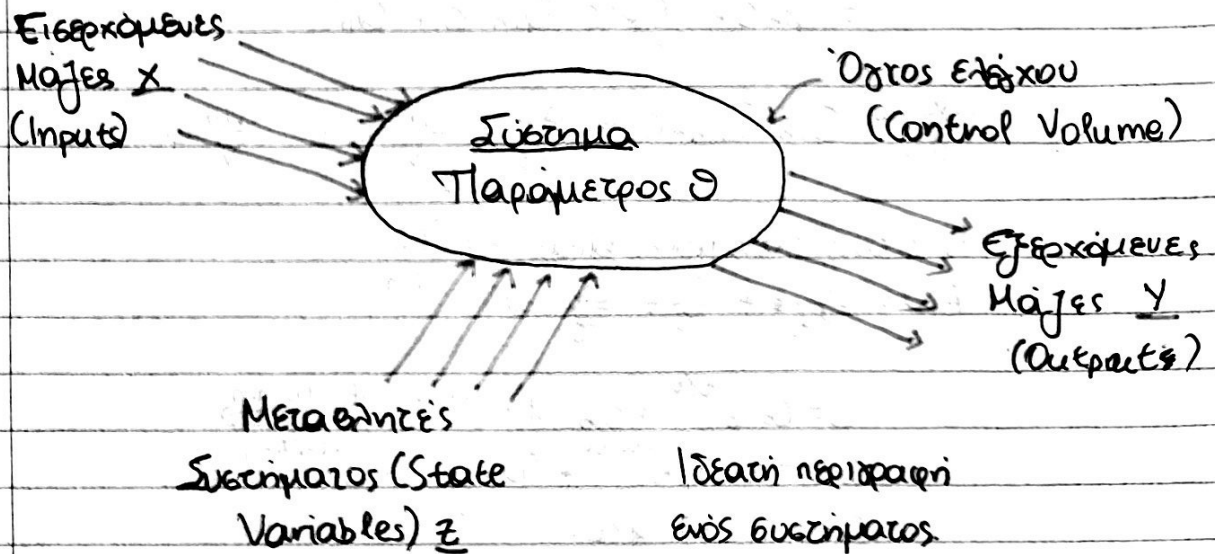
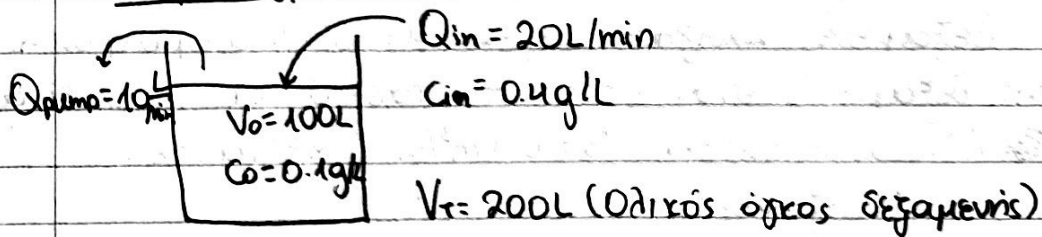


Θεωρία ΣυστημάτωνΠαράδειγμα

$C_{mix} = ?$ (συγκέντρωση δεξαμενής όταν υπερχειλίσει)

$$VC = L \cdot \frac{g}{L} = \frac{M}{g}$$

State Variables (Μεταβλητές συστήματος):

$$\frac{dV}{dt} = Q_{in} - Q_{pump} \quad (1)$$

$$\frac{d(CV)}{dt} = Q_{in}C_{in} - Q_{pump}C = V \frac{dC}{dt} + C \frac{dV}{dt} \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 20 - 10 = 10 \Rightarrow \int dV = 10 \int dt \Rightarrow V - V_0 = 10t \Rightarrow V = V_0 + 10t$$

Για $V_0 = 100 \text{ L}$ και $V_f = 200 \text{ L} = V_T$ είναι $t = 10 \text{ min}$

$$(2) \Rightarrow V \frac{dC}{dt} = Q_{in} C_{in} - Q_p C - C (Q_{in} - Q_p) \\ = Q_{in} C_{in} - Q_p C - Q_{in} C + Q_p C$$

$$V \frac{dC}{dt} = Q_{in} (C_{in} - C) \Rightarrow \frac{dC}{dt} = \frac{Q_{in}}{V} C_{in} - \frac{Q_{in}}{V} C$$

Ο χρόνος παραμονής είναι $\tau = \frac{V}{Q_{in}}$

Άρα: $\frac{dC}{dt} + \frac{C}{\tau} = \frac{C_{in}}{\tau} \Rightarrow$

$$C = C_0 e^{-t/\tau} + C_{in} (1 - e^{-t/\tau}) \quad t = 10 \text{ min}$$

$$C_{10} = (0.1) e^{-10/20} + (0.4) (1 - e^{-10/20}) \Rightarrow$$

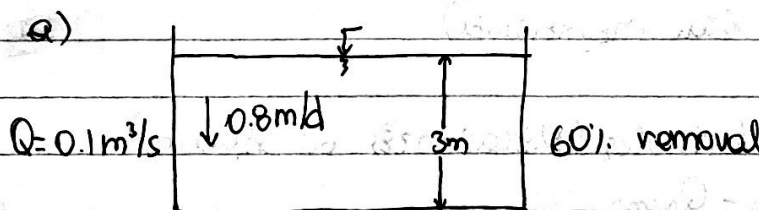
$$C_{10} = 0.217 \text{ g/L}$$

Θέμα εξάσκησης

Δεξαμενές καθίζησης βρεγών με 60% απομάκρυνση. Το βάθος της δεξαμενής είναι $d=3\text{m}$. Η σταθερά καθίζησης είναι $k_s=0.8 \frac{\text{m}}{\text{d}}$. Δίνεται η παροχή $Q=0.1 \text{ m}^3/\text{s}$. Σχεδιάστε:

- 1 δεξαμενή
- 2 δεξαμενές στη σειρά.

