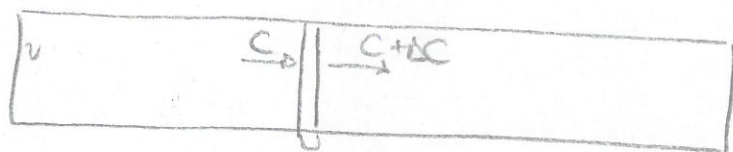


χρήμα

Μοντέλο Plug-Flow (or box model)



Εφαρμογή σε
Περ. Μοντέλο
(Συμπίεσης -
Οξυμάτα)

$V = A \cdot \Delta x$ ο όγκος του στοιχείου.

Συνοψισμός = Είσοδος - Εξοδος $\pm$ Αντίδραση (ως προς το στοιχείο).

$$\frac{d(VC)}{dt} = Q C - Q(C + \Delta C) \pm K \cdot C \cdot V$$

$$V \frac{dC}{dt} = Q C - Q(C + \Delta C) \pm K C V$$

διαχωρίζω για $V = A \Delta x$
 $V = A \Delta x$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{Q C}{V} - \frac{Q(C + \Delta C)}{V} \pm K C \quad \frac{Q}{A} = \bar{v}$$

$$\frac{dC}{dt} = -\bar{v} \frac{\Delta C}{\Delta x} \pm K C$$

$$\frac{dC}{dt} = -\bar{v} \frac{dC}{dx} \pm K C \quad \text{tάν } Q = \text{σταθερό τότε } \frac{dC}{dt} = 0.$$

$$0 = -\bar{v} \frac{dC}{dx} \pm K C \Rightarrow \bar{v} \frac{dC}{dx} = \pm K C$$

$$\frac{dC}{C} = -\frac{K}{\bar{v}} \cdot dx$$

μοτίλο & λίμν (CSTR).

Ξυσώρπωση = Είσοδο - Είσοδο $\pm$ Αρτίδρση

$$\frac{d(CV)}{dt} = Q C_{in} - Q C_{out} \pm k \cdot CV$$

Ότρωρί
 $C_{out} = C$ εκ
ηάηα οαηήηη.

$$V \frac{dC}{dt} = Q C_{in} - Q \cdot C \pm k C V \quad \text{δίαρτί με } V = \text{οαηήηη}$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{Q}{V} C_{in} - \frac{Q}{V} C \pm k C \quad \text{όμω } \frac{1}{\tau} = \frac{Q}{V}$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{C_{in}}{\tau} - \frac{C}{\tau} \pm k C$$

αη έηαηη οαηήηη αηθήηη
 $\frac{dC}{dt} = 0$ ηαη ηύηωη
αη όπρω $C = C_{ss}$.

αη όηη τώτη:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{C_{in}}{\tau} - C \left(\frac{1}{\tau} + k \right)$$

$$\frac{dC}{dt} + C \left(\frac{1}{\tau} + k \right) = \frac{C_{in}}{\tau}$$

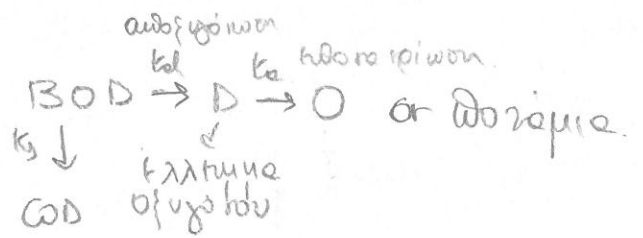
χραηηηή ομωηή
αη τώηη.

$$y' + p(x)y = q(x).$$

$$y = y_0 \exp(-p(x)) + \exp(-p(x)) \int_0^+ \exp(p(x)) q(x) dx$$

$$C = C_0 e^{-(\frac{1}{\tau} + k)t} + \frac{C_{in}}{k\tau + 1} (1 - e^{-(\frac{1}{\tau} + k)t})$$

► Μοντέρο Streeter - Phelps
 Σημαντικό μοντέλο για τις συχμηρώσεις



- για το BOD

$$\bar{v} \frac{dL}{dx} = -k_d \cdot L \quad (1)$$

- για το διαλυμένο οξυγόνο

$$\bar{v} \frac{dC}{dx} = -k_d L + k_a (C_s - C) \quad (2)$$

- για το έλλειμμα του οξυγόνου $D = C_s - C$

$$\bar{v} \frac{dD}{dx} = k_d L - k_a D \quad (3)$$

$$\bar{v} \frac{dL}{dx} = -k_d L \Rightarrow \frac{dL}{L} = -\frac{k_d}{\bar{v}} dx \quad \text{αυτοξυγόνωση και}$$

$$L = L_0 \cdot e^{-\frac{k_d}{\bar{v}} x} \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας στην (3):

$$\bar{v} \frac{dD}{dx} = k_d \cdot L_0 \cdot e^{-\frac{k_d}{\bar{v}} x} - k_a D$$

$$\bar{v} \frac{dD}{dx} + k_a D = k_d L_0 e^{-\frac{k_d}{\bar{v}} x} \quad \text{στη μορφή}$$

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$$y = y_0 \cdot \exp(-\mu(t)) + \exp(-\mu(t)) \int_0^t \exp(\mu(t)) q(t) dt$$

$$D = D_0 e^{-\frac{k_a}{\bar{v}} x} + \frac{k_d L_0}{k_a + k_d} \left(e^{-\frac{k_d}{\bar{v}} x} - e^{-\frac{k_a}{\bar{v}} x} \right)$$

αλλά και $D = C_s - C$ και αντικαθιστώντας.

Απόχλημα - Λίμνη

$$V = 10^6 \text{ m}^3$$

$$T = 0,25 \text{ yr}$$

$$k = 0,01 / \text{day}$$

Υπόθεση με ανανεώσιμο

$$\begin{cases} V = 10 \text{ m}^3 \text{ (βυθότοπος)} \\ C_f = 500 \text{ kg/m}^3 \end{cases}$$

φυτοφάρμακο

Έχουμε: $VC_f = M = (10 \text{ m}^3) / (500 \text{ kg/m}^3) \rightarrow$

$$M = 5000 \text{ kg}$$

ζέλυση

- 1) Ισοζύγιο
- 2) Μέγιστη συγκέντρωση
- 3) Διερργασίες
- 4) $t ? \rightarrow x = 0,1 \text{ mg/L}$

$$1) \frac{d(VC)}{dt} = \cancel{Q C_{in}} - \cancel{Q C} - \cancel{kVC} \rightarrow \frac{dC}{dt} = -\frac{C}{T} - kC = -\left(\frac{1}{T} + k\right) C$$

$$\rightarrow C = C_0 \cdot e^{-(\frac{1}{T} + k)t}$$

2) Μέγιστη συγκέντρωση Έχουμε όταν: $C_{max} = C_0 = \frac{M}{V_{diffus}} = \frac{5000 \text{ kg}}{10^6 \text{ m}^3} \rightarrow C_0 = 5 \text{ mg/L}$

3) Ανάλυση Διερργασιών - Ρυθμός:

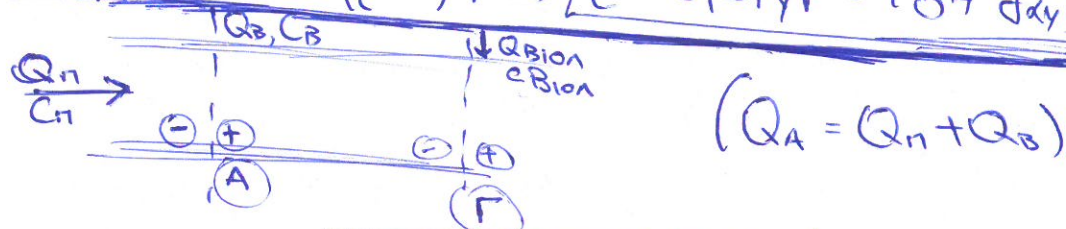
- QC (ζέλυση)
- kVC (αποδόμηση)

Αρα: - για ζέλυση: $\frac{dC}{dt} = -\frac{C}{T} = -\frac{1}{0,25} C = -4 C \xrightarrow{\text{για } C_0} -20 \text{ mg/L} \cdot \text{yr}$

- για αποδόμηση: $\frac{dC}{dt} = -kC = -0,01 / \text{day} \cdot 365 \frac{\text{d}}{\text{yr}} C = -3,65 C \rightarrow -18,25$

4) $C = C_0 e^{-(\frac{1}{T} + k)t} \rightarrow \ln C = \ln C_0 - \left(\frac{1}{T} + k\right)t \rightarrow t = 0,51 \text{ yr} = 187 \text{ days}$

Ποτάμι με PFR:



$$Q_A C_A^+ = Q_n C_n + Q_B C_B \rightarrow C_A^+ = \frac{Q_n C_n + Q_B C_B}{Q_n + Q_B}$$

Ισοζύγιο Μάζας:

$$\frac{\Delta(VC)}{\Delta t} = Q(C - Q(C + \Delta C)) - k_s C V \rightarrow$$

$$\frac{dCV}{dt} = Q \Delta C - k_s C V \rightarrow \frac{dC}{dt} = -\frac{Q \Delta C}{V} - k_s C \rightarrow$$

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{u \Delta C}{\Delta x} - k_s C \rightarrow \frac{dC}{dt} = -u \frac{\Delta C}{\Delta x} - k_s C \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dC}{dt} = -u \frac{dC}{dx} - k_s C}$$

ie steady States: $\frac{dC}{dt} = 0 \rightarrow u \frac{dC}{dx} = k_s C \rightarrow C(x) = C(x_0) \cdot e^{-\frac{k_s x}{u}}$

Αναλυτική λύση

echatira

Ευτροφισμός Λιμνών

Ταμειωμένος ποταμός
 $H = 91 \text{ m}$ (μεσοβάθος)
 $V = 470 \text{ km}^3$, $Q = 40,15 \cdot 10^9 \text{ m}^3/\text{year}$
 $\tau = 6,7 \text{ yr}$, $P_0 = 9 \text{ kg/L}$
 $L = 15,3 \text{ gP/m}^2 \cdot \text{yr}$ φορτίο
 $k_s = 0,005/\text{day}$

- Ζητούμενα : 1) Ισοζύγιο P μαζας φωσφόρου
 2) $P_{ss} = ?$, $t_{95} = ?$
 3) Μείωση L κατά 50%, $P_{ss}^{\text{new}} = ?$



Λύση : 1) $\frac{d(VP)}{dt} = QP_{in} - QP - k_s VP$

2) Steady state : $\frac{dP}{dt} = 0 \rightarrow QP_{in} = P_{ss} (Q + k_s V) \rightarrow$
 $P_{ss} = \frac{QP_{in}/V}{(Q + k_s V)/V} \rightarrow \boxed{P_{ss} = \frac{P_{in}}{1 + k_s \cdot T}}$

