=0,91$ m, $F=0,61$ m, $G=0,91$ m, and $K=8$ cm.

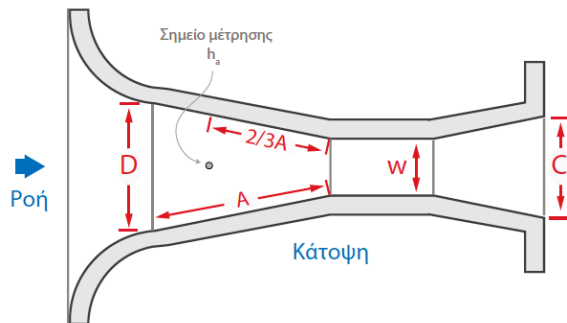


Αυλάκια μέτρησης παροχής τύπου Parshall.

Για τον υπολογισμό της παροχής διαμέσου του καναλιού Parshall με την εμπειρική σχέση:

$$Q = ch_a^n \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$$

όπου h_a [m] είναι το ύψος της στάθμης του νερού στο καθορισμένο σημείο ανάντη, c [$\text{m}^3\text{-n}/\text{s}$] και n [-] είναι οι δύο εμπειρικοί συντελεστές Parshall.



Τιμές παραμέτρων c και n της εμπειρικής εξίσωσης Parshall

Πλάτος λαιμού w (m)	c	n
0,025	0,060	1,550
0,051	0,121	1,550
0,076	0,177	1,550
0,152	0,381	1,580
0,229	0,535	1,530
0,305	0,691	1,522
0,457	1,056	1,538
0,610	1,429	1,550
0,914	2,184	1,566
1,219	2,954	1,578
1,524	3,732	1,587
1,829	4,518	1,595
2,134	5,313	1,601
2,438	6,115	1,607
3,048	7,463	1,600
3,658	8,859	1,600
4,572	10,96	1,600
6,096	14,45	1,600
7,620	17,94	1,600
9,144	21,44	1,600

Κατηγορίες αντιδραστήρων

Ιδανικοί αντιδραστήρες

(1) *CMBR (Completely Mixed Batch Reactor)* αντιδραστήρας
πλήρους ανάμιξης ασυνεχούς τροφοδότησης –

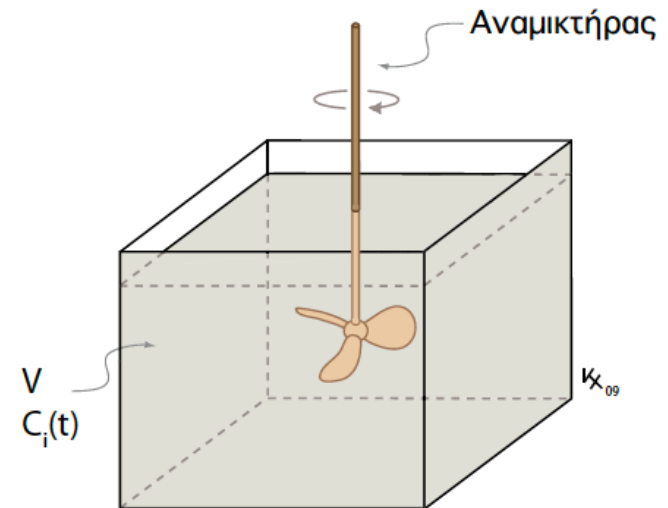
Αντιδραστήρας με πλήρη ανάμιξη και μη-συνεχή ροή.

Δηλαδή, δεν υπάρχει συνεχής τροφοδοσία ούτε ρεύμα εξόδου για κάθε χρονική στιγμή $t > 0$.

Το αντιδρών μίγμα εισέρχεται στον αντιδραστήρα τη χρονική στιγμή $t=0$.

Η αντίδραση διεξάγεται έως ότου το αντιδρών συστατικό μετατραπεί σε προϊόντα ή μέχρι να επέλθει χημική ισορροπία.

Η συγκέντρωση C_i του συστατικού i μεταβάλλεται χρονικά, αλλά παραμένει ομοιόμορφα κατανεμημένη στο συνολικό όγκο V του αντιδραστήρα.



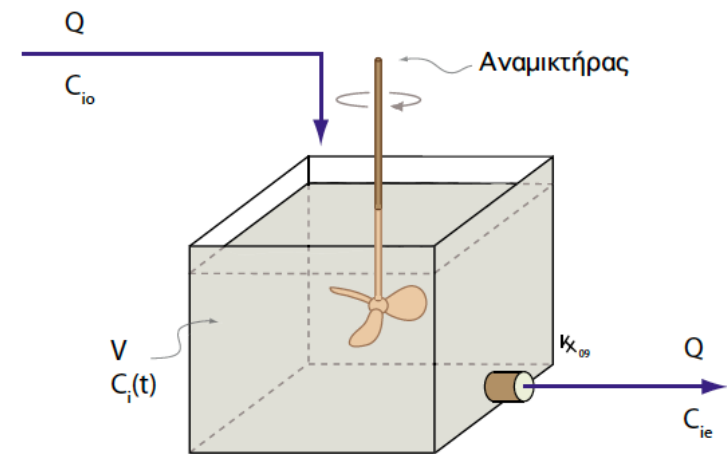
Αντιδραστήρας πλήρους ανάμιξης ασυνεχούς τροφοδότησης (CMBR) με όγκο V .