Λύση



$$\frac{d(CVC)}{dt} = Q C_{in} - Q C - kVC \xrightarrow{\text{σταθ. V}} V \frac{dC}{dt} + C \frac{dV}{dt} = Q C_{in} - Q C - kVC \Rightarrow$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{Q}{V} C_{in} - \frac{Q}{V} C - \frac{kVC}{V} \Rightarrow \frac{dC}{dt} = \frac{C_{in}}{\tau} - \frac{C}{\tau} - kC \quad \leftarrow C_{ss} \text{ (steady state)}$$

Επειδή έχω σταθερές συνθήκες $\rightarrow \frac{dC}{dt} = 0$

$$C_{ss} = \frac{C_{in}}{\tau(\frac{1}{\tau} + k)} \Rightarrow C_{ss} = \frac{C_{in}}{1 + \tau k} \Rightarrow \frac{C_{ss}}{C_{in}} = \frac{1}{1 + \tau k} = 0.4 \Rightarrow k = \frac{0.8 \text{ m/d}}{3 \text{ m}} = 0.267 \text{ 1/d}$$

$$\tau = 5.63d = \frac{V}{Q} \Rightarrow V = \tau \cdot Q \Rightarrow V = 48600 \text{ m}^3$$

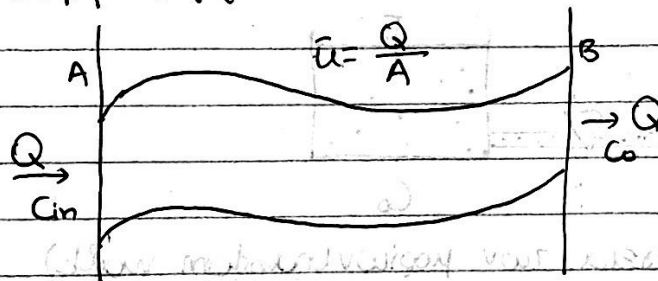
$$\text{Οπότε } A = \frac{V}{d} = 16200 \text{ m}^2$$



$$\frac{Q_2}{Q_{in}} = 0.4$$

Η είσοδος της 2^{ης} δεξαμενής
θα είναι η έξοδος της πρώτης

Συμμεταφορά



Ισοζύγιο μάζας στο τμήμα AB του ποταμού:

$$\frac{\Delta(V \cdot c)}{\Delta t} = \text{Είσοδος μάζας} - \text{Έκροες μάζας}$$

$$\left[\frac{\text{m}^3 \cdot \text{g/m}^3}{\text{s}} = \frac{\text{g}}{\text{s}} \right]$$

$$\text{Είσοδος: } Q \cdot C_{in} = \bar{u} \cdot A \cdot C_{in}$$

$$\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cdot \frac{\text{g}}{\text{m}^3} = \frac{\text{g}}{\text{s}}$$

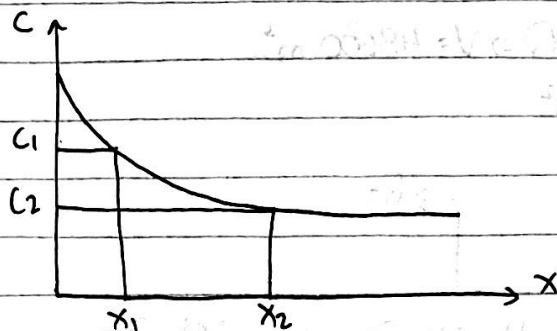
$$\text{Έκροες: } Q \cdot C_0 = \bar{u} \cdot A \cdot C_0$$

$$\frac{\Delta(V \cdot c)}{\Delta t} = Q \cdot C_{in} - Q \cdot C_0 \quad \left. \begin{array}{l} V(\Delta C / \Delta t) = Q \cdot \Delta C \\ \frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{Q}{V} \Delta C = \frac{Q}{A} \cdot \frac{\Delta C}{\Delta x} = \bar{u} \frac{\Delta C}{\Delta x} \\ \frac{\Delta C}{\Delta t} = -\bar{u} \frac{\Delta C}{\Delta x} \end{array} \right\}$$

$$V = A \cdot \Delta x = \text{σταθερό}$$

$$\Delta C = C_{in} - C_0$$

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} = -\bar{u} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

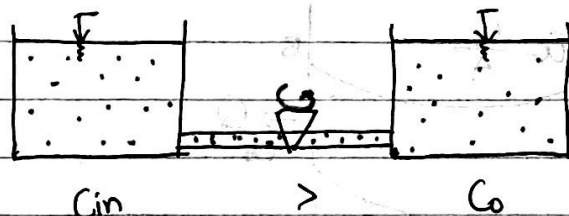


$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C_1 - C_2}{x_2 - x_1} > 0, \bar{u} > 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\bar{u} \frac{\partial C}{\partial x}$$

Διάχυση / Διασπορά

1) Μοριακή διάχυση



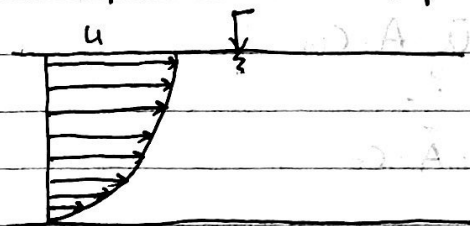
Κινητική ενέργεια των μορίων (random walk)

↳ τυχαίος "πείνατος"

(κίνηση) των μορίων

2) Τυρωδής διάχυση

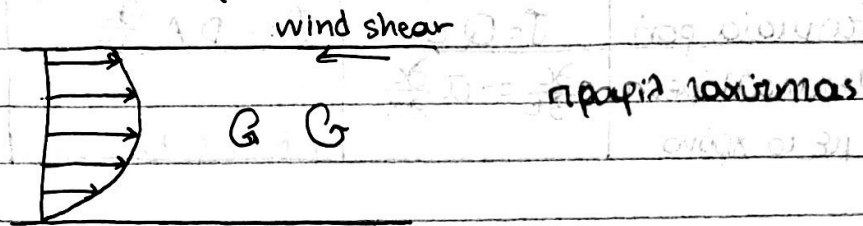
Οφείλεται στη μεταβολή της παχύτητας του νερού και στις δυνάμεις των τοίχωμάτων (shear stress)