$P_{in} = \frac{L \cdot A}{Q} = \frac{15,3 \frac{\text{g}}{\text{m}^2 \cdot \text{yr}} \cdot \left(\frac{V}{H} = \frac{470 \cdot 10^9 \text{ m}^3}{91 \text{ m}} \right)}{40,15 \cdot 10^9 \text{ m}^3/\text{yr}}$
 $\rightarrow P_{in} = 1130 \text{ kg/L}$

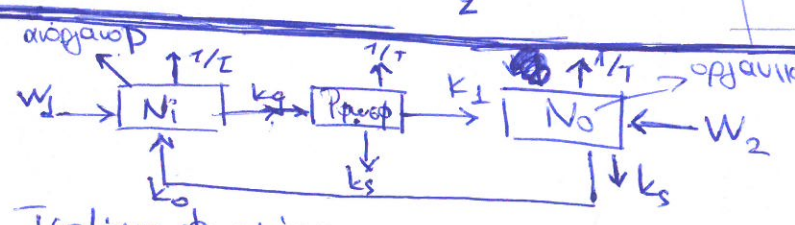
άρα, $P_{ss} = \frac{1130 \text{ kg/L}}{1 + 0,005/\text{day} \times 365 \frac{\text{days}}{\text{yr}} \times 6,7 \text{ yr}} \rightarrow \boxed{P_{ss} = 85,4 \frac{\text{kg}}{\text{L}}}$

Για $t_{95\%}$ $\frac{C - C_0}{C_{ss} - C_0} = 0,95 \rightarrow P = 0,05 P_0 + 0,95 P_{ss} \rightarrow$
 Άρα: $0,05 = e^{-(\frac{1}{T} + k_s)t_{95\%}} \rightarrow \ln 0,05 = \ln e^{-(\frac{1}{T} + k_s)t_{95\%}}$

$\rightarrow t_{95\%} = -\frac{\ln 0,05}{k + \frac{1}{T}} \rightarrow \boxed{t_{95\%} = 1,5 \text{ yr}}$

3) $P_{ss}^{\text{new}} = \frac{P_{in}^{\text{new}}}{1 + k_s T}$, όπου $\frac{P_{in}}{2}$, οπότε: $P_{ss}^{\text{new}} = \frac{0,5 P_{in}}{1 + k_s T} = 42,7 \text{ kg/L}$

Ευτροφισμός
 Λίμνη Αγίας
 $t = 2 \text{ m}$
 $V = 550000 \text{ m}^3$
 $\tau = 10 \text{ day}$
 $P_0 = 90 \text{ kg/L}$



- 1) Ισοζύγιο
 2) C_{ss} : $k_1 = 0,4 \text{ L/kg} \cdot \text{day}$
 $k_2 = 904 \text{ L/kg} \cdot \text{day}$
 $k_3 = 0,002/\text{day}$
 $k_4 = 0,9/\text{day}$
 $W_1 = 1350 \text{ kg/day}$
 $W_2 = 500 \text{ kg/year}$

Αόργανο : $\frac{dVNi}{dt} = W_1 - QNi + k_0 V N_0 - k_6 V P Ni \rightarrow$

$\frac{dNi}{dt} = \frac{W_1}{V} - \frac{Ni}{\tau} + k_0 N_0 - k_6 P Ni \quad (1)$

$\rightarrow \frac{dVP}{dt} = -QP - k_1 PV + k_6 P Ni - k_5 PV \rightarrow \frac{dP}{dt} = -\frac{P}{\tau} - k_1 P + k_6 P Ni - k_5 P \quad (2)$

οργανικό : $\frac{dVNo}{dt} = W_2 - N_0 Q + k_1 PV - k_0 V N_0 Ni - k_5 N_0 V \rightarrow$

$\frac{dNo}{dt} = \frac{W_2}{V} - \frac{N_0}{\tau} - k_1 P - k_0 N_0 Ni - k_5 N_0 \quad (3)$

Άρα σε steady state : (3) : $N_0 (\frac{1}{\tau} + k_1 P + k_0) = \frac{W_2}{V} + k_1 P \rightarrow 1002 N_0 = 2,45 + 0,4P$

(1) : $Ni (\frac{1}{\tau} + k_6 P) = \frac{W_1}{V} + k_0 N_0 \rightarrow Ni (91 + 0,04P) = 8,22 + 0,9N_0$

(2) : $P (\frac{1}{\tau} + k_1 + k_5) = k_6 P Ni \rightarrow 0,802P = 0,04P Ni \rightarrow \boxed{Ni = 12,55 \text{ kg/L}}, \boxed{No = 28,08 \text{ kg/L}}$

Συνολικό Ισοζύγιο Μαζας Φωσφόρου : $\frac{dN_{total}}{dt} = \frac{dNi}{dt} + \frac{dP}{dt} + \frac{dNo}{dt} \rightarrow$
 $\frac{dN_{tot}}{dt} = \frac{W_1}{V} + \frac{W_2}{V} - \frac{Ni}{\tau} - \frac{No}{\tau} - \frac{P}{\tau} - k_5 P - k_5 N_0 \rightarrow \frac{dN_{total}}{dt} = W_{total} - N_{total} - k_5 P - k_5 N_0$

06/10

echatira

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΕ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

► ΑΣΚΗΣΕΙΣ #2.

- ①. Θέλουμε να υπολογίσουμε την ισορροπική μάζας α mg/d ενός ρυτίου που διακίτται από μέσα σε δύο δοχεία.

$$\frac{dC}{dx} = 1 \mu\text{g} / \text{L} \cdot \text{cm}$$

$$d = 10 \text{ cm}$$

$$D = 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s} \text{ και } A = 3,14 \text{ cm}^2$$

Από τον 1^ο Νόμο Διάχυσης του Fick έχουμε ότι:

$$J = -D \cdot A \frac{dc}{dx} = -(10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}) (3,14 \text{ cm}^2) \cdot \left(\frac{1 \mu\text{g}}{\text{L} \cdot \text{cm}} \cdot \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ cm}^3} \cdot \frac{86400 \text{ s}}{1 \text{ d}} \right)$$

$$\Rightarrow \underline{J = 271296 \cdot 10^{-8} \text{ mg/d}}$$

- ②. μοριακή διαχυσιότητα μεσαφίτης: $D = 0,63 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$.

$$C_0 = ~~1 \text{ mg/L}~~ 1 \text{ mg/L}$$

$$A = 0,1 \text{ m}^2$$

$$\text{πλάτος υφρού φιλμ } 60 \mu\text{m} = dx$$

θεωρούμε μηδενική συχίτρωση μεσαφίτης στο έπτερο

Από τον 1^ο νόμο διάχυσης του Fick:

$$J = -D \cdot A \cdot \frac{dc}{dx} \quad \text{για τον υπολογισμό της ισορροπικής μάζας.}$$

γιατί στο έπτερο έχουμε συχίτρωση 0 και θεωρούμε τη μέση τιμή 1 mg/L

$$= -0,63 \cdot 10^{-5} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \cdot 0,1 \text{ m}^2 \cdot \left(\frac{0 - 1 \frac{\text{mg}}{\text{L}}}{60 \cdot 10^{-6} \text{ m}} \cdot \frac{10^4 \text{ cm}^2}{1 \text{ m}^2} \cdot \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ cm}^3} \cdot \frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}} \right)$$

$$\Rightarrow \underline{J = 0,00105 \text{ mg/s}}$$

οπότε για να πάρουμε την ισορροπική μάζας, ο χρόνος που χρειάζεται είναι:

$$t = \frac{\text{mass}}{\text{flux rate}} = \frac{m}{J} = \frac{1 \text{ mg}}{0,00105 \frac{\text{mg}}{\text{s}}} \Rightarrow \underline{J = 15,9 \text{ min}}$$

4) Θέλουμε να υπολογίσουμε το συγκεκριμένη διακυσία ενός οργανισμού υψώθ. & ένα υδροβιότοπο.
 Θυμούμε:

$$C_{max} \text{ διαλυτ.} = 1780 \mu\text{g/L}$$

$$C_0 = 5 \mu\text{g/L} \text{ (αρχική συγκέντρωση)}$$

$$t = 2 \text{ y}$$

Εάν υψώθ. μήτηρ η συγκέντρωση θα ήται 50% στο μέγιστο & απόσταση 10cm από την επιφάνεια:

$$\mu\text{g/L} = \text{ppb}$$

Χρησιμοποιούμε το 2^ο νόμο του Fick γιατί εστιάζει το χρόνο.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{C - C_0}{C_{\text{max}} - C_0} = \text{erf} \left(\frac{z}{\sqrt{4Dt}} \right)$$

για επιφάνεια έχουμε $C = 1780 \mu\text{g/L}$ | 2

▶ ΑΣΚΗΣΕΙΣ #3

1) $C_0 = 10 \mu\text{g/L}$ μιας τοξικής ύλης & μία λίμνη
 $k = 0,005/\text{day}$ σταθερά βιοδιάσπασης του βαθμού
 $z = 100$ μέτρων - ο χρόνος διάχυσης μέσα στη λίμνη
 $C_{\text{th}} = 50 \mu\text{g/L}$ η συγκέντρωση στις κρύες.

! Θέλουμε να υπολογίσουμε τη μεταβολή της συγκέντρωσης της τοξικής ουσίας στη λίμνη με το χρόνο.

Το ισοζύγιο μάζας ενός πυδανού σε μία λίμνη είναι:

$$\text{Συσσώρευση} = \text{Είσοδος} - \text{Εξοδος} \pm \text{Αναδράσεις.}$$

$$V \frac{dC}{dt} = Q_{in} \cdot C_{in} - C_{out} \cdot Q_{out} - k \cdot V \cdot C$$

↳ γιατί έχουμε βροδωδωση
πρώτου βαθμού.