(2) CSTR (Continuous Stirred Tank Reactor) ή CMFR (Continuous Mixed Flow Reactor) αντιδραστήρας συνεχούς τροφοδότησης και πλήρους ανάμιξης

Αντιδραστήρας με ρεύματα τροφοδοσίας (ογκομετρική παροχή), Q_{in} , και εξόδου, Q_{out} , σταθερά και ίσα μεταξύ τους.

Για κάθε χρονική στιγμή υπάρχει ομοιόμορφη συγκέντρωση στον αντιδραστήρα.

Σε μόνιμη κατάσταση (steady state) η συγκέντρωση στον αντιδραστήρα είναι ίδια με τη συγκέντρωση στο ρεύμα εξόδου και προφανώς χρονικά σταθερή.



Αντιδραστήρας συνεχούς τροφοδότησης και πλήρους ανάμιξης (CSTR ή CMFR) με όγκο V , ογκομετρική παροχή Q και συγκέντρωση στο ρεύμα εισόδου C_{io} .

(3) PFR (Plug-Flow Reactor) αντιδραστήρας εμβολικής ροής

Αντιδραστήρας δίχως ανάμιξη στη διεύθυνση της ροής, αλλά με πλήρη ανάμιξη στην ακτινική διεύθυνση (κάθετα στη ροή).

Η ογκομετρική παροχή είναι σταθερή ($Q_{in}=Q_{out}$).

Ο μέσος χρόνος αντίδρασης, δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{t} = \frac{V}{Q} = \frac{L}{\bar{U}_x}$$

όπου L είναι το μήκος του αντιδραστήρα, $\bar{U}_x = Q/A$ είναι η μέση ταχύτητα του αντιδρώντος μίγματος και A είναι η επιφάνεια της κάθετου διατομής του αντιδραστήρα.

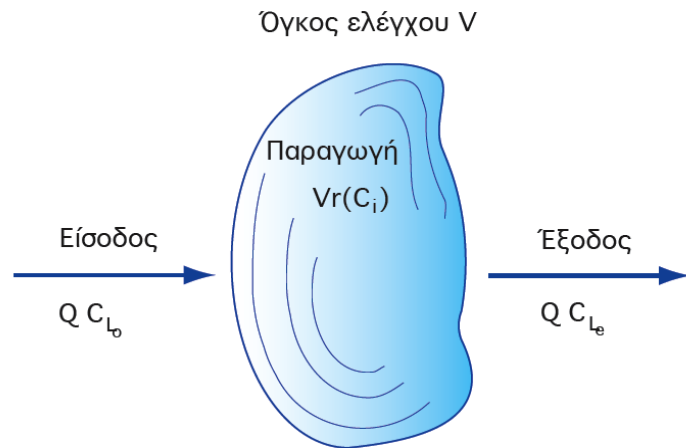


Αντιδραστήρας εμβολικής ροής (PFR), με μήκος L , ογκομετρική παροχή Q , και συγκέντρωση στο ρεύμα εισόδου C_{i0} .

Σχεδιαστικές εξισώσεις αντιδραστήρων

Βάσει της αρχής διατήρησης της μάζας για οποιοδήποτε αντιδραστήρα το **ισοζύγιο μάζας** του συστατικού i σε ένα όγκο ελέγχου (στοιχειώδης όγκος) του αντιδραστήρα, εκφράζεται ως εξής:

$$\left[\text{Ρυθμός} \right]_{\text{εισόδου}} - \left[\text{Ρυθμός} \right]_{\text{εξόδου}} + \left[\text{Ρυθμός} \right]_{\text{παραγωγής}} = \left[\text{Ρυθμός} \right]_{\text{συσσώρευσης}}$$



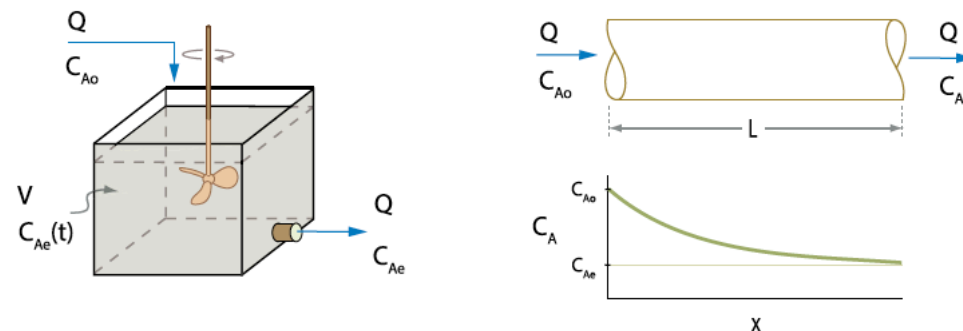
Ισοζύγια μάζας για ιδανικούς αντιδραστήρες

Αντιδρα- στήρας	Ρυθμός εισόδου	Ρυθμός εξόδου	Ρυθμός παραγωγής	Ρυθμός συσσώρευσης
CMBR	0	0	$+ Vr(C_i)$	$= V \frac{dC_i}{dt}$
CMFR (CSTR) ή PFR	$+ QC_{I_0}$	$- QC_{I_e}$	$+ Vr(C_i)$	$= V \frac{\partial C_i}{\partial t}$ $= 0 \text{ (s.s.)}^*$

Ισοζύγιο μάζας του συστατικού i για ένα όγκο ελέγχου V σε ένα αντιδραστήρα.