προφίλ
παχύτητας

shear stress (= αριστερό)

3) Διασπορά



1^{ος} Νόμος Fick (1855)

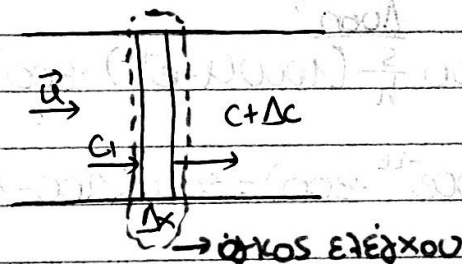
Συμμεταβολή $J = - \frac{dC}{dx}$

$J = -D \cdot A \cdot \frac{dC}{dx}$ όπου D: συντελεστής μοριακής διασποράς

K: >> τυρβώδους >>

E: >> διασποράς

$E \gg K \gg D$



$$\frac{\Delta(CV)}{\Delta t} = \left[-DA \frac{dC}{dx} \right]_x - \left[-DA \frac{dC}{dx} \right]_{x+\Delta x} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta(CV)}{\Delta t} = -DA \frac{dC}{dx} \Big|_x + DA \frac{dC}{dx} \Big|_{x+\Delta x} + DA \frac{dC}{dx} \Big|_{\Delta x} \quad V = A \cdot \Delta x = \text{σταθ.}$$

$$A \cdot \Delta x \frac{\partial C}{\partial t} = DA \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{\Delta x} \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad 2^{\text{ος}} \text{ Νόμος Fick}$$

1-D

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\bar{u} \frac{\partial C}{\partial x} + D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

	Συμμεταφορά	Λόξυν/Διαβροχή
Στιγμιαία ποσ	$\dot{Q} = Q \cdot c$	$\dot{Q} = -D \cdot A \frac{\partial c}{\partial x}$
Μεταβολή ποσ με το χρόνο	$\frac{\partial c}{\partial t} = -\bar{u} \frac{\partial c}{\partial x}$	

1^η Σειρά Αδρνήσεων

Αδρνήση ①

$$Q_{in} = 1000 (1 - e^{-kt}) \text{ [cls} = \text{lt}^3/\text{sec}] \text{ με } k [1/h]$$

$$Q_{out} = 800 \text{ lt}^3/\text{sec}$$

$$V_0 = 10^7 \text{ lt}^3$$

$$\text{Ζητείται } \frac{dV}{dt} = ;$$

$$\frac{dV}{dt} = Q_{in} - Q_{out} = 3600 \frac{\text{lt}^3}{\text{h}} [1000(1 - e^{-kt}) - 800] \frac{\text{lt}^3}{\text{s}} \Rightarrow$$

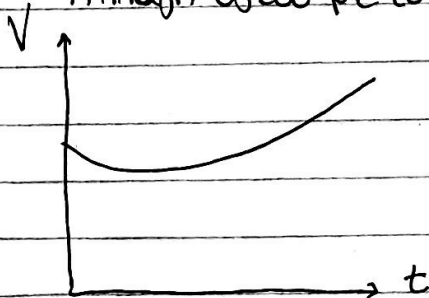
$$\frac{dV}{dt} = 3600 (1000 - 1000e^{-kt} - 800) = 3600 (200 - 1000e^{-kt}) \Rightarrow$$

$$\int_{V_0}^V dV = 3600 \int_0^t (200 - 1000e^{-kt}) dt \Rightarrow$$

$$V - V_0 = 3600 \left[200(t-0) + \frac{1000e^{-kt}}{k} - \frac{1000e^0}{k} \right] \Rightarrow$$

$$V = 3600 (200t - 1000 + 1000e^{-t}) + 10^7$$

Αναζητάμε όγκο με το χρόνο



$$\frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow 3600 [1000(1 - e^{-kt}) - 800] = 0 \Rightarrow$$

$$3600 (200 - 1000e^{-kt}) = 0 \Rightarrow$$

$$200 = 1000e^{-t} \Rightarrow e^t = 0.2 \Rightarrow -t = \ln 0.2 \Rightarrow$$

$$t = 1.61 \text{ h (ελάχιστος όγκος)}$$

Άσκηση ④

$$Q_{in} = 100 \text{ m}^3/\text{sec}$$

$$Q_{out} = 110 \text{ m}^3/\text{sec}$$

$$Q_{out} = 110 + 1 \cdot t$$

$\left[\frac{\text{m}^3}{\text{sec}} \right] \quad \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right] \rightarrow [\text{days}]$

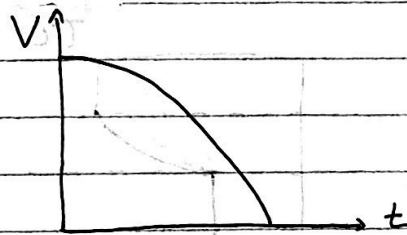
$$V_0 = 10^9 \text{ m}^3$$

$$\frac{dV}{dt} = Q_{in} - Q_{out} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 86400 [100 - (110 + t)] \Rightarrow$$

$$\int_{V_0}^V dV = \int_0^t (8.64 \times 10^6 - 9.5 \times 10^6 - 8.64 \times 10^4 t) dt \Rightarrow$$

$$V - V_0 = (8.64 \times 10^6 t - 9.5 \times 10^6 t - \frac{t^2}{2} \times 8.64 \times 10^4) \Rightarrow$$