Θα υποθέτουμε - $V = \text{σταθερό}$

- σταθερή ροή $Q_{in} = Q_{out}$

- πλήρη ανάμειξη

- $C_{out} = C_{lake}$

τότε:

$$V \frac{dC}{dt} = Q_{in} \cdot C - C \cdot Q - k \cdot C \cdot V \quad (1)$$

Για να υπολογίσουμε τη μεταβολή στο συχνηρωσος
στη λίμνη με το χρόνο πρέπει να λάβουμε υπόψη
διαφορετική ιδιαιτερώσης:

- διακμθίση που εκκύνεται απαρτία στη λίμνη $k=0$

$$(1) \quad V \frac{dC}{dt} = -CQ \xrightarrow[\text{με } V]{\text{διαίρω}} \frac{dC}{dt} = -\frac{Q}{V} \cdot C \Rightarrow \frac{dC}{dt} = -\frac{1}{\tau} \cdot C$$

συντηρούμε με ορισμένη
συνθήκη $t=0 \rightarrow C_0$
 $t \rightarrow C$

$$\int_{C_0}^C \frac{dC}{C} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt \Rightarrow \ln \frac{C}{C_0} = -\frac{1}{\tau} \cdot t \Rightarrow \underline{C = C_0 \cdot e^{-(t/\tau)}}$$

- για τήτρηό χημικό το οποίο εκκύνεται στη λίμνη

$$(1) \Rightarrow V \frac{dC}{dt} = -Q \cdot C - k \cdot C \cdot V \quad \text{διαίρω με } V$$

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{Q}{V} \cdot C - k \cdot C$$

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{1}{\tau} \cdot C - k \cdot C \Rightarrow \frac{dC}{dt} = -\left(\frac{1}{\tau} + k\right) \cdot C$$

συντηρητικό με οριακές συνθήκες $t=0 \rightarrow C_0$
 $t \rightarrow \infty \rightarrow C$

$$\int_{C_0}^C \frac{dC}{C} = -\left(\frac{1}{\tau} + k\right) \cdot \int_0^t dt$$

$$\ln \frac{C}{C_0} = -\left(\frac{1}{\tau} + k\right) \cdot t$$

$$C = C_0 \cdot e^{-\left(\frac{1}{\tau} + k\right) \cdot t}$$

για αδιάκριση του συστήματος από ένα συνεχές φορτίο
 (χωλ γύματα ιδόλης)

$$V \cdot \frac{dC}{dt} = C_{in} \cdot Q - C \cdot Q - k \cdot C \cdot V \quad \text{διαίρω με } V$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{C_{in}}{V} \cdot Q - \frac{Q}{V} \cdot C - k \cdot C$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{C_{in}}{\tau} - \frac{C}{\tau} - k \cdot C \quad (2)$$

→ αν δείσουμε σταθερή συνθήκη $dC/dt = 0$

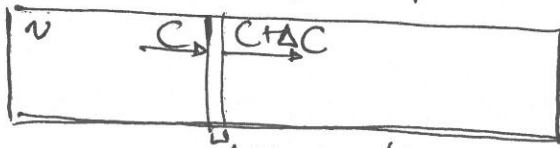
→ αν δεν δείσουμε σταθερή συνθήκη τότε
 πρέπει να υπολογίσουμε την αναλυτική λύση
 μιας διαφορικής ομογενούς εξίσωσης 1^{ου} βαθμού.
 της μορφής:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$$y = y_0 \cdot e^{-p(x)} + e^{-p(x)} \cdot \int_0^x e^{p(t)} q(t) dt$$

②. Σω $k = 0,2/\text{day} \rightarrow$ απύθρευση 1ου βαθμού βιοδιασάφησης
 μεση ταχύτητα υδατοαγωγού $\bar{v} = 0,5 \text{ m/s}$ και
 στο $x=0 \rightarrow C_0 = 100 \text{ mg/l}$

για να ερπύφουμε το 160 ζύγιο μάζας στο υδρεύμε
 θα το κέρουμε με το σύστημα ~~plug~~ plug-flow.



Δx ο όγκος πύθνας $V = A \Delta x$.

απόφα θα ερπύφουμε σταθερή συνθήκη $dC/dt = 0$.

ΓΕΛ:

Συνώφηση = Είσοδη - Εξοδη $\pm$ Ανάφησης.

$$v \cdot \frac{dC}{dt} = C \cdot Q - Q \cdot (C + \Delta C) - k \cdot C \cdot V$$

$$V \frac{dC}{dt} = C \cdot Q - Q \cdot (C + \Delta C) - k \cdot C \cdot V$$

διαφύ με τον
σταθερό όγκο
πύθνας $V = A \Delta x$

$$\frac{dC}{dt} = - \frac{Q \cdot \Delta C}{A \Delta x} - kC$$

όφως $\frac{Q}{A} = \bar{v}$ η μεση
ταχύτητα του υδατοαγωγού

$$\frac{dC}{dt} = -\bar{v} \cdot \frac{\Delta C}{\Delta x} - kC$$

$$\frac{dC}{dt} = -\bar{v} \cdot \frac{dC}{dx} - kC \quad dC/dt = 0$$

$$0 = -\bar{v} \cdot \frac{dC}{dx} - kC \Rightarrow \bar{v} \frac{dC}{dx} = -kC$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{C} = -\frac{k}{\bar{v}} \cdot dx$$

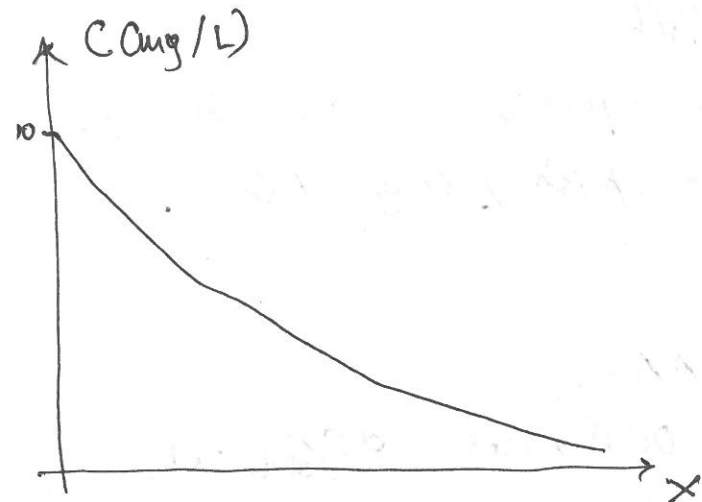
απαφνώφουμε με οριακή συνθήκη:
 $x=0 \rightarrow C_0$
 $x \rightarrow C$

$$\int_{C_0}^C \frac{dC}{C} = -\frac{k}{\bar{v}} \cdot \int_0^x dx \Rightarrow \ln \frac{C}{C_0} = -\frac{k}{\bar{v}} \cdot x$$

$$\Rightarrow C = C_0 \cdot e^{-\frac{k}{\bar{v}} \cdot x} \Rightarrow C = 100 \cdot e^{-\left(\frac{0,2}{0,5}\right) \cdot x}$$

όφως $t = \frac{x}{\bar{v}}$ χρόνος μεταφίμησης

για το υδροφίλο εν συγκρίσεων σε σχέση με το χρόνο / ^{απόσταση} παρατηρούμε ότι μειώνεται εκθετικά, αυτό εν αρχή συγκρίσεων C_0 .



3) για αντίδραση 2^{ου} βαθμού θεωρούμε ότι έχουμε γραμμικό μέγεθος.

- Βακτή - Πλήρης ανάμιξη.

$$\frac{d(VC)}{dt} = -kVC^2 \Rightarrow V \frac{dC}{dt} = -kVC^2 \text{ διαίρω με } V$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dt} = -kC^2 \Rightarrow \frac{dC}{C^2} = -k dt \quad \begin{array}{l} \text{συνεχίζουμε με} \\ \text{ορισμένη συνθήκη} \\ t=0 \rightarrow C_0 \\ t \rightarrow C \end{array}$$

$$\int_{C_0}^C \frac{dC}{C^2} = -k \int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{C} + \frac{1}{C_0} = -kt$$

- CSTR - Πλήρης ανάμιξη ($\tau = V/Q$) & $Q_{in} = Q_{out}$!

$$\frac{d(VC)}{dt} = Q \cdot C_{in} - Q C_{out} - k \cdot VC^2 \text{ διαίρω με } V \text{ συνιστώ}$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{Q}{V} \cdot C_{in} - \frac{Q}{V} \cdot C_{out} - k \cdot C^2$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{C_{in}}{\tau} - \frac{C_{out}}{\tau} - kC^2 \Rightarrow \frac{dC}{dt} = (C_{in} - C_{out}) \frac{1}{\tau} - kC^2$$

+ υποθέτουμε 1-η συμμεταφορά και διασπορά

$$\frac{d(VC)}{dt} = W - C \cdot Q - K_S \cdot VC$$

$$V = \text{σταθ}$$

$$\cancel{\frac{V}{V}} \frac{dC}{dt} = \frac{W}{V} - C \frac{Q}{V} - \cancel{K_S \cdot C \cdot \cancel{V}}$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{W}{V} - C \frac{Q}{V} - K_S \cdot C$$

$$\text{όπως } \tau = \frac{Q}{V}$$

χρόνος παραγωγής

$$\frac{dC}{dt} = \frac{W}{V} - \frac{C}{\tau} - K_S C$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{W}{V} - \left(\frac{1}{\tau} + K_S \right) \cdot C \quad (1)$$

$$C = C_0 e^{-\left(\frac{1}{\tau} + K_S\right)t} + \frac{C_{in}}{1 + K_S \tau} \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{\tau} + K_S\right)t} \right) \quad \begin{matrix} \text{γιατί} \\ W = C_{in} Q_{in} \end{matrix}$$

Είναι άριστη λύση, γραμμική ομογενής διαφορική εξίσωση με μορφή $y' + p(x)y = q(x)$ με σταθερά μορφή:

$$y = y_0 \cdot e^{-P(t)} + e^{-P(t)} \int_0^t e^{P(t)} q(x) dt, \quad \text{με } q(x) = \frac{W}{V}$$

$$P(t) = \int P(x) dt \quad (1)$$

$$P(x) = \frac{1}{\tau} + K_S \quad (2)$$

από (1) και (2).

$$P(t) = \int P(x) dt = \int_0^t \left(\frac{1}{\tau} + K_S \right) dt = \left(\frac{1}{\tau} + K_S \right) t$$

$$C = C_0 e^{-\left(\frac{1}{\tau} + k_s\right)t} + e^{-\left(\frac{1}{\tau} + k_s\right)t} \cdot \int_0^t e^{\left(\frac{1}{\tau} + k_s\right)t} \cdot \frac{w}{V} dt \quad \rightarrow \frac{C_{in}}{\tau}$$

$$C = C_0 e^{-\left(\frac{1}{\tau} + k_s\right)t} + \frac{w}{V} \frac{e^{-\left(\frac{1}{\tau} + k_s\right)t}}{\frac{1}{\tau} + k_s} \int e^{\left(\frac{1}{\tau} + k_s\right)t} d\left(\frac{1}{\tau} + k_s\right)t$$

$$C = C_0 e^{-\left(\frac{1}{\tau} + k_s\right)t} + \frac{w}{V} \frac{1}{\left(\frac{1}{\tau} + k_s\right)} (1 - e^{-\left(\frac{1}{\tau} + k_s\right)t})$$

Το κοζύγιο μάζας του φωσφόρου για τη λίμνη Λυκαβηθία, είναι το εξής:

$$\frac{d(C \cdot V)}{dt} = W - K_s \cdot V \cdot C - Q \cdot C$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dt} = \frac{W}{V} - K_s \cdot C - \frac{Q}{V} \cdot C$$

όπου $\tau = Q/V$ ο χρόνος παραμονής.

$$\frac{dC}{dt} = \frac{W}{V} - \frac{Q}{\tau} - K_s \cdot C$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dt} = \frac{W}{V} - \left(\frac{1}{\tau} + K_s \right) \cdot C$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dt} + \left(\frac{1}{\tau} + K_s \right) \cdot C = \frac{W}{V} \quad \text{όπου } W = C_{in} \cdot Q_{in}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dC}{dt} + \left(\frac{1}{\tau} + K_s \right) \cdot C = \frac{C_{in}}{\tau}} \quad (1) \quad \frac{dC}{dt} + a \cdot C = \frac{C_{in}}{\tau}$$

Η διαφορική εξίσωση (1) είναι 1^η τάξης, γραμμική μη-ομογνή.