Σύγκριση αντιδραστήρων CMFR και PFR

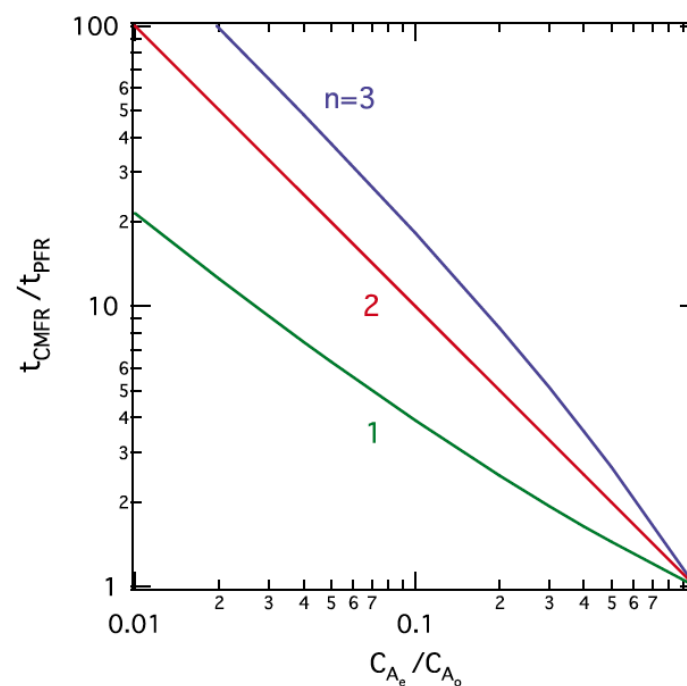
Για αντιδραστήρες με συνεχή ροή ο όρος $\bar{t} = V/Q$ αποτελεί ένα μέτρο του χρόνου αντίδρασης για ένα συγκεκριμένο αντιδραστήρα με όγκο V και ρυθμό τροφοδοσίας Q . Επίσης, ο όρος $\bar{t}$ προσδιορίζει το απαιτούμενο μέγεθος του αντιδραστήρα για συγκεκριμένο ρυθμό τροφοδοσίας.



Σύγκριση χρόνου αντίδρασης σε αντιδραστήρες CMFR και PFR.

Βαθμός αντίδρασης (n)	$(\bar{t})_{\text{CMFR}}$	$(\bar{t})_{\text{PFR}}$	$\frac{(\bar{t})_{\text{CMFR}}}{(\bar{t})_{\text{PFR}}}$
0	$\frac{1}{\lambda_0} (C_{A_0} - C_{A_e})$	$\frac{1}{\lambda_0} (C_{A_0} - C_{A_e})$	1
1	$\frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{C_{A_0}}{C_{A_e}} - 1 \right)$	$\frac{1}{\lambda_1} \ln \left[\frac{C_{A_0}}{C_{A_e}} \right]$	$\frac{\left(\frac{C_{A_0}}{C_{A_e}} - 1 \right)}{\ln \left[\frac{C_{A_0}}{C_{A_e}} \right]}$
2	$\frac{1}{\lambda_2 C_{A_e}} \left(\frac{C_{A_0}}{C_{A_e}} - 1 \right)$	$\frac{1}{\lambda_2 C_{A_0}} \left(\frac{C_{A_0}}{C_{A_e}} - 1 \right)$	$\frac{C_{A_0}}{C_{A_e}}$
n (n≠1)	$\frac{1}{\lambda_n C_{A_e}^{n-1}} \left(\frac{C_{A_0}}{C_{A_e}} - 1 \right)$	$\frac{1}{\lambda_n (n-1) C_{A_0}^{n-1}} \left[\left(\frac{C_{A_0}}{C_{A_e}} \right)^{n-1} - 1 \right]$	$(n-1) \left(\frac{C_{A_0}}{C_{A_e}} \right)^{n-1} \frac{\left(\frac{C_{A_0}}{C_{A_e}} \right) - 1}{\left(\frac{C_{A_0}}{C_{A_e}} \right)^{n-1} - 1}$

Σύγκριση της συγκέντρωσης C_A σε αντιδραστήρες CMFR και PFR.



Παράδειγμα 1

Για μια αντίδραση πρώτης τάξης με ρυθμό $r_A = -0,5C_A$ [mg/L d] σε ένα αντιδραστήρα εμβολικής ροής (PFR), η συγκέντρωση στο ρεύμα τροφοδοσίας είναι $C_{A_0} = 500$ mg/L και ο ρυθμός τροφοδοσίας $Q = 1$ m³/d. Να υπολογιστεί ο όγκος του αντιδραστήρα για 80% απόδοση/μετατροπή σε συνθήκες μόνιμης κατάστασης.

Λύση:

$$r = -0,5C_A \left[\frac{\text{mg}}{\text{L d}} \right]$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0,5 \left[\frac{1}{\text{d}} \right]$$

$$C_{A_e} = (1,0 - 0,8)C_{A_0} = (1,0 - 0,8) \left(500 \frac{\text{mg}}{\text{L}} \right)$$

$$\Rightarrow C_{A_e} = 100 \frac{\text{mg}}{\text{L}}$$

Για αντίδραση πρώτης τάξης σε αντιδραστήρα PFR έχουμε:

$$(\bar{t})_{\text{PFR}} = \frac{V}{Q} = \frac{1}{\lambda_1} \ln \left[\frac{C_{A_0}}{C_{A_e}} \right]$$

$$\Rightarrow V = \frac{Q}{\lambda_1} \ln \left[\frac{C_{A_0}}{C_{A_e}} \right]$$

$$\Rightarrow V = \left(\frac{1 \text{ m}^3/\text{d}}{0,5 \text{ 1/d}} \right) \ln \left[\frac{500}{100} \right]$$