$$V = 10^9 - 0.86 \times 10^6 t - 4.32 \times 10^4 t^2$$



Άσκηση ②

$$N(t+1) = a N(t) - b N(t)^2, \quad b = 0.1$$

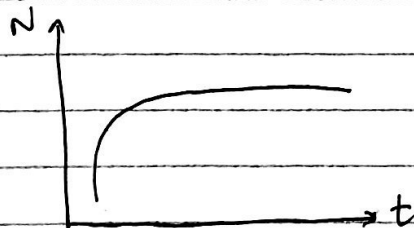
a) $a = 2$

b) $a = 3.5$

γ) $a = 4.5$

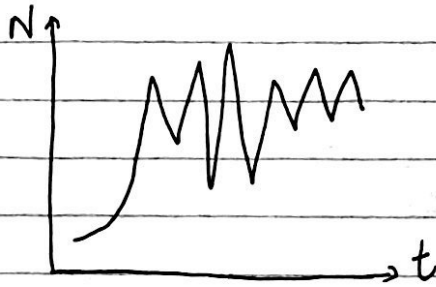
Λύση

a) Για $a = 2$:

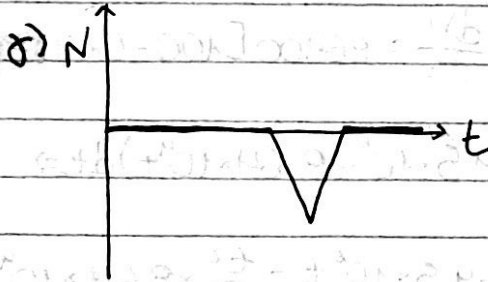


σταθερός πληθυσμός

β) Για $\alpha = 3.5$



Περιοδικότητα
(η καλύτερη αντιστοίχιση
του μοντέλου που γίνεται)

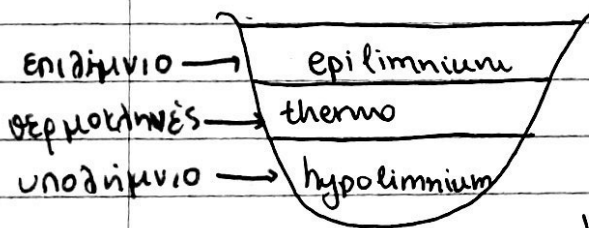


Για $\alpha = 4.5$

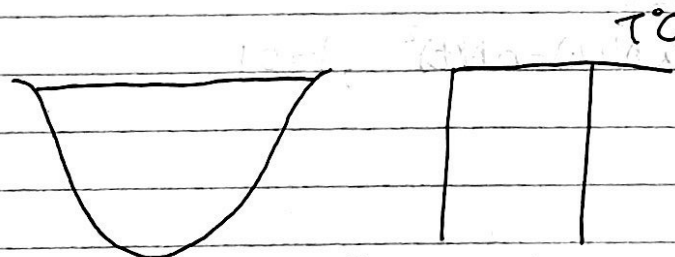
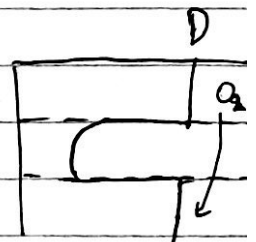
Ο πληθυσμός μειώνεται
και ~~παρα~~ αναβίβεται

2/11/2022

Διμερική διμυν

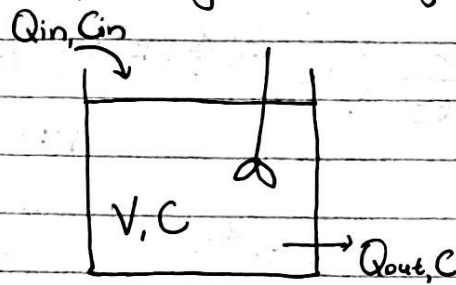


Καλοκαίρι



Χειμώνας (Φλώρινα)

Completely mixed system



Μεταβολή μάζας:

$$\frac{d(CV)}{dt} = Q_{in}C_{in} - Q_{out}C + r \cdot V \approx$$

$$\left[\frac{m^3 g / m^3}{s} = \frac{g}{s} \right]$$

Ο(ελαστικές συστολές)

$$\frac{dV}{dt} = Q_{in} - Q_{out} \Rightarrow Q_{in} = Q_{out} = Q$$

Θερμική ηχητική αντίδραση: $r = -kC$

αυτοκαταστροφή

$$V \frac{dC}{dt} + C \frac{dV}{dt} = Q_{in}C_{in} - Q_{out}C - kVC \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= \frac{Q}{V}C_{in} - \frac{Q}{V}C - \left(\frac{Q}{V}C - \frac{kV}{V}C \right) \\ \frac{V}{Q} = \tau & \text{ ο υδραυλικός χρόνος παραμονής} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{dC}{dt} + \left(\frac{1}{\tau} + k \right) C = \frac{C_{in}}{\tau} \quad (1) \text{ 1ης τάξης ομογενής γραμμική εξίσωση}$$

Απόδειξη της εξίσωσης (1):

$$Y' + p(x)Y = q(x)$$

$$\text{Γενική λύση: } y = y_0 \exp(-P(t)) + \exp(-P(t)) \int_0^t \exp(P(t)) q(t) dt$$

$$P(t) = \int p(t) dt$$

$$(q_{in} = \frac{C_{in}}{\tau})$$

$$p(x) = \left(k + \frac{1}{\tau} \right) \rightarrow P(t) = \int \left(k + \frac{1}{\tau} \right) dt = \left(k + \frac{1}{\tau} \right) t$$

$$C = C_0 \cdot \exp\left(-\left(\frac{1}{\tau} + k\right)t\right) + \exp\left(-\left(\frac{1}{\tau} + k\right)t\right) \int_0^t \exp\left(\left(\frac{1}{\tau} + k\right)t\right) \left(\frac{C_{in}}{\tau}\right) dt \Rightarrow$$

$$C = C_0 \cdot e^{-\left(\frac{1}{\tau} + k\right)t} + \frac{C_{in}}{\tau \left(\frac{1}{\tau} + k\right)} e^{-\left(\frac{1}{\tau} + k\right)t} \int_0^t e^{\left(\frac{1}{\tau} + k\right)t} d\left(\frac{1}{\tau} + k\right)t \Rightarrow$$

$$C = C_0 e^{-(\frac{1}{\tau} + k)t} + \frac{C_{in}}{1+k\tau} e^{-(\frac{1}{\tau} + k)t} (e^{(\frac{1}{\tau} + k)t} - 1) \Rightarrow$$