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x)$$

Εάν $Q(x) = 0$ τότε η διαφ. εξίσωση είναι ομογνή

Θέτουμε: $y = z \cdot e^{-\int P(x) dx}$

Παραγωγίζοντας προκύπτει: $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \cdot e^{-\int P(x) dx} - z P(x) e^{-\int P(x) dx}$

αναδιατάσσοντας τις τιμές των y και dy/dx παίρνουμε την
ισοδυναμία εξίσωση χωριστέων μεταβλητών.

$$\frac{dz}{dx} e^{-\int P(x) dx} = Q(x)$$

ωθ' όσον: $z = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} + C$

βλ η γενική λύση της εξίσωσης είναι:

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right)$$

Κεφάλαιο 3 - Κινητική Χημικών Αντιδράσεων

συνάρτηση ταχύτητας κατά Arrhenius

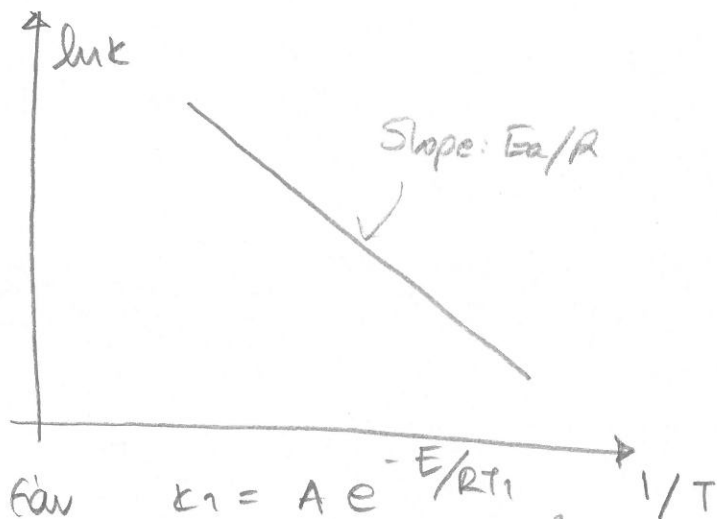
$$k = A e^{-\frac{E_a}{RT}}$$

E_a : ενέργεια ενεργοποίησης

R : σταθερά αερίων

T : θερμοκρασία

A : σταθερά αντίδρασης



εάν

$$k_1 = A e^{-E/RT_1}$$

$$k_2 = A e^{-E/RT_2}$$

$$\Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = e^{\frac{E}{R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)}$$

χρησιμοποιώ-
με ομοίως:

$$\Rightarrow \ln k_1 - \ln k_2 = \frac{E}{R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$$

Κεφάλαιο 5 - Συμβασιολύσεις Αποβλήτων σε Ποτάμια και Ειδική Ποταμινή

! Ο υποφρενικός είναι απορριπτικός σε ριχντά ύδατα σε σύγκριση με τις λίμνες.

Αρχίζουμε κατασκευάζοντας μια εξίσωση ισορροπίας μάζας σε έναν όγκο μήχους (στοιχειώδους όγκου) του όγκου ρύματος. Αν το ρύμα είναι αρκετά χρήσιμο μπορούμε να θεωρήσουμε το ρύμα ως ένα απλό τμήμα τμήματος ρύματος.

$$\text{Συνίστημι} = \text{Είσοδος} - \text{Έξοδος} \pm \text{Αντίδρασης}$$

$$\frac{d(VC)}{dt} = QC - Q(C+\Delta C) \pm rV \quad \text{διαφορούμε με τον όγκο μήχους } V=A\Delta x$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{QC}{A\Delta x} - \frac{QC}{A\Delta x} - \frac{Q\Delta C}{A\Delta x} \pm r \quad \text{θεωρούμε } \Delta x \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{Q}{A} \frac{\partial C}{\partial x} \pm r \quad \text{όμως } v = Q/A$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -v \frac{\partial C}{\partial x} \pm r \quad \text{εάν } \partial C / \partial t = 0 \text{ για συνθήκες σταθερής ροής τότε}$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \pm r/v \Rightarrow \int \partial C = \pm 1/v \int r \partial x$$

εάν $r = -k \cdot C$ πρώτης τάξης αντίδραση μπορούμε να ισχύει:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = -\frac{k}{v} \cdot C \Rightarrow \int_0^x \frac{\partial C}{C} = -\frac{k}{v} \int_0^x \partial x \Rightarrow \ln C \Big|_0^x = -\frac{kx}{v} \Big|_0^x$$

$$\ln \frac{C}{C_0} = -\frac{kx}{v} \Rightarrow \underline{C = C_0 \exp(-kx/v)}$$

► Όταν δεν ισχύουν οι παραδοχές που έχουμε κάνει μέχρι τώρα, δηλαδή θεωρούμε ότι η απορροή και το τμήμα της διασποράς αυξάνονται με την απόσταση του ποταμού.

$$Q = Q_0 \cdot \exp(qx)$$

Δείξτε το ισχύον μέγεθος στον ημιωλικό όγκο (αίχου) μεταβάλλεται ως:

$$\frac{\partial (VC)}{\partial t} = QC - (Q + \Delta Q)(C + \Delta C) - rV$$

$$V \frac{\partial C}{\partial t} = \cancel{QC} - \cancel{QC} - Q\Delta C - \Delta Q \cdot C - \Delta Q \cdot \Delta C - rV$$

$$V \frac{\partial C}{\partial t} = -\Delta Q C - Q\Delta C - \Delta Q \Delta C - rV$$

διακρίβω με τον ημιωλικό όγκο $V = A\Delta x$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\Delta Q C}{A \Delta x} - \frac{Q \Delta C}{A \Delta x} - \frac{\Delta Q \Delta C}{A \Delta x} - r$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{C}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q}{A} \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial Q \partial C}{A \partial x} - r$$

ο όρος $\frac{\partial Q \partial C}{A \partial x}$ θεωρείται αμελητέο

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{1}{A} \frac{\partial (QC)}{\partial x} - r$$

$$0 = -\frac{1}{A} \frac{\partial (QC)}{\partial x} - r$$

αν έχουμε σταθερή ροή τότε η γενική εξίσωση για μονοδιάστατη μεταφορά σε ένα άκρο είναι η διασπορά.

► ΕΞΙΣΩΣΗ STREETER - PHELPS.

$$\bar{v} \frac{dL}{dx} = -k_d \cdot L$$

για το διαλυμένο οξυγόνο όπου μπορούμε να δούμε

$$\bar{v} \frac{dC}{dx} = \underbrace{-k_d \cdot L}_{\text{αποξυγόνωση}} + \underbrace{k_a (C_s - C)}_{\text{παραγωγή}}$$

Η αποξυγόνωση και η παραγωγή είναι δύο αντίθετες διαδικασίες.

Προσέχουμε να έχουμε το ισχύον (αν έλαγαμε το D.O. διαλυμένου οξυγόνου), έτσι:

$$\bar{v} \frac{dC}{dx} = k_a L - k_a (C_s - C)$$

↖ ποσότητα οξυγόνου BOD
↗ οξυγόνωση υφιστάμενου D.O.

με $\bar{v} = Q/A$

! Το απόστατο BOD (L) μειώνεται εκθετικά με την κατά την αδόσηση $L = L_0 \cdot e^{-(k_d x / \bar{v})}$

! Η συζύτηρωση του κλήματος του διαλυμένου οξυγόνου αυξάνεται σε ένα μέγιστο και κρίσιμο έλκμα (D_c) σε μία κρίση αδόσηση (x_c) και μετά μειώνεται πάλι στο 0) καθώς $x \rightarrow \infty$.

! Η συζύτηρωση του διαλυμένου οξυγόνου μειώνεται σε ένα ελάχιστο και μετά αυξάνεται (όπως φαίνεται στην γραμμή καμπύλη υποχώρησης DO).

!! Το ρύμα αυτοκαθαρίζεται με επανέκδοση μετά τη σημαντική κρήνη κοροής BOD στο $x=0$.

$x=0$		$x=x_c$		$x > x_c$
	$\underline{k_d > k_a}$	$\underline{k_d = k_a}$	$\underline{k_d < k_a}$	

Στην κρήνη κρήνη θεωρώ ότι $dD/dx = 0$

$$\bar{v} \frac{dD}{dx} = k_d L - k_a D \Rightarrow \boxed{k_d L = k_a D} \text{ για } \underline{x = x_c}$$

Κεφάλαιο 2- Μεταφορά Μάζας:

①

► 1-D τξίωση συμμεταφοράς



Q : η θεροχή ρροϋ

$\bar{v}$: η μέση ταχύτητα του ρροϋ

C : η συχίτηρωση του ρυθιστή.

$$\left. \begin{array}{l} Q \\ \bar{v} \\ C \end{array} \right\} \boxed{v = Q/A}$$

Το ισοζύγιο μάζας που περιγράφει το φαινόμενο είναι:

$$\frac{\Delta(V \cdot C)}{\Delta t} = \text{Είσοδος μάζας} - \text{Εξοδος μάζας}$$

(αφού δεν υπάρχει κείνοια αντίδραση).

$$\text{Είσοδος μάζας} = Q \cdot C_{in} = \bar{v} \cdot A \cdot C_{in}$$

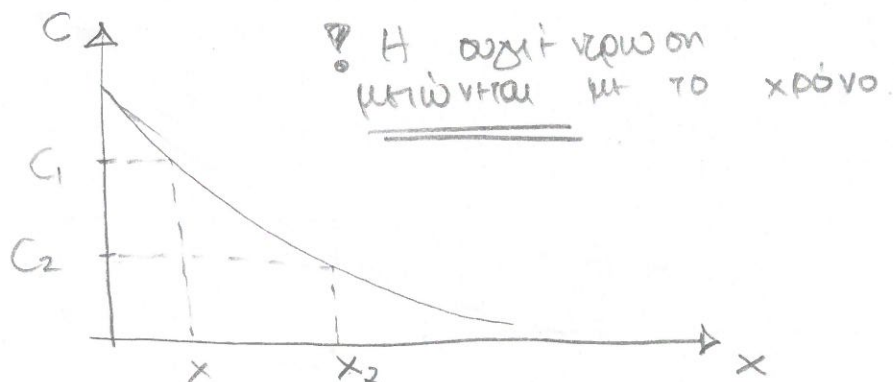
$$\text{Εξοδος μάζας} = Q \cdot C_{out} = \bar{v} \cdot A \cdot C_{out}$$

$$\frac{\Delta(V \cdot C)}{\Delta t} = Q C_{in} - Q C_{out} \quad \text{όμως, } V = A \Delta x = \text{σταθερό.}$$

$$V \frac{\Delta C}{\Delta t} = Q C_{in} - Q C_{out} \Rightarrow V \frac{\Delta C}{\Delta t} = Q \Delta C$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{Q}{V} \Delta C \Rightarrow \frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{Q}{A \cdot \Delta x} \Delta C \quad \text{επειδή}$$

$$\boxed{\frac{\Delta C}{\Delta t} = \bar{v} \frac{\Delta C}{\Delta x}}$$



δηλαδή

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C_1 - C_2}{x_1 - x_2} > 0 \quad \text{και} \quad \bar{v} > 0 \quad \text{όμως} \quad \left. \begin{array}{l} \text{αδότη με} \\ \text{διόρθωση ισορροπία} \end{array} \right\}$$