$$\Rightarrow V = 3,22 \text{ m}^3 \quad \bullet$$

Παράδειγμα 2

Να αναπτυχθεί η θεωρητική σχέση για τη συγκέντρωση συναρτήσει του μήκους μέσα σε κυλινδρικό αντιδραστήρα τύπου PFR, ο οποίος λειτουργεί σε συνθήκες μόνιμης κατάστασης. Η διατομή του αντιδραστήρα είναι A , η παροχή νερού είναι Q , η συγκέντρωση του ρύπου στη είσοδο του αντιδραστήρα είναι C_{i0} , και η αντίδραση που λαμβάνει χώρα είναι (α) πρώτης τάξης με $r=-\lambda_1 C_i$ και (β) δεύτερης τάξης με $r=-\lambda_2 C_i^2$. Επίσης, να παρουσιάσετε γραφικά τις κατανομές των συγκεντρώσεων στον αντιδραστήρα για τις δύο διαφορετικές αντιδράσεις όταν: $C_{i0}=500 \text{ mg/L}$, $L=3 \text{ m}$, $Q=1 \text{ m}^3/\text{d}$, $A=0,8 \text{ m}^2$, $\lambda_1=0,2, 0,5, 0,9 \text{ 1/d}$ και $\lambda_2=0,001, 0,01, 0,1 \text{ L/mg}\cdot\text{d}$.

Λύση:

Χρησιμοποιώντας το Σχήμα 5.15, το ισοζύγιο μάζας για διαφορικό όγκο ΔV , μήκους Δx και διατομής A είναι:

$$QC_{i(x)} - QC_{i(x+\Delta x)} + r(C_i)\Delta V = \frac{\partial C_i}{\partial t} \Delta V$$

διαιρώντας δια $\Delta V = A\Delta x$ και λαμβάνοντας το όριο $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = r(C_i) - \frac{Q}{A} \frac{\partial C_i}{\partial x}$$

Ο αντιδραστήρας λειτουργεί σε συνθήκες μόνιμης κατάστασης, άρα η συγκέντρωση C_i δεν είναι συνάρτηση του t αλλά μόνο του x ($\partial C/\partial t=0$). Επομένως, η παραπάνω μερική διαφορική εξίσωση απλουστεύει στην εξής συνήθη διαφορική εξίσωση:

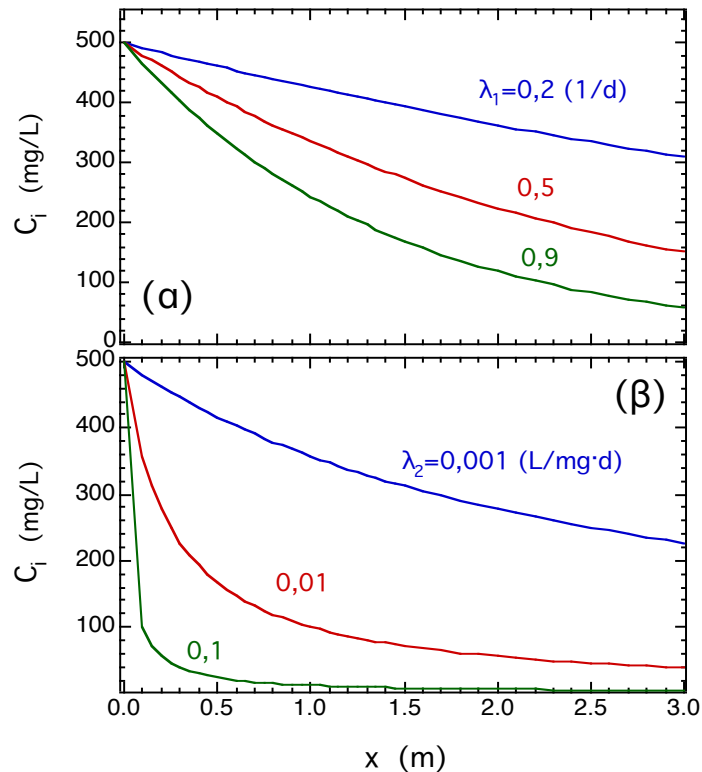
$$r(C_i) = \frac{Q}{A} \frac{dC_i}{dx} \quad (\Pi 1)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (Π1) το $r=-\lambda_1 C_i$ και χωρίζοντας τις μεταβλητές, έχουμε:

$$\begin{aligned} -\lambda_1 C_i &= \frac{Q}{A} \frac{dC_i}{dx} \\ \Rightarrow \frac{dC_i}{C_i} &= -\lambda_1 \frac{A}{Q} dx \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας τη συγκέντρωση από C_{i0} μέχρι $C_i(x)$ και dx από 0 μέχρι x , προκύπτει η επιθυμητή σχέση:

$$\begin{aligned} \int_{C_{i0}}^{C_i(x)} \frac{dC_i}{C_i} &= - \int_0^x \lambda_1 \frac{A}{Q} dx \\ \Rightarrow \ln \left[\frac{C_i(x)}{C_{i0}} \right] &= -\lambda_1 \frac{A}{Q} x \\ \Rightarrow C_i(x) &= C_{i0} \exp \left[-\lambda_1 \frac{A}{Q} x \right] \quad (\Pi 2) \end{aligned}$$



Σχήμα Π5.3: Κατανομή συγκέντρωσης σε αντιδραστήρα τύπου PFR συναρτήσει του μήκους του αντιδραστήρα για (α) αντίδραση πρώτης τάξης με διαφορετικούς συντελεστές λ_1 και (β) αντίδραση δεύτερης τάξης με διαφορετικούς συντελεστές λ_2 .