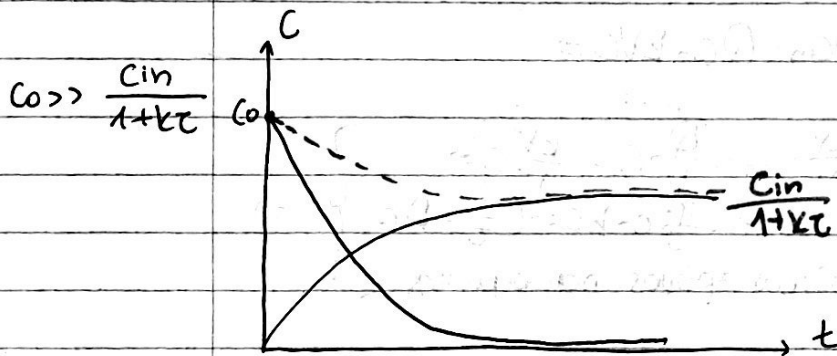
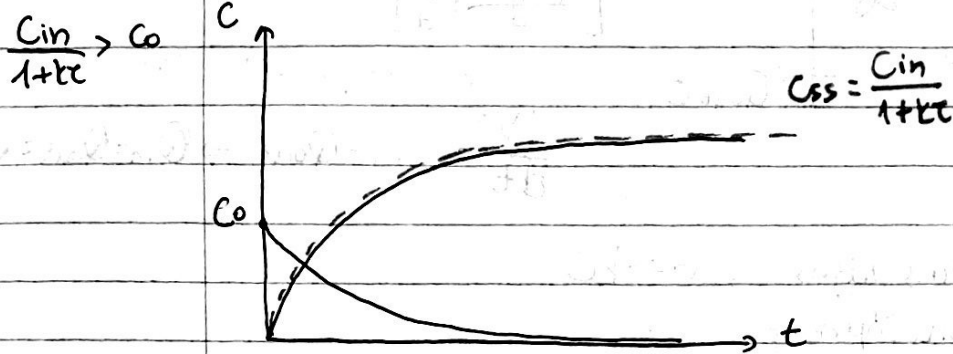
$$C = C_0 e^{-(\frac{1}{\tau} + k)t} + \frac{C_{in}}{1+k\tau} (1 - e^{-(\frac{1}{\tau} + k)t}) \quad (2)$$

→ steady state (C_{ss})

τ : δείχνει την

καταναλώση της
ευσταθείας

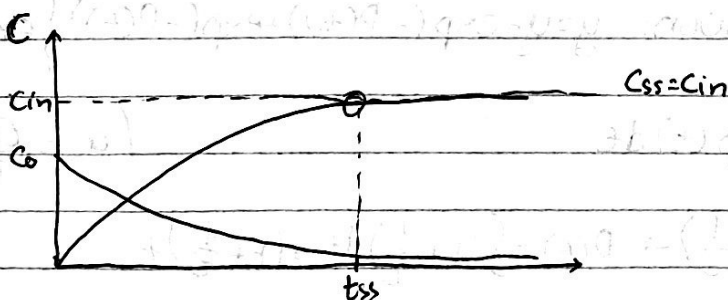
τ : δείχνει το "γεννα-
μα"



Χρήση της εξίσωσης (2):

• $\lambda \rightarrow 0$

$$k=0 \Rightarrow C = C_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + C_{in} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$



Steady state: $\frac{C - C_0}{C_{ss} - C_0} = 0.95 \Rightarrow 0.95 C_{ss} - 0.95 C_0 - (C - C_0) = 0$

$$C = 0.05 C_0 + 0.95 C_{ss}$$

$$C = C_0 e^{-(\frac{1}{\tau} + \kappa)t} + \frac{C_{in}}{1 + \kappa\tau} (1 - e^{-(\frac{1}{\tau} + \kappa)t})$$

$$C = \left(\frac{1}{\tau} + \kappa\right)t = 0.05$$

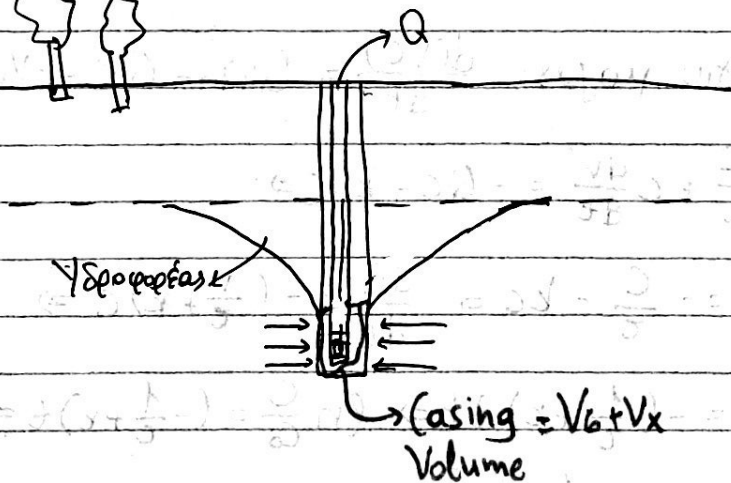
$$(1 - e^{-(\frac{1}{\tau} + \kappa)t}) = 0.95$$

$$t_{ss} : \ln e^{-(\frac{1}{\tau} + \kappa)t} = \ln 0.05 \Rightarrow -(\frac{1}{\tau} + \kappa)t_{ss} = \ln 0.05 \Rightarrow$$