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} < 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\bar{v} \frac{\partial C}{\partial x}$$

μεταβλητή σε χρόνο
συμμετοφρά

$$\text{Στημαία ροή} = Q \cdot C$$

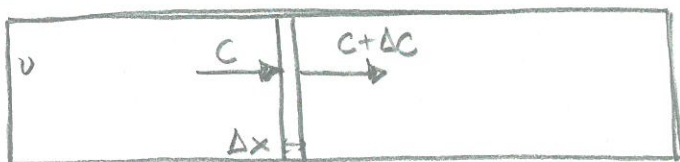
1ος και 2ος Νόμος Διάχυσης του Fick :

1ος νόμος του Fick για σταθερή T και P ή σταθερή συγκέντρωση C

$$J = -D A \frac{dC}{dx}$$

$E \gg K \gg D$ $\rightarrow$ μοριακή διάχυση
↓
διασπορά $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
τurbulent diffusion

2ος νόμος του Fick - μη σταθερή κατάσταση



Θα μπορούμε ένα λεπτό φιλμ σε μια διατομή ώστε μόνιμα και χρονομετρώ το ισοζύγιο μάζας προς φινίριση.

$$\frac{\Delta (VC)}{\Delta t} = \left(-D A \frac{dC}{dx} \right) \Big|_x - \left(-D A \frac{dC}{dx} \right) \Big|_{x+\Delta x}$$

Θα μπορούμε σταθερή κατάσταση του φιλμ οπότε ισορροπία το παραπάνω ισοζύγιο μάζας.

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} = - \left(\frac{D A dC}{dx} \right) \Big|_x + \left(\frac{D A dC}{dx} \right) \Big|_x + D A \frac{dC}{dx} \Big|_{\Delta x}$$

$$A \Delta x \frac{\Delta C}{\Delta t} = D A \frac{dC}{dx} \Big|_{\Delta x} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}}$$

► 1-η εξίσωση συμμεταφοράς - διασποράς 1!

2

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\bar{v} \frac{\partial C}{\partial x} + E \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

δηλαδή

συσσωρευση = συμμεταφορά + διάχυση / διασπορά

→ Έχουμε (3) είδη μοντέλων

1. Μοντέλο Διάχυσης / Διασποράς (Completely Mixed System CMS)
2. Μοντέλο Συμμεταφοράς (Plug Flow System - PFS)
3. Μοντέλο Συμμεταφοράς & Διασποράς (Advective - Dispersive System)

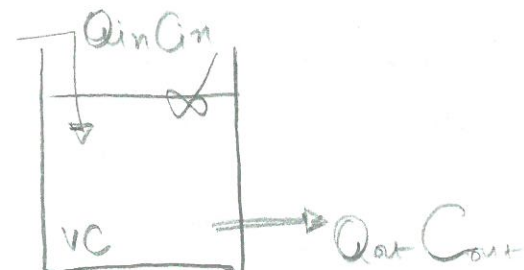
! για να επιλέξουμε ένα από αυτά τα μοντέλα χρησιμοποιούμε τον αριθμό Peclet (Pe).

$$Pe = \frac{\text{Συμμεταφορά}}{\text{Διασπορά}} = \frac{\bar{v} \cdot L}{E}$$

τάν $Pe \gg 1 \rightarrow$ PFS μοντέλο
 $Pe \ll 1 \rightarrow$ CMS μοντέλο.

Απλά Μοντέλα Μεταφοράς

1. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΛΗΡΟΥΣ ΑΝΑΜΙΞΗΣ (Λίμνη, Δεξαμενή αερίου, Βιομηχανική μονάδα λειτουργίας): CEMS



Το ισοζύγιο μάζας που αντιγράφει είναι αυστηρά είναι:
 είσοδος υγρού - είσοδος αερίου - αντίδραση

$$\frac{d(VC)}{dt} = Q_{in}C_{in} - Q_{out}C_{out} \pm r \cdot V$$

- Εάν {
- $r = -k \cdot C$ 1^η τάξη αντίδραση αδομοδομησης.
 - $Q_{in} = Q_{out} = Q$ σταθερή ροή
 - $V = \text{σταθερό}$

$$V \cdot \frac{dC}{dt} = Q \cdot C_{in} - Q \cdot C - kCV \quad \text{Διαιρώ με } V$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{Q}{V} C_{in} - \frac{Q}{V} C - kC$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{Q}{V} C_{in} - \left(\frac{Q}{V} + k \right) C$$

$$\boxed{\frac{V}{Q} = \tau = \text{μέσος χρόνος υδραυλικός παραγωγής}}$$

$$\boxed{\frac{dC}{dt} + \left(k + \frac{1}{\tau} \right) C = \frac{C_{in}}{\tau}}$$

1^η τάξη ομογενής γραμμική εξίσωση

Δηλαδή είναι της μορφής:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$$y = y_0 \exp(-P(t)) + \exp(-P(t)) \int_0^t \exp(P(t)) q(t) dt$$

όπου $P(t) = \int p(x) dt$

$$p(x) = \left(k + \frac{1}{\tau} \right) \rightarrow P(t) = \int \left(k + \frac{1}{\tau} \right) dt = \left(k + \frac{1}{\tau} \right) t$$

$q(x) = C_{in}/\tau$ με αμετάσθεση & συντήρηση

$$\boxed{C = C_0 e^{-(k + \frac{1}{\tau})t} + \frac{C_{in}}{k\tau + 1} \left(1 - e^{-(k + \frac{1}{\tau})t} \right)}$$

!!! για να υπολογίσουμε τη συγκέντρωση (steady state) τότε θεωρούμε:

$t \rightarrow \infty$ σημαίνει $e^{-\infty} = 0$ έτσι

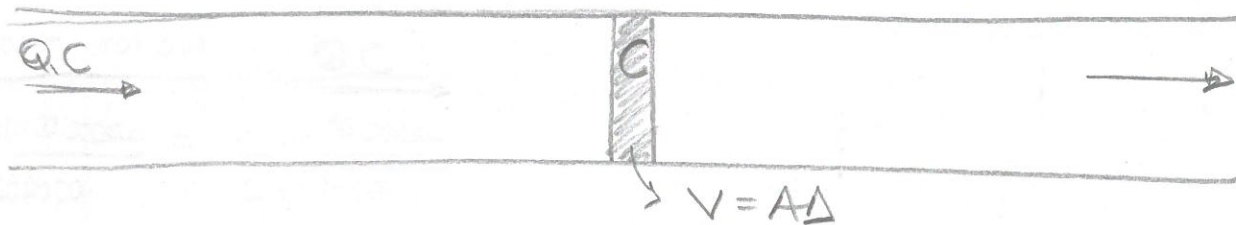
$$C_{ss} = \frac{C_{in}}{k\tau + 1}$$

μεινίζονται τα κατώφλια
χημικά της συγκέντρωσης

!!! όταν έχουμε συγκριτική αβία ως εξ. 1x mdt 7/3 (Gracer)

$$k\tau = 0$$

B. ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΜΒΟΛΙΚΗΣ ΡΟΗΣ (PFS).



Θεωρούμε σταθερό όγκο και σταθερή ροή

Ετσι $\frac{\partial C}{\partial t} = -\bar{v} \frac{\partial C}{\partial x} - kC$, $\bar{v} = Q/A$

Για έχουμε steady state $dC/dt = 0$

$$0 = -\bar{v} \frac{\partial C}{\partial x} - kC \Rightarrow \bar{v} \frac{\partial C}{\partial x} = -kC$$

Ολοκληρώνουμε
μεταβ. συν. $0 \rightarrow C_0$
 $x \rightarrow C$

$$\Rightarrow \int_{C_0}^C \frac{dC}{C} = - \int_0^x \frac{k}{\bar{v}} dx \Rightarrow C = C_0 e^{-\frac{kx}{\bar{v}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{C = C_0 e^{-x/\tau}} \quad \tau = \frac{x}{\bar{v}} \text{ (χρόνος μεταμιμησης)}$$

C. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΜΜΕΤΑΦΟΡΑΣ & ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ (ADS).

Η θαλάσσια ροή έχει ο όγκος του νερού (H_2O) που περνάει από ένα συγκεκριμένο σημείο σε ορισμένο χρόνο.

Η θαλάσσια μπορεί να οδηγήσει σε αύξηση της ανάμειξης.

ΘΕΜΑ 1 - Ξυμβατικοί Ρυθμιστές (30%)

Η δρακολίμη στην Πίνδο είναι μια δακτυλική (αδριατική) λίμη που η επιφάνειά της διαφέρει στη διάρκεια του χρόνου. Η θερμοκρασία του νερού αυξάνεται στο σχήμα και είναι $0-10^\circ$ κελσίου στο ηδολίμνιο κάτω από τον άνεμο και φτάνει στους 14° στο υδολίμνιο. Το άρσενικό του συστήματος διασπάζεται παρατηρείται επίσης στο σχήμα. Η λίμη μαζική τα παρά από μια μικρή ληψία. Το υδολίμνιο της λίμνης χιτώνει αποψύχ λόγω της διάδοσης του οργανικού υλικού που ναι μεν στη διατήρηση της λίμνης. Αποδοκίματ στις ακόλουθες εργασίες.

1. Εξηγήστε πως λειτουργεί η λίμη (αδριατική) και μεταφορά ρυθμών) και γιατί το οξυγόνο του υδολίμνιου παρατηρείται στο σχήμα.
2. Γράψτε τα ισχύοντα μέτρα για το οργανικό φορτίο (BOD) και διαλυμένο οξυγόνο για το ηδολίμνιο και υδολίμνιο (αδριατική) και διαλύστε τις παραδοχές σας. Το σχήμα του νερού της λίμνης είναι ομοιόμορφο).
3. Αν η απαίτηση των ιζημάτων σε οξυγόνο (sediment oxygen demand) είναι $0,2 \text{ mg O}_2 / \text{dm}^2$ ιζημάτων, υπολογίστε σε πόση μέτρηση το αρχικό οξυγόνο της λίμνης (9 mg/L) θα καταναλωθεί εάν το βάθος του υδολίμνιου είναι 1 m , αν υποθέσουμε ότι η καταπόνηση του οξυγόνου προέρχεται από τα ιζήματα μόνο και ότι το υδολίμνιο είναι κορεσμένο με οξυγόνο αρχικά.