Επίσης, αντικαθιστώντας στην εξίσωση (Π1) το $r = -\lambda_2 C_i^2$, και χωρίζοντας τις μεταβλητές, ολοκληρώνοντας τη συγκέντρωση από C_{i0} μέχρι $C_i(x)$ και dx από 0 μέχρι x , προκύπτει:

$$\int_{C_{i0}}^{C_i(x)} \frac{dC_i}{C_i^2} = - \int_0^x \lambda_2 \frac{A}{Q} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C_i(x)} - \frac{1}{C_{i0}} = \lambda_2 \frac{A}{Q} x \quad (\text{Π3})$$

Η κατανομή της συγκέντρωσης σε αντιδραστήρα PFR για αντίδραση πρώτης τάξης, βάσει της εξίσωσης (Π2) παρουσιάζεται στο Σχήμα Π5.3α, και για αντίδραση δεύτερης τάξης, βάσει της εξίσωσης (Π3) παρουσιάζεται στο Σχήμα Π5.3β που ακολουθεί. Και για τους δυο τύπους αντίδρασης οι συγκεντρώσεις ελαττώνονται όσο αυξάνει η απόσταση από την είσοδο του αντιδραστήρα και/ή η τιμή του συντελεστή ρυθμού αντίδρασης. Η μεταβολή της συγκέντρωσης C_i είναι πιο έντονη για την αντίδραση δεύτερης τάξης.

Παράδειγμα 3

Ένας αντιδραστήρας CMFR δέχεται υγρά απόβλητα με σταθερή παροχή Q στην οποία υπάρχει μια χρονικά μεταβαλλόμενη συντηρητική ουσία (ιχνηθέτης) της οποίας η συγκέντρωση περιγράφεται με τη σχέση:

$$C_{A_0} = C_1 + C_2 \sin(\omega t)$$

όπου C_1 , C_2 και ω είναι σταθερές. Να βρεθεί η σχέση που περιγράφει τη συγκέντρωση C_{A_0} συναρτήσει του χρόνου στην έξοδο του αντιδραστήρα (αρχίστε με ένα ισοζύγιο μάζας).

Λύση:

Το ισοζύγιο μάζας για ένα αντιδραστήρα CMFR είναι:

$$QC_{A_0} - QC_{A_e} + Vr(C_{A_e}) = V \frac{dC_{A_e}}{dt}$$

Για ένα συντηρητικό ιχνηθέτη η ταχύτητα αντίδρασης είναι:

$$-r(C_{A_e}) = 0$$

Επομένως το ισοζύγιο μάζας τροποποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned} Q[C_1 + C_2 \sin(\omega t)] - QC_{A_e} &= V \frac{dC_{A_e}}{dt} \\ \Rightarrow [C_1 + C_2 \sin(\omega t)] - C_{A_e} &= \bar{t} \frac{dC_{A_e}}{dt} \\ \Rightarrow \frac{dC_{A_e}}{dt} + \frac{C_{A_e}}{\bar{t}} &= \frac{C_1}{\bar{t}} + \frac{C_2}{\bar{t}} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Η παραπάνω συνήθης διαφορική εξίσωση περιγράφεται και με τη γενική εξίσωση:

$$\frac{dy}{dx} + yf(x) = g(x)$$

η οποία έχει την παρακάτω λύση (Rainville and Bedient, 1974):

$$e^{\int f(x)dx} y = \int e^{\int f(x)dx} g(x)dx + c$$

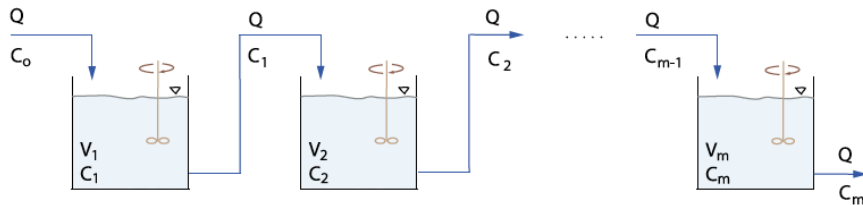
Για τη συγκεκριμένη περίπτωση $y = C_{A_0}$, $x = t$, $f(x) = 1/\bar{t}$ και $g(x) = (1/\bar{t})[C_1 + C_2 \sin(\omega t)]$. Η λύση για τη συγκέντρωση C_{A_0} βρίσκεται ως εξής:

$$\begin{aligned} e^{\int \frac{dt}{\bar{t}}} C_{A_0} &= \int_0^t e^{\int \frac{dt}{\bar{t}}} \left[\frac{C_1}{\bar{t}} + \frac{C_2}{\bar{t}} \sin(\omega t) \right] dt + c \\ \Rightarrow e^{t/\bar{t}} C_{A_0} &= \int_0^t e^{t/\bar{t}} \left[\frac{C_1}{\bar{t}} + \frac{C_2}{\bar{t}} \sin(\omega t) \right] dt + c \\ \Rightarrow e^{t/\bar{t}} C_{A_0} &= C_1 e^{t/\bar{t}} + \frac{C_2}{\bar{t}} \frac{e^{t/\bar{t}}}{(1/\bar{t})^2 + \omega^2} \left[\frac{1}{\bar{t}} \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t) \right] + c \\ \Rightarrow C_{A_0} &= C_1 + \frac{C_2}{1 + (\omega \bar{t})^2} [\sin(\omega t) - \omega \bar{t} \cos(\omega t)] + c e^{-t/\bar{t}} \quad \bullet \end{aligned}$$

όπου το ολοκλήρωμα $\int \exp[t/\bar{t}] \sin(\omega t) dt$ βρέθηκε από τον πίνακα ολοκληρωμάτων στοιχειωδών συναρτήσεων. Επίσης η σταθερά c εξαρτάται από την αρχική συνθήκη.