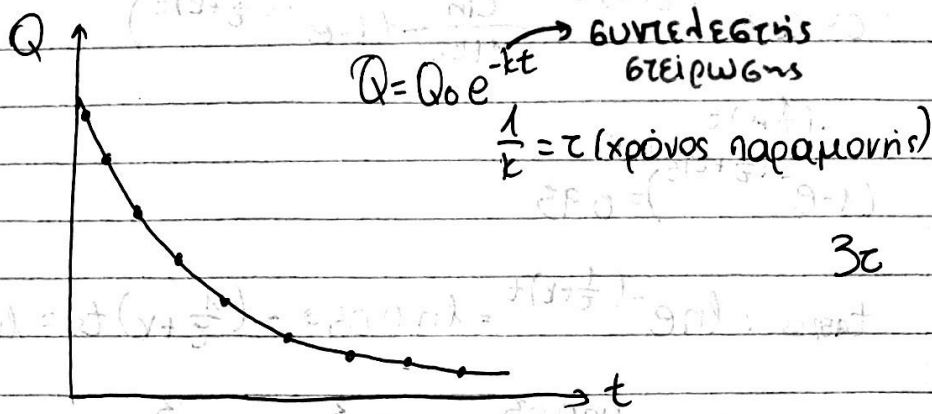
$$t_{ss} = \frac{\ln 0.05}{-(\frac{1}{\tau} + \kappa)} \approx \frac{-3}{-(\frac{1}{\tau} + \kappa)} = \frac{3}{(\frac{1}{\tau} + \kappa)}$$

$$\text{Αρα, για } \kappa = 0 : t_{ss} = 3\tau$$

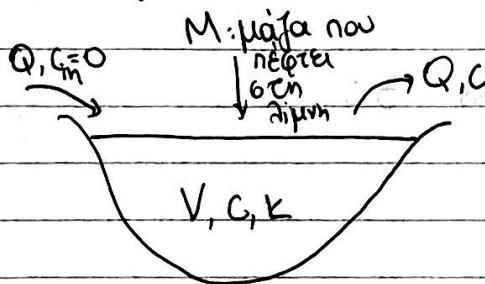
Case study



Κατάλληλος πρώτος άιράνινγκ : $t_{ss} = 3-5$ casing volume



Να επω την αναλυτική λύση της εξίσωσης για το $\rightarrow$ το λογισμικό παύει να παραμένει σταθερό.



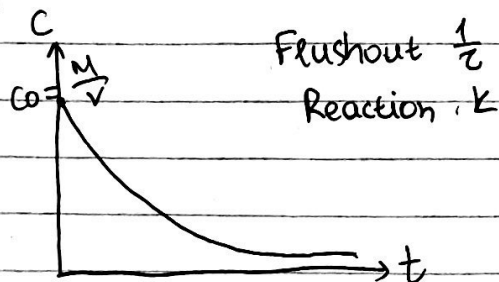
Λογισμικό μάζας: $\frac{d(VC)}{dt} = \cancel{Q_{in}} - QC - kVC \Rightarrow$

$V \frac{dC}{dt} + C \frac{dV}{dt} = -QC - kVC \Rightarrow$

$\frac{dC}{dt} = -\frac{C}{\tau} - kC \Rightarrow \frac{dC}{dt} = -\left(\frac{1}{\tau} + k\right)C \Rightarrow$

$\frac{dC}{C} = -\left(\frac{1}{\tau} + k\right)dt \Rightarrow \ln \frac{C}{C_0} = -\left(\frac{1}{\tau} + k\right)t \Rightarrow$

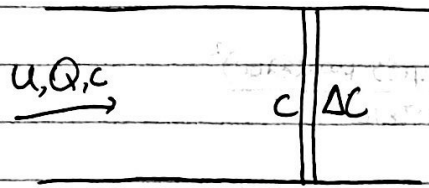
$C = C_0 \cdot e^{-\left(\frac{1}{\tau} + k\right)t}$, όπου $C = \frac{M}{V}$



$\frac{dC}{dt} = -\frac{C}{\tau} - kC \Rightarrow$

$\frac{dC}{dt} = -\left(\frac{1}{\tau} + k\right)C$

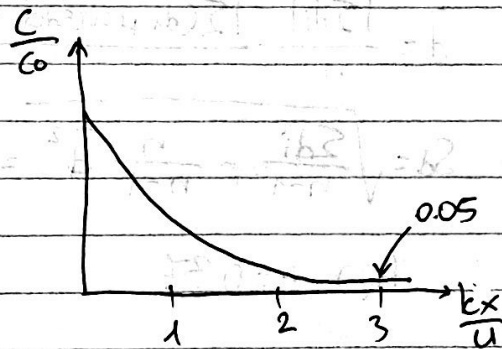
Plug Flow System



At steady state

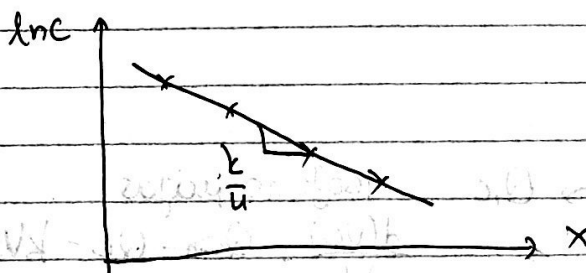
$$\frac{\partial c}{\partial t} = -u \frac{\partial c}{\partial x} - kc \Rightarrow u \frac{dc}{dx} = -kc \Rightarrow$$

$$\int \frac{dc}{c} = -\frac{k}{u} \int dx \Rightarrow c = c_0 e^{-\frac{k}{u}x} = c_0 \cdot e^{-kt} \Rightarrow t = \frac{x}{u} \text{ (travel time)}$$