ΘΕΜΑ 2 - Μοτίλο Ευτροφισμού (40%)

Ο ταμπενέρας της Αγίας σε Χανιά αναπτύσσεται στο υδρόβιο περιβάλλον. Η λίμη έχει μέσο βάθος $H = 2 \text{ m}$, μέσο όγκο $V = 550000 \text{ m}^3$ και ο χρόνος παραμονής του ταμπενέρα είναι $\tau = 10 \text{ d}$. Ο βιολογικός πολλαπλασιασμός ευτροφισμού της λίμνης είναι ο πρώτος. Η λίμη έχει μέση σκίαση συστημάτων φωτός $P_0 = 90 \text{ mg/L}$. Ο πρώτος πολλαπλασιασμός σε απόλυτο, οργάνωμο και αυτόν που περιέχεται στο φυτοπλακτόν με το μοτίλο των Schoor και Ο' Connor. Αποδοκίματ στις ακόλουθες εργασίες.

1. Γράψτε τα ισοζύγια μάζας του φωσφόρου για τη λίμνη, υποδεικνύοντας σαφή ροή και ισορροπία απόμειξη.

2. Κάτω από αατερή συνθήκες βρείτε τις συγκεντρώσεις του φωσφόρου στη λίμνη για τα ακόλουθα δεδομένα.

$K_1 = 0,4/\text{day}$, $K_2 = 0,04 \text{ L}/\mu\text{g-day}$, $K_3 = 0,002/\text{day}$, $K_0 = 0,9/\text{day}$
 $W_1 = 1350 \text{ kg/year}$, $W_2 = 500 \text{ kg/year}$. Συμπληρώστε τα αυτοτελείσματα του μοντέλου με τη συγκέντρωση του σιμώ φωσφόρου στη λίμνη και σχολιάστε τα αποτελέσματα.

ΘΕΜΑ 3 - Μοντέλο Καραϊμού Υδροφορία.

Η καραϊμική ιαχή του Ζώλου στα Χανιά τροφοδοτείται από έκταση 120 km^2 καραϊμικού όχθου. Οι ιατριβαλλοποιημένες ιαχές που δίνονται στα Λουά Όρη είναι από την υποτροφία, τη χλωρία και τη βροχόπτωση. Θέλουμε να υποβλήσουμε τις συγκεντρώσεις του αζώτου (ΔOA = διαλυτό οργανικό αζώτο και ΔAA = διαλυτό ανόργανο αζώτο) στα γρά των ιαχών του Ζώλου. Τα φορτία είναι του $\Delta\text{OA} = 288 \text{ t/y}$ και $\Delta\text{AA} = 192 \text{ t/y}$. Η ετήσια βροχόπτωση είναι $1,5 \text{ m/year}$ και το 80% της βροχής παγιδεύεται στο σύστημα. Ο κύκλος του (καραϊμικού) αζώτου σε καραϊμικό γρά φαίνεται στο σχήμα και η συνολική του ρυθμός απορροφητικότητας $K_m = 0,01/\text{year}$ υπολογισμένη βροχόπτωση. Ο χρόνος παραμονής του γρού στο σύστημα είναι 5 years. Αν υποθέσουμε ότι το καραϊμικό σύστημα λειτουργεί ως μία μεγάλη λίμνη, ιατρικά ανεμετηχική, αυταπόσβεστη στα ιατριβαλλοποιημένα.

1. Γράψτε τα ισοζύγια μάζας γρού, ΔOA και ΔAA .

2. Προσδιορίστε τις ηρωίες των συγκεντρώσεων των ΔOA και ΔAA σε κανονικές συνθήκες και ιατρική ιατρική. Με βάση τα δεδομένα υπολογίστε επίσης τις συγκεντρώσεις.

3. Η ιατρική του γρού των ιαχών έδειξαν ότι οι συγκεντρώσεις των ΔOA και ΔAA είναι $1,33$ και 2 mg/L αντίστοιχα. Υπολογίστε το K_m με αυτή τις συγκεντρώσεις. Υπάρχει διαφορά με τη μέτρηση του παρατηρήσιμου; Γιατί;

① - Αύγουστος 2014

②

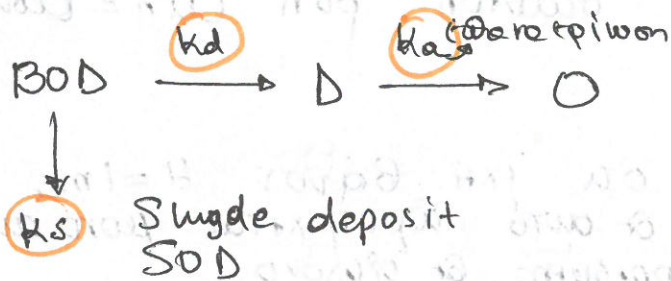
Έχουμε μία διηλεκτική λίμνη η οποία σχηματίζεται με διαδοχική όξυνση φάιτσαυ διαφανάτω.



1.

Όπως βλέπουμε και από το σχήμα δεν υπάρχει ανά-
μνηση μεταξύ επιλίμνιου. Οι κερκοί μεινώνουν κάτω από τον
βάθος ανεμυγνύονται με το επιλίμνιο και κερτουν.

Το υπολίμνιο δεν έχει ποσότητα γερύ μόνο SOD



! Οι αναδράσεις που συμβαίνουν

Οπότε για να εξηγήσουμε για το τι συμβαίνει στη λίμνη.

Η θερμοκρασία του γερύ των λίμνών διαφέρει σημαντικά διασποράς από πόσνη. Το χημικό με την προϋπόθεση ότι η λίμνη δεν παχύνει (θέρμα = ααθρή) σε όλο το βάθος. Με την άνοδο της θερμοκρασίας η σκόνι υδανότητας - θερμοκρασίας έχει ως αυτοαύτομα το σχηματισμό στρωμάτων.

Όταν υπάρχει σημαντική διαφορά θερμοκρασίας ανάμεσα στα 2 στρώματα από ΔΕΝ αναμνηγνύονται μεταξύ τους και χαρακτηρίζονται από διαφορετικές χημική/βιολογική δραστηριότητα.

2. Για τα ισοζύγιο BOD και DO στη λίμνη, θεωρούμε ότι ο όγκος του γερύ της λίμνης είναι σταθερός ($V = \text{σταθ.}$) το βάθος του θερμολιμνίου είναι αμελητικό.

Αρχικά στο πυλίμνιο:

$$\text{BOD: } \frac{d(VL)}{dt} = \underbrace{Q \cdot L_{in}}_{\text{εξροή}} - \underbrace{Q \cdot L}_{\text{ειροή}} - \underbrace{k_d \cdot V \cdot L}_{\text{ακτιδρσση}}$$

$$\text{D.O deficit: } \frac{d(V \cdot D)}{dt} = Q \cdot D_{in} - Q \cdot D - k_d \cdot V \cdot L - k_a \cdot V \cdot D^{\circ}$$

$$D = C_{sat} - C$$

στο υδολίμνιο: αν έχουμε εξροή & εισροή μόνο ως ακτιδρσση.

$$\text{BOD } \frac{d(VL)}{dt} = -k_d \cdot V \cdot L + \boxed{SOD \cdot A}$$

$$\text{D.O deficit: } \frac{d(VD)}{dt} = +k_d V L + \boxed{SOD \cdot A}$$

- θα θεωρήσουμε ότι στο πυλίμνιο θεωρούμε σύστημα κατά μήκη και ότι έχουμε σταθερή ροή $Q_{in} = Q_{out}$.

- ακόμα $L_{out} = L_{lake}$

• Για το υδολίμνιο θεωρούμε ότι έχει βάθος $H = 1\text{m}$,
 η καταπόνηση του οφύχου & αυτό υφίσταται μόνο από τα ισήματα & είναι αρχικά υποβρεμένο & οφύχονο.

Η αδιατάκση των ισήματων & οφύχου είναι 0.2g/dm^2 .

Από την πίεση του D.O. deficit στο υδολίμνιο έχουμε:

$$\frac{d(VD)}{dt} = \cancel{k_d V L} + SOD \cdot A \Rightarrow V \cdot \frac{dD}{dt} = SOD \cdot A \quad \begin{matrix} \text{Διαίρω με} \\ V = \text{σταθ.} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \frac{dD}{dt} = \frac{SOD \cdot A}{V} \quad \text{όμως } H = A/V \quad \text{όπου } H \text{ το βάθος του υδολιμνίου}$$

$$\Rightarrow \frac{dD}{dt} = \frac{SOD}{H} \Rightarrow \int_{D_0}^D dD = \frac{SOD}{H} \int_0^t dt \quad \begin{matrix} \text{συντηρώμε με} \\ \text{ορισμένη συνθήκη} \\ t=0 \rightarrow D_0 \\ t \rightarrow D \end{matrix}$$

$$\Rightarrow D - D_0^{\circ} = \frac{SOD}{H} \cdot t \Rightarrow D = \frac{SOD}{H} \cdot t \quad \text{όμως } \boxed{D = C_{sat} - C}$$

$$\text{F.T.O.L: } C_{sat} - C = \frac{SOD}{H} \cdot t \Rightarrow C = C_{sat} - \frac{SOD}{H} \cdot t = 0$$

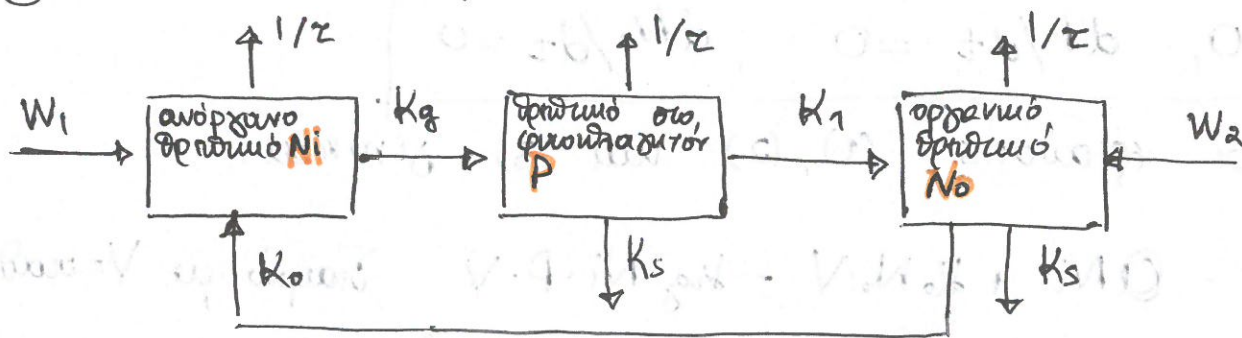
$$\Rightarrow t = \frac{C_{sat} \cdot H}{SOD} = \frac{(0.9\text{mg/L}) \cdot (1\text{m})}{0.2\text{g/dm}^2} \Rightarrow \boxed{t = 45\text{days}}$$

Θα πούμε ότι είναι αρχικά υποβρεμένο και $C=0$ γιατί το οφύχονο υφίσταται πίεση

② - Αύγουστος 2014

③

για το μοντέλο θρεπτικών στη λίμνη:



1. από το σχήμα αυτό μπορούμε να γράψουμε τα βολύγια μαζας του φωσφόρου στη λίμνη, δηλ. ουσία θεωρούμε σταθερή ροή ($Q_{in} = Q_{out}$) και ισορροπία απόμνηση ($C_{out} = C_{lake}$). Έτσι

- για το αυόργανο θρεπτικό Ni:

$$\frac{d(Ni \cdot V)}{dt} = W_1 - Q \cdot Ni + K_0 \cdot V \cdot N_o - \underbrace{K_g \cdot Ni \cdot P \cdot V}_{\text{λόγω αντίδρασης}} \quad (1)$$

λόγω μονάδων στο K_g !