Συστοιχία αντιδραστήρων CMFR σε σειρά

Σε μια συστοιχία από m αντιδραστήρες συνεχούς λειτουργίας και πλήρους ανάμιξης, σε σειρά, το ρεύμα εξόδου του πρώτου αντιδραστήρα αποτελεί την τροφοδοσία του δεύτερου κλπ.



Συστοιχία από m CMFR αντιδραστήρες σε σειρά.

Εξετάζουμε την περίπτωση που όλοι οι αντιδραστήρες έχουν το ίδιο μέγεθος $V_1 = V_2 = \dots = V_m$:

$$\bar{t} = \bar{t}_1 = \bar{t}_2 = \bar{t}_3 = \dots = \bar{t}_m$$

Όπου $\bar{t}_i = V_i/Q$ είναι ο μέσος χρόνος αντίδρασης/παραμονής σε ένα μεμονωμένο αντιδραστήρα i (και όχι ο μέσος χρόνος αντίδρασης της συστοιχίας).

Για συστοιχία από m αντιδραστήρες CMFR σε σειρά και συνθήκες μόνιμης κατάστασης, στον πρώτο αντιδραστήρα ο λόγος της συγκέντρωσης στο ρεύμα εξόδου ως προς τη συγκέντρωση στο ρεύμα εισόδου για αντίδραση πρώτης τάξης ($A \rightarrow B$) δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{C_{A_1}}{C_{A_0}} = \frac{1}{1 + \lambda_1 \bar{t}_1}$$

Η συγκέντρωση στο ρεύμα εξόδου του δεύτερου αντιδραστήρα ως προς τη συγκέντρωση στο ρεύμα εισόδου του πρώτου αντιδραστήρα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\frac{C_{A_2}}{C_{A_0}} = \frac{C_{A_2}}{C_{A_1}} \frac{C_{A_1}}{C_{A_0}} = \left(\frac{1}{1 + \lambda_1 \bar{t}_2} \right) \left(\frac{1}{1 + \lambda_1 \bar{t}_1} \right) = \left(\frac{1}{1 + \lambda_1 \bar{t}} \right)^2$$

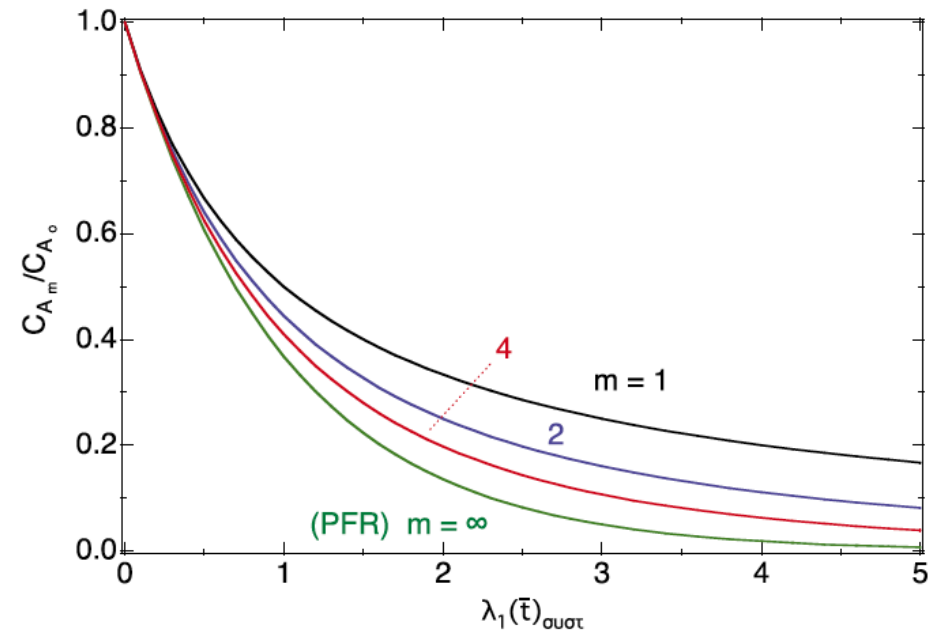
και αντίστοιχα για τον αντιδραστήρα m έχουμε:

$$\frac{C_{A_m}}{C_{A_0}} = \prod_{i=1}^m \left(\frac{1}{1 + \lambda_1 \bar{t}_i} \right) = \left(\frac{1}{1 + \lambda_1 \bar{t}} \right)^m \quad (*)$$

Ο λόγος των συγκεντρώσεων C_{A_m}/C_{A_0} μειώνεται (ή αντίστοιχα η απόδοση της συστοιχίας αυξάνει) όσο μεγαλώνει ο αριθμός των αντιδραστήρων.