$\frac{c}{c_0}$	$\frac{kx}{u}$
1	0
0.37	1
0.14	2
0.05	3

$$c = c_0 \cdot e^{-\frac{kx}{u}} \Rightarrow \ln c = \ln c_0 - \frac{kx}{u}$$



1^ο Σειρά Ακρίσεων

Ακρίση ③

Μέθοδος χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(\text{τιμές πεδίου} - \text{τιμές μοντέλου})^2}{\text{τιμές μοντέλου}}$$

Οι μέγες τιμές επαναλαμβάνονται κανονιστικά και το μοντέλο λειτουργεί όταν $\chi^2 < \chi_0^2$
0.13 $\leftarrow$ από πίνακα για $n-1$ β.ε $\uparrow$ 10

$\chi_0^2 = 4.17$ για επίπεδο εμπιστοσύνης 0.9

Μέθοδος: $t = \frac{\bar{d}\sqrt{n}}{S_d}$, όπου $\bar{d} = \frac{|\sum d_i|}{n} = \frac{|\sum (d_i \text{ μοντέλου} - d_i \text{ πεδίου})|}{n} = 0.032$
t-test

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n-1} - \frac{n}{n-1} \bar{d}^2} = 0.2736$$

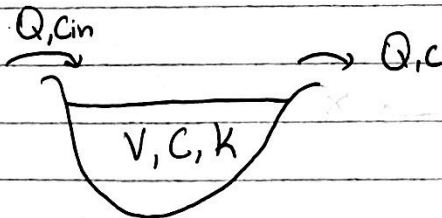
$t < t_0$

Άρα $t = 0.37$

$\leftarrow$ από πίνακα

(δεν χρησιμοποιώ επίπεδο εμπιστοσύνης
αλλά επίπεδο σημαντικότητας 0.1)

11/11/2022

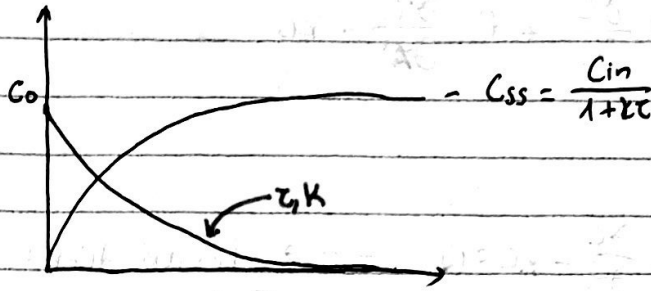


Ισοζύγιο μάζας:

$$\frac{d(VC)}{dt} = Q_{cin} - Q_c - kVC *$$

$\downarrow$
Ισχύει για ένα
συνεχόμενο
φορτίο

$$* \rightarrow C = C_0 \cdot e^{-(\frac{1}{\tau} + k)t} + \frac{C_{in}}{1 + k\tau} [1 - e^{-(\frac{1}{\tau} + k)t}]$$



(απόκλιση)

Στην περίπτωση από που προκύπτει μια μάζα M στη αίτηση:

$$Q=0 \quad \frac{d(CV)}{dt} = -QC - kVC \Rightarrow C = C_0 e^{-(\frac{1}{\tau} + k)t}$$

$$C_0 = \frac{M}{V_{\text{αίματος}}}$$

Plug Flow System



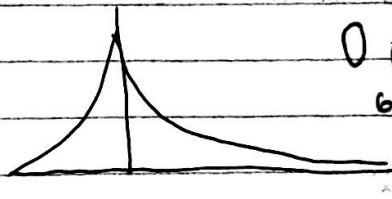
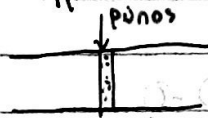
$$\frac{\partial C}{\partial t} = -u \frac{\partial C}{\partial x} - kC$$

Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει:

$$C = C_0 \times \exp\left(-\frac{kx}{u}\right) = C_0 \times \exp(-kt)$$

↑ travel time

Παθητική ανάμιξη



Ο ρύπος διαστέλλεται τόσο ανάντη του σημείου εισροής όσο και κατάντη.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -u \frac{\partial C}{\partial x} + E \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \kappa C$$

σταθερές
συνοριακές

$$E \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u \frac{\partial C}{\partial x} - \kappa C = 0 \longrightarrow \text{Γενική λύση:}$$

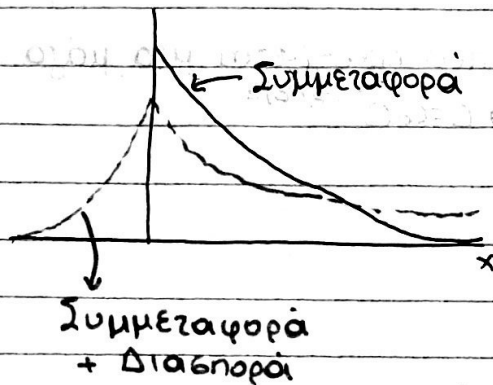
$$E y'' - \bar{u} y' - \kappa y = 0$$

$$a y'' - b y' - c y = 0$$

$$y = B e^{g x} + D e^{j x}$$

B, D = σταθερές

$$g, j = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



$$C = B e^{g x} + D e^{j x}$$

E: συντελεστής
διασποράς

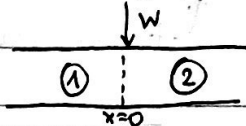
$\bar{u}$: μέση ταχ.:

κ : αντίδραση

$$g, j = \frac{-\bar{u} \pm \sqrt{\bar{u}^2 + 4\kappa E}}{2E} = \frac{\bar{u}}{2E} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\kappa E}{\bar{u}^2}} \right] \Rightarrow$$

$$g, j = \frac{\bar{u}}{2E} [1 \pm m] \quad \begin{cases} g \Rightarrow + \\ j \Rightarrow - \end{cases}$$

Ο υπολογισμός των B, D γίνεται με οριακές συνθήκες:



Τμήμα ①: $x = -\infty \Rightarrow C = 0$ (από καμψήλη)

$$C_1 = B e^{g x} + D e^{j x} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} e^{g(-\infty)} = 0 &\Rightarrow g > 0 \\ e^{j(-\infty)} = e^{\infty} &\Rightarrow j < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow D e^{j x} = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$\text{Άρα } C_1 = \boxed{B e^{g x}}$$