- για το θρεπτικό P

$$\frac{d(V \cdot P)}{dt} = -Q \cdot P + K_g \cdot Ni \cdot P \cdot V - K_1 \cdot V \cdot P - K_s \cdot V \cdot P \quad (2)$$

- για το οργανικό N_o

$$\frac{d(N_o \cdot V)}{dt} = W_2 - Q \cdot N_o + K_1 \cdot V \cdot P - K_s \cdot V \cdot N_o - K_0 \cdot V \cdot N_o \quad (3)$$

2. Για τη λίμνη μας δίνονται τα ήως δεδομένα:

μέσο βάθος $H = 2m$

μέσος όγκος $V = 550000m^3$

χρόνος παραμονής $\tau = 10d$

ο υπολογισμός παραγωγής κυκλοφορού στη λίμνη είναι

ο φωσφόρος $\begin{cases} \text{αυόργανος} \\ \text{οργανικός} \\ \text{στο φυτοπλακτόν.} \end{cases}$

τα φορτία θρεπτικών είναι:

$W_1 = 1350 kg/year$ για το N_i

$W_2 = 500 kg/year$ για το N_o

$K_1 = 0.4/day$ phytoplankton loss rate

$K_s = 0.002/day$ settling rate constant

$k_0 = 0,3 / \text{day}$ mineralization rate constant
 $k_g = 0,04 \text{ L/mg-day}$ phytoplankton uptake constant
 ! και θεωρούμε σταθεράς συνθήκες στο λίμνη, δηλαδή

$$\frac{dN_i}{dt} = 0, \quad \frac{dP}{dt} = 0, \quad \frac{dN_o}{dt} = 0$$

Όποτε οι εξισώσεις (1), (2) και (3) γίνονται:

$$V \frac{dN_i}{dt} = W_1 - Q N_i + k_0 N_o V - k_g N_i P V \quad \text{Διαφί με } V = \text{σταθερά}$$

$$\frac{dN_i}{dt} = \frac{W_1}{V} - \frac{Q}{V} N_i + \frac{k_0 N_o V}{V} - \frac{k_g N_i P V}{V} \quad \text{όμως } \tau = V/Q \quad \text{κ' } \frac{dN_i}{dt} = 0$$

$$0 = \frac{W_1}{V} - \frac{N_i}{\tau} + k_0 N_o - k_g N_i P \quad (4)$$

αντίστοιχα

$$0 = -\frac{P}{\tau} + k_g N_i P - k_1 P - k_s P \quad (5)$$

$$0 = \frac{W_2}{V} - \frac{N_o}{\tau} + k_1 P - k_s N_o - k_0 N_o \quad (6)$$

οπότε έχουμε ένα σύστημα τριών εξισώσεων (4,5,6)
 με τρεις αγνώστους P, N_i, N_o , δηλαδή τις συγκεντρώσεις του
 φωσφόρου σε όλες τις "μορφές" του.

Από την (6):

$$P = \frac{N_o \left(\frac{1}{\tau} + k_s + k_0 \right) - \frac{W_2}{V}}{k_1} \quad \text{ή} \quad N_o = \frac{k_1 P + \frac{W_2}{V}}{\frac{1}{\tau} + k_s + k_0}$$

$$(4) \Rightarrow N_i \left(\frac{1}{\tau} + k_g P \right) = \frac{W_1}{V} + k_0 N_o$$

Προσθέτουμε τις (4) + (5):

$$\frac{W_1}{V} - \frac{N_i}{\tau} + k_0 N_o - k_g N_i P - \frac{P}{\tau} + k_g N_i P - k_1 P - k_s P = 0$$

$$\frac{W_1}{V} - \frac{N_i}{\tau} + k_0 N_o - \frac{P}{\tau} - k_1 P - k_s P = 0$$

αντικαθιστώ το N_o

$$\frac{W_1}{V} - \frac{N_i}{\tau} + \frac{k_0 \cdot k_1 \cdot P}{\frac{1}{\tau} + k_s + k_0} + \frac{k_0 \cdot W_2/V}{\frac{1}{\tau} + k_s + k_0} - \frac{P}{\tau} - k_1 P - k_s P = 0 \quad (4)$$

$$\frac{N_i}{\tau} = \frac{W_1}{V} + \frac{k_0 \cdot k_1 \cdot P}{\frac{1}{\tau} + k_s + k_0} + \frac{k_0 \cdot W_2/V}{\frac{1}{\tau} + k_s + k_0} - \frac{P}{\tau} - k_1 P - k_s P = 0$$

$$\frac{N_i}{10d} = \frac{1350 \text{ kg/year}}{550000 \text{ m}^3} + \frac{0,4/d \cdot 0,9/d \cdot P}{\frac{1}{10d} + 0,002/d + \frac{0,9}{d}} + \dots$$

$$N_i = 89,47 - 1,43 P$$

αριθμός ούρων (5)

$$-P \left(\frac{1}{\tau} + k_1 + k_s \right) + k_0 \cdot P \cdot (89,47 - 1,43 P)$$

$$\Rightarrow 0,057 P^2 - 3,077 P = 0$$

$$\Rightarrow P \cdot (0,057 P - 3,077) = 0$$

$$P = 0 \text{ ή}$$

$$P = \frac{3,077}{0,057} \Rightarrow P = 53,98 \mu\text{g/L}$$

$$N_o = 24,02 \mu\text{g/L}$$

$$N_i = 12,28 \mu\text{g/L}$$

$$N_z = P + N_o + N_i = (53,98 + 24,02 + 12,28) \mu\text{g/L}$$

$$\Rightarrow N_z = 90,28 \mu\text{g/L}$$

3) - Αύγουστος 2014

Έχουμε μία ιαπωνική ψηχή με:

$$t = 120 \text{ km}^2$$

$$-\Delta OA = 288 \text{ tn/y}$$

$$-\Delta AA = 192 \text{ tn/y}$$

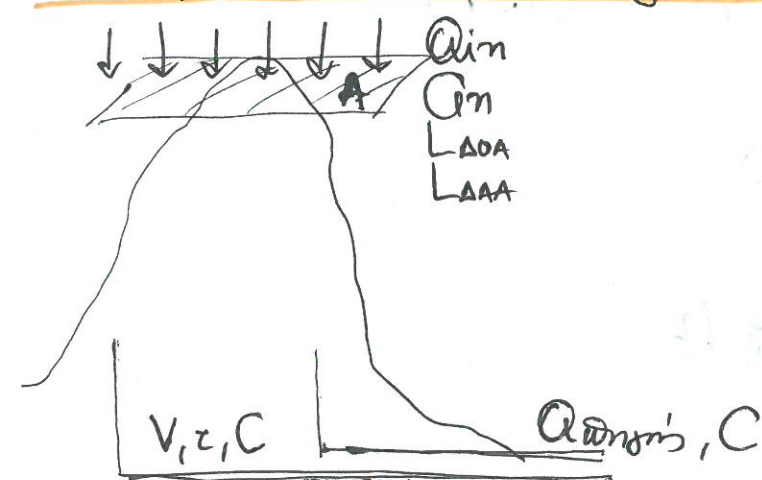
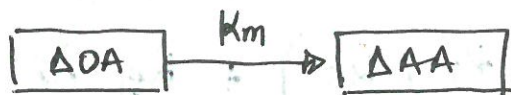
Επίδια βροχόπτωση $= 1,5 \text{ m/y}$ και $\alpha = 80\%$ κατηόδου

$k_m = 0,01 / \text{y}$ η ααθρά ανόργανοποίηση

$\tau = 5 \text{ y}$ ο χρόνος παραμονής

Θεωρούμε ότι το καρπικό σύστημα λειτουργεί ως μία λίμνη ααθράς αναμειχτή (CSTR).

Η ανόργανοποίηση του αζώτου:



Αρχικά θέλουμε να δράψουμε τα ισοζύγια μάζας κρού, οργανικού και ανόργανου αζώτου.

- Ισοζύγιο νερού

$$\text{Δυσώρση} = \text{Νερό της βροχής που κατηόει} - \text{Νερό της ψηχής που τρέπει}$$

$$\frac{dV}{dt} = \alpha \cdot A \cdot P - Q_n \quad (1)$$

- Ισοζύγιο οργανικού αζώτου

$$\frac{d(V \cdot G)}{dt} = L_{\Delta OA} - Q_n G - k_m \cdot V \cdot C \quad (2)$$

- Ισοζύγιο ανόργανου αζώτου

$$\frac{d(V \cdot G_a)}{dt} = L_{\Delta AA} - Q_n G_a - k_m V \cdot C_a \quad (3)$$

2. Από το θεωρούμε σύστημα λίμνης, όταν έχουμε σταθερή (5) εισροή. $Q_{in} = Q_{out}$ και ισορροπία συστήματος
 $dC_0/dt = dC_a/dt = 0$.

Έτσι

$$V \cdot \frac{dC_0}{dt} = L_{A0A} - Q \cdot C_0 - k_m \cdot V \cdot C_0 \quad \text{διαίρω με } V = \text{σταθερό}$$

$$\frac{dC_0}{dt} = \frac{L_{A0A}}{V} - \frac{Q}{V} C_0 - k_m \cdot C_0 \quad \frac{dC_0}{dt} = 0 \quad \text{και} \\ C_0 = C_{SS, A0A}$$

$$0 = \frac{L_{A0A}}{V} - \frac{C_0}{\tau} - k_m \cdot C_0 \Rightarrow \boxed{C_{SS, A0A} = \frac{L_{A0A}/V}{(1/\tau + k_m)}} \quad (4)$$

$$\underline{C_{SS, A0A} = 1,9 \text{ mg/L}}$$

$$V \cdot \frac{dC_a}{dt} = L_{AAA} - Q C_a + k_m \cdot V \cdot C_0 \quad \text{από το } L_{A0A}$$

$$\frac{dC_a}{dt} = \frac{L_{AAA}}{V} - \frac{Q}{V} C_a + k_m \cdot C_0$$

$$Q/V = \tau, \quad C_a = C_{SS, AAA} \\ C_0 = C_{SS, A0A}$$

$$0 = \frac{L_{AAA}}{V} - \frac{C_{SS, AAA}}{\tau} + k_m \cdot C_0$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{SS, AAA} = \left(\frac{L_{AAA}}{V} + k_m \cdot C_0 \right) \cdot \tau} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \underline{C_{SS, AAA} = 1,43 \text{ mg/L}}$$

3. Από τις εξισώσεις (4) και (5) υπολογίζουμε την τιμή του k_m .