Το C_{Am}/C_{Ao} συναρτήσει του $\lambda_1 \bar{t}$ ελαττώνεται εντονότερα όσο μεγαλώνει ο αριθμός των αντιδραστήρων στη συστοιχία. Στο ανώτατο όριο αντιδραστήρων ($m \rightarrow \infty$) η εξίσωση (*) συμπεριφέρεται όπως η εξίσωση για ιδανικό αντιδραστήρα PFR με $(\bar{t})_{PFR} = (\bar{t})_{\text{συστ}}$:

$$\frac{C_{A_e}}{C_{A_o}} = \exp[-\lambda_1 (\bar{t})_{PFR}]$$



Απόδοση συστοιχίας αντιδραστήρων CMFR σε συνάρτηση του του αριθμού m .

Βάσει της εξίσωσης (*) ο μέσος χρόνος παραμονής για κάθε ένα μεμονωμένο αντιδραστήρα βρίσκεται ως εξής:

$$\left(\frac{C_{A_m}}{C_{A_o}}\right)^{1/m} = \frac{1}{1+\lambda_1 \bar{t}}$$

$$\Rightarrow (1+\lambda_1 \bar{t}) \left(\frac{C_{A_m}}{C_{A_o}}\right)^{1/m} = 1$$

$$\Rightarrow \bar{t} = \frac{1}{\lambda_1} \left[\left(\frac{C_{A_o}}{C_{A_m}}\right)^{1/m} - 1 \right]$$

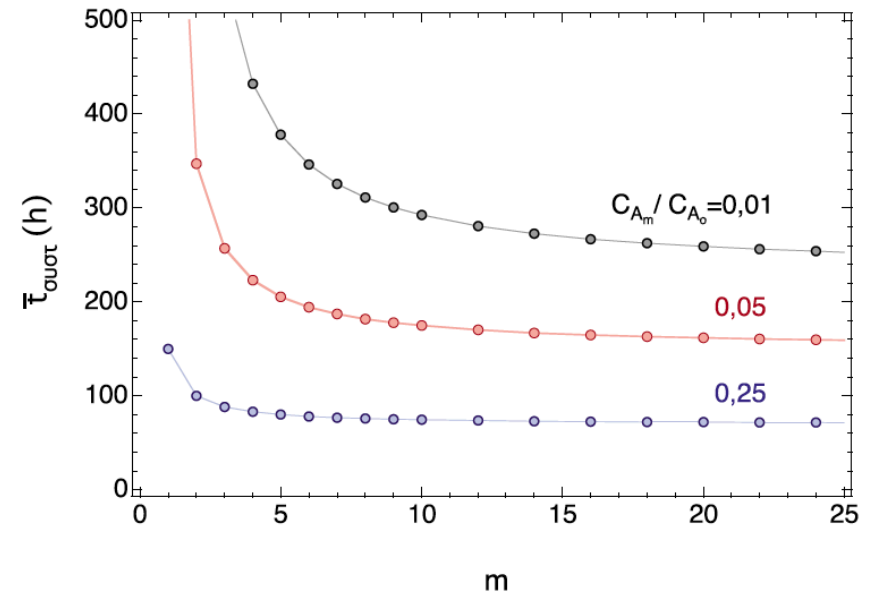
Συνεπώς ο χρόνος αντίδρασης πρώτης τάξης σε συστοιχία από m αντιδραστήρες CMFR είναι:

$$(\bar{t})_{\text{συστ}} = m \bar{t} = \frac{m}{\lambda_1} \left[\left(\frac{C_{A_o}}{C_{A_m}}\right)^{1/m} - 1 \right]$$

Στο ανώτατο όριο αντιδραστήρων ($m \rightarrow \infty$) η παραπάνω εξίσωση συμπεριφέρεται όπως η εξίσωση για ιδανικό αντιδραστήρα PFR:

$$(\bar{t})_{\text{PFR}} = \frac{1}{\lambda_1} \ln \left[\frac{C_{A_o}}{C_{A_e}} \right]$$

Δηλαδή μια συστοιχία από πάρα πολλούς αντιδραστήρες CMFR σε σειρά συμπεριφέρεται όπως ένας ιδανικός αντιδραστήρας PFR.



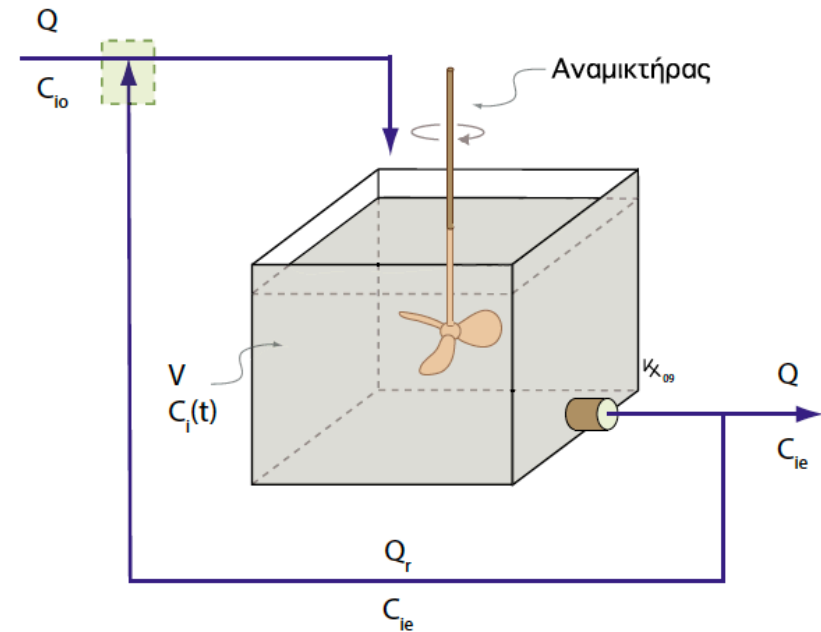
Συνολικός χρόνος αντίδρασης σε συστοιχία αντιδραστήρων CMFR συναρτήσει του αριθμού αντιδραστήρων για διαφορετικά ποσοστά μετατροπής (όπου $\lambda_1 = 0,02$ 1/h).

Αντιδραστήρας CMFR με ανακυκλοφορία

Για την περίπτωση αντιδραστήρα CMFR σε συνθήκες μόνιμης κατάστασης όπου ένα ποσοστό από το ρεύμα εξόδου με ογκομετρική παροχή Q_r ανακυκλώνεται, όπως απεικονίζεται στο σχήμα δεξιά, το ισοζύγιο μάζας είναι:

$$\begin{aligned} [\text{Είσοδος}] - [\text{Έξοδος}] + [\text{Παραγωγή}] &= 0 \\ \Rightarrow (QC_{i_0} + Q_r C_{i_e}) - (Q + Q_r) C_{i_e} + r(C_i)V &= 0 \\ \Rightarrow QC_{i_0} - QC_{i_e} + r(C_i)V &= 0 \end{aligned}$$

Το ισοζύγιο μάζας είναι ανεξάρτητο από την ογκομετρική παροχή ανακυκλοφορίας. Επομένως, η απόδοση σε αντιδραστήρα CMFR με ανακυκλοφορία παραμένει αμετάβλητη για κάθε είδος αντίδρασης.



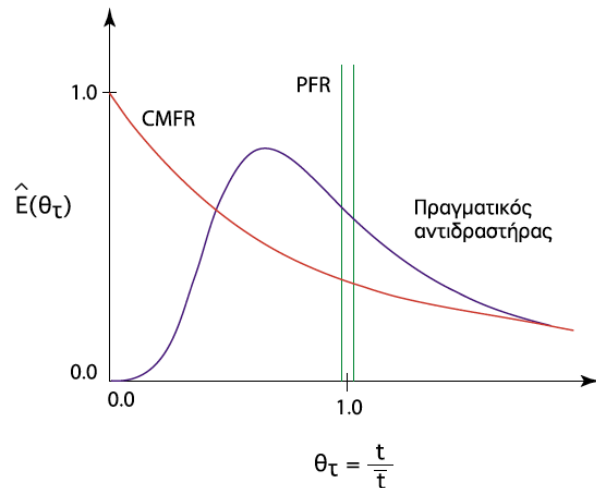
Αντιδραστήρας CMFR με ανακυκλοφορία, όπου από το ρεύμα εξόδου ένα ποσοστό με ογκομετρική παροχή Q_r επιστρέφει στο ρεύμα εισόδου.

Μη-ιδανικοί αντιδραστήρες

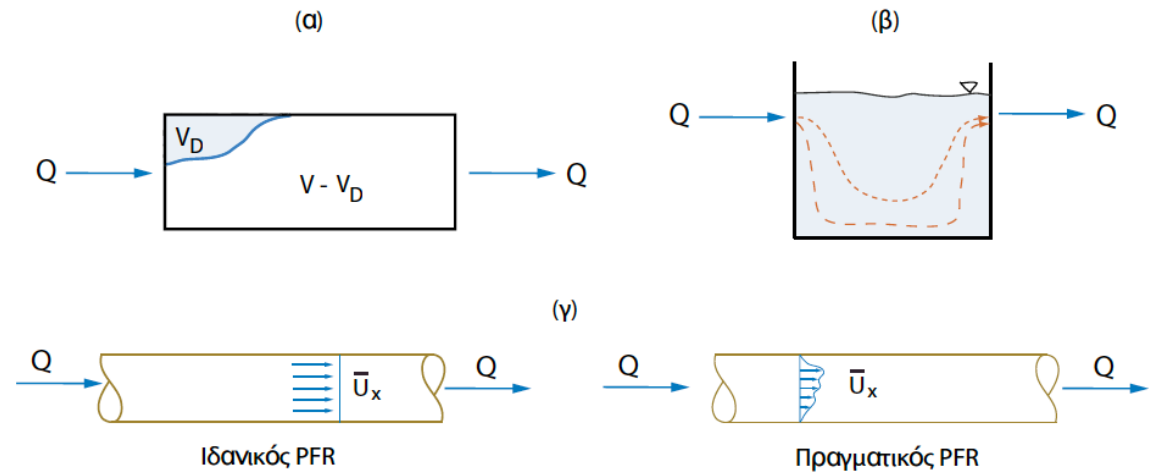
Οι αντιδραστήρες CMBR, CSTR, και PFR αντιπροσωπεύουν συνθήκες **ιδανικής ανάμιξης**.

Στην **πραγματικότητα** οι αντιδραστήρες με συνεχή ροή συμπεριφέρονται σαν ένας συνδυασμός από αντιδραστήρες πλήρους ανάμιξης και εμβολικής ροής.

Αυτό οφείλεται στη **μη-επαρκή ανάμιξη του ρευστού** εξαιτίας της δημιουργίας διαύλων προτίμησης (short circuiting) μέσα στον αντιδραστήρα (παράκαμψη ή βραχυκύκλωση του ρευστού).



Σύγκριση του ρυθμού εξόδου σε διάφορους αντιδραστήρες.



Αποκλίσεις από την ιδανική λειτουργία αντιδραστήρων: (α) στάσιμη περιοχή με όγκο V_D , (β) διάυλοι και υδραυλικό βραχυκύκλωμα και (γ) διάχυση στη διεύθυνση ροής.