1. $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \right)$
 $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \right) = m \dot{r} \ddot{r}$
 $0 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{1}{2} m \dot{r}^2$

2. $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \right)$
 $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \right) = m \dot{r} \ddot{r}$
 $0 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{1}{2} m \dot{r}^2$
 $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \right) = m \dot{r} \ddot{r}$
 $0 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{1}{2} m \dot{r}^2$

3. $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \right)$
 $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \right) = m \dot{r} \ddot{r}$
 $0 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{1}{2} m \dot{r}^2$
 $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \right) = m \dot{r} \ddot{r}$
 $0 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{1}{2} m \dot{r}^2$

4. $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \right)$
 $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \right) = m \dot{r} \ddot{r}$
 $0 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{1}{2} m \dot{r}^2$
 $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \right) = m \dot{r} \ddot{r}$
 $0 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{1}{2} m \dot{r}^2$

Κεφάλαιο 4 - Ευτροφισμός Λιμνών

①

Γνωσία ο ευτροφισμός είναι μια φυσική διαδικασία που καθορίζεται λόγω των ανθρωπίνων δραστηριοτήτων.

Τι είναι: Μια διαδικασία ημεθυσμού των τριών με τροφικά συστατικά, άζωτο (N) και φωσφόρο (P) τα οποία ελέγχουν την πρωτογενή παραγωγικότητα.

⇒ έτσι έχουμε υπερβολική αύξηση της βιομάζας των φυτών (παραγωγική μορφή - φυτό με ρίζες), και υστερήσουμε να θεωρούμε ότι από λειτουργική αποσύνθεση στις επιδωμητή χρήσης του νερού.

! Γνωσία η ποσότητα του νερού μπορεί να υποβαθμιστεί σε τόσο βαθμό ώστε η λίμνη να χάσει τη συνήθη χρήση της για πόσιμο ή καύσιμη.

* γιατί η αύξηση των φυτών ποτίζεται από το θρεπτικό συστατικό που ελέγχεται σε υπερβολική ποσότητα.
! Τα φωσφορικά αλάτια είναι συχνά ο πρωτογενής παραχόμενος της αύξησης του φυτοπλακτονίου και οι σημαντικές πηγές που τα κυλούν μειώνονται με καθίζηση των φωσφορικών αλάτων σε υγρά αδιάβλητα με χλωριόξο ή θειικό βίδιο. Η αντίδραση που αντιγράφει αυτή τη διαδικασία είναι:



Για τα θρεπτικά συστατικά που υπάρχουν αζώτο, η μείωση των σημαντικών πηγών μπορεί να επηρεάσει την απορρόφηση της αμμωνίας σε υψηλό pH (pH > 9), αλλαγή των ιόντων NH_4^+ σε χαμηλότερα pH ή βιολογική αποσύνθεση.

! Η χημική σύσταση των υδατινών συσχετίζεται με τη βιολογικότητα του φυτοπλακτονίου.

Η ποσοτική αναλογία $\boxed{W/P = 16/1}$

$\mu = \frac{\mu_{\text{max}} S}{K_s + S}$ Κιττική Μέθοδος
Liebig - μεριμνή ανώτατος μέχρι κορεσμό

μ_{max} : μέγιστος ρυθμός αύξησης (T')
 S : συγκέντρωση υποστρώματος ή θρεπτικού (ML^{-3})

των όμως έχωμεν ωστρισότρε αιδό ίνα θρεδωμό τανό κρο-
 να ωστρισότρε δρε την ανό ωτρε
 κρηοκμοδωό με την κρηόση:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \dots + \frac{1}{\mu_i}$$

$$\mu = \mu_{\max} \left(\frac{S_1}{K_{S1} + S_1} \right) \left(\frac{S_2}{K_{S2} + S_2} \right) \dots \left(\frac{S_3}{K_{S3} + S_3} \right)$$

ΙΣΟΖΥΓΙΟ ΜΑΖΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΘΕΣΦΟΡΟ ΣΤΙΣ ΛΙΜΝΕΣ :

Ο ωστρισότρε ωδράκονκας α μία λίμη ήται ο
 ολκός φώκφορος (P)

Παραδοκία:

- θωρούμε σιαδρή ροή και σιαδρό όκμο
- η λίμη ήται ίνα σόσημα τήκων ανόκρηκ

$$P_{\text{κρε}} = P_{\text{αι}} +$$

Έτσι: Συνώκρηκ = Είκοδος - Έξοδος - Ικρηκωδóκηκ

$$V \frac{dP}{dt} = Q_{\text{in}} P_{\text{in}} - Q \cdot P - K_S \cdot P \cdot V$$

K_S : σικρηκωή κωδρηκς α' κώκ. (τ^{-1})

όκω $K_S = \frac{a \cdot V_S}{H_S \cdot \mu_{\text{κρε}} \cdot \text{όκωκς}}$, $a = \frac{P_{\text{part}}}{P}$ σικρηκωό P
 ήκω P

1. Έάν θωρούμε σιαδρή κωδρηκς (ωδρήκρη κωκρηκς
 της κρηκς κρηκς σικρηκωήκς φώκφορος) κώκ

$$\frac{dP}{dt} = 0 \Rightarrow 0 = Q_{\text{in}} P_{\text{in}} - Q \cdot P - K_S \cdot P \cdot V$$

2. Έάν θωρήκωμε όκ η κρηκς ήται ωδρηκς ίκρη με
 την κρηκς; θωρούμε με τον όκμο V:

$$0 = \frac{P_{\text{in}}}{\tau} - \frac{P}{\tau} - K_S \cdot P \Rightarrow P = \frac{P_{\text{in}}}{K_S \tau + 1}$$

Δηλκδή η κώκρη του σικρηκωό φώκφορος αη λίμη
 κρηκται αιδό ήται αιδόκρηκ κρηκς $K_S \tau$:

$$\frac{P}{P_{\text{in}}} = \frac{1}{K_S \tau + 1}$$

3. για να υπολογίσουμε το θερμογινόμενο ή απομακρυσμένο ⁽²⁾

$$R = \text{απομακρυσμένο υαέριο} = 1 - \frac{P}{P_{in}}$$

$$R = \frac{k_s \tau}{1 + k_s \tau}$$

+ σελ. (226)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

② Για να υπολογίσουμε το ρυθμό ανάπτυξης του φυτοπλακτού σε μία λίμνη μας δίνονται τα παρακάτω δεδομένα.

$$\mu_{max} = 1,3 \text{ d}^{-1}$$

	$[\text{NH}_4^+ + \text{NO}_3^-] \text{ ως N}$	$[\text{PO}_4^{3-} - \text{P}]$
συγκέντρωση $\mu\text{g/L (S)}$	50	5
$K_s \mu\text{g/L}$	25	5

α. Αρχικά χρησιμοποιούμε το νόμο σταχίσιου του Leibig. Ο ορισμός φαίνεται μία καμπύλη ανάπτυξης μέχρι κορεσμού, για κάθε συστατικό, ισοδύναμα με αυτή της τιτρώσεως Monod.

$$\mu = \frac{\mu_{max} \cdot S}{S + K_s}$$

με μ_{max} : μέγιστος ρυθμός ανάπτυξης
 S : συγκέντρωση υποστρώματος ή θρεπτικού
 K_s : σταθερά ημικορεσμού.

Έτσι αρχικά για το άζωτο (N):

$$\mu_1 = \frac{(1,3 \text{ d}^{-1}) \cdot (50 \text{ mg/L})}{(50 \text{ mg/L}) + (25 \text{ mg/L})} = 0,87 \text{ d}^{-1}$$

και για το φώσφορο (P):

$$\mu_2 = \frac{(1,3 \text{ d}^{-1}) \cdot (5 \text{ mg/L})}{(5 \text{ mg/L}) + (5 \text{ mg/L})} = 0,65 \text{ d}^{-1}$$

$\mu_1 > \mu_2$ άρα σύμφωνα με το νόμο σταχίσιου του Leibig και την τιτρώση θα έχουμε ρυθμό ανάπτυξης του φυτοπλακτού το $\mu_2 = 0,65 \text{ d}^{-1}$.

β. Με τη διλλακτική ομοή τριγωνική Michaelis-Menten:

$$\mu = \mu_{max} \left(\frac{S_1}{K_{s1} + S_1} \right) \left(\frac{S_2}{K_{s2} + S_2} \right) = (1,3 \text{ d}^{-1}) \left(\frac{50 \text{ mg/L}}{(50+25) \text{ mg/L}} \right) \left(\frac{5 \text{ mg/L}}{(5+5) \text{ mg/L}} \right)$$

$$\Rightarrow \mu = 0,43 \text{ d}^{-1}$$

γ. Με το ανάλογο ηλεκτρικής αντίστασης.

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} = \frac{1}{0,87} + \frac{1}{0,65} = \frac{0,65 + 0,87}{0,5655} \Rightarrow \mu = 0,37 \text{ d}^{-1}$$

Από τη στοιχειομετρία $\text{N:P} = 16/1$

6. Για μια λίμνη μας δίνονται τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

μέσο βάθος $H = 10 \text{ m}$
ρυθμός εισροής $L = 1,0 \text{ g P / m}^2 \cdot \text{y}$
χρόνος ωραμίας $\tau = 1,0 \text{ y}$
υπόβρα του P που καθιζάνει $R = 0,4$.

$$R = \frac{k_s \tau}{1 + k_s} \Rightarrow 0,4 = \frac{k_s \tau}{k_s + 1} \Rightarrow 0,4 k_s + 0,4 = k_s \cdot 1$$

$$\Rightarrow 0,6 k_s = 0,4 \Rightarrow \boxed{k_s = 0,7 \text{ y}^{-1}}$$

για το ισοζύγιο μάζας του φωσφόρου στη λίμνη:

Συσσώρευση = Εισροή - Εξροή - καθίζηση

$$V \frac{dP}{dt} = L \cdot A_{\text{surf}} - Q P - k_s P V \quad \text{διακρίνω με } V = A_{\text{surf}} \cdot H$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dt} = \frac{L}{H} - \frac{P}{\tau} - \frac{V_s}{H} \cdot P \quad \text{όπου σταθερή κατάσταση } dP/dt = 0$$

$$\Rightarrow \frac{L}{H} = P \left(\frac{1}{\tau} + \frac{V_s}{H} \right)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{L}{H} (1 - R) - \frac{P}{\tau} \Rightarrow P = \frac{L \tau (1 - R)}{H}$$

$$\Rightarrow P = \frac{1,0 \text{ g/m}^2 \cdot \text{y} \cdot 1,0 \text{ y} (1 - 0,4)}{10 \text{ m}} = \frac{1 \cdot (0,6)}{10} \frac{\text{g}}{\text{m}^3} = 0,06 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$$

$$= 0,06 \frac{\text{g}}{\text{m}^3} \cdot \frac{1000 \text{ mg}}{1 \text{ g}} \cdot \frac{1 \text{ m}^3}{1000 \text{ L}} \Rightarrow \boxed{P = 0,060 \text{ mg/L}}$$

ο ορισμός φωσφόρου στη λίμνη.