Τμήμα ②: $x = 0 \Rightarrow C_1 = C_0$

$$C_1 = B e^{g x} = C_0$$

$$\left. \begin{aligned} e^{g x} = e^0 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_1 = C_0 \cdot e^{g x}$$

$$B = C_0$$

Τύπος (2): $x = +\infty \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = D e^{jx}$
 $B = 0$

$x = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = C_0 e^{jx}$
 $\hookrightarrow D = C_0$

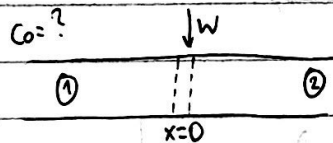
Γενική λύση:

$C_1 = C_0 \cdot e^{gx}, -\infty < x < 0$

$C_2 = C_0 \cdot e^{jx}, 0 < x < \infty$

$g = \frac{u}{2E} (1+m), m = \sqrt{1 + \frac{4kE}{u^2}}$

$j = \frac{u}{2E} (1-m)$



$Q C_0 - EA \frac{dC_1}{dx} \Big|_{x=0} + W = Q C_0 - EA \frac{dC_2}{dx} \Big|_{x=0}$

$\frac{dC_1}{dx} \Big|_{x=0} = g B = g C_0, \frac{dC_2}{dx} \Big|_{x=0} = j C_0 \Rightarrow$

$C = B e^{gx} = C_0 e^{gx} \Rightarrow \frac{dC}{dx} = g B = g C_0$

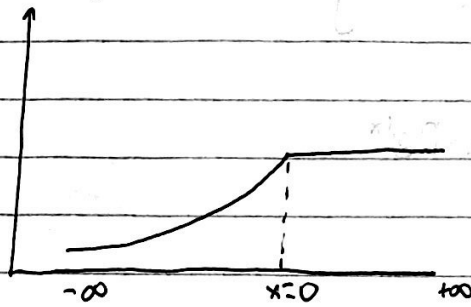
$\Rightarrow -EA g C_0 + W = -EA j C_0 \Rightarrow C_0 = \frac{W}{EA(g-j)} = \frac{W}{EA \frac{u}{2E} (1+m-1+m)} = \frac{W}{A \cdot u \cdot m} \Rightarrow$

$C_0 = \frac{W}{Q \cdot m}$

Αν δεν έχουμε διασπορά: $E=0, m = \sqrt{1 + \frac{4kE}{u^2}} = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow C_0 = \frac{W}{Q}$

Morcedonainen avaruus ($k=0$):

Salinity

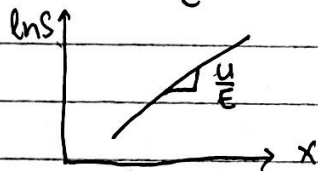


$$E \frac{d^2 c}{dx^2} - u \frac{dc}{dx} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} S &= c_1 \cdot e^{gx} + c_2 \cdot e^{jx} \\ g &= u/E \\ j &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

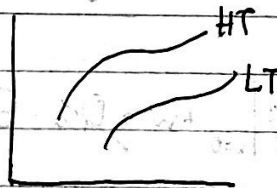
$$S = c_1 e^{\frac{ux}{E}} + c_2 \cdot 0 \Rightarrow S = S_0 \cdot e^{\frac{u}{E}x}, x \leq 0$$

$$\ln S = \ln S_0 + \frac{u}{E}x$$

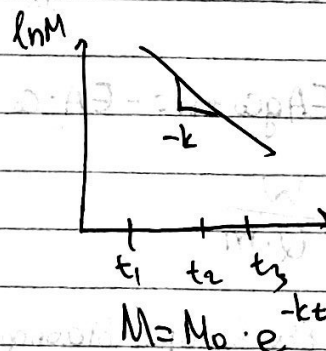
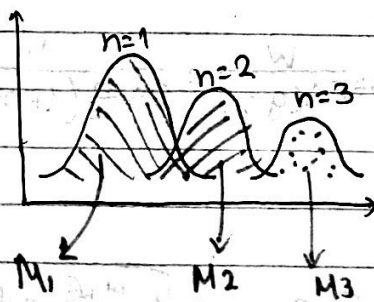


$$g = \frac{u}{2E} (1+m)$$

$$j = \frac{u}{2E} (1-m)$$



Taajuuksien vektorit

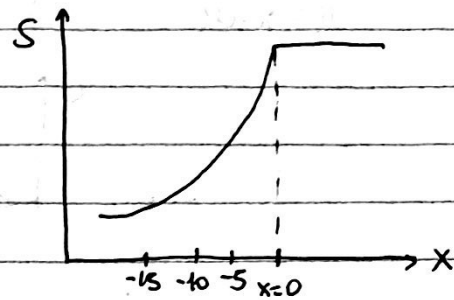


Παράδειγμα 6.8 βελίδα 321

$$E = \text{mi}^2/\text{d} \quad \text{cm}^2/\text{s}$$

$$u = 1.8 \text{ mi/d}$$

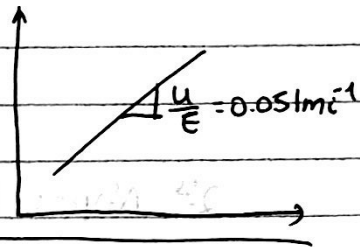
x, mi	X	S, ppm
0	0	20000
5	-5	15500
10	-10	12000
15	-15	9300
21	-21	5000



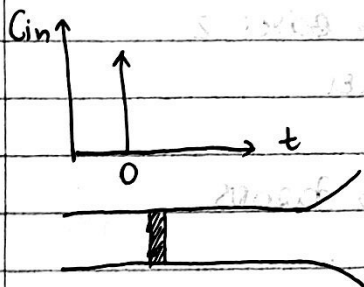
$$S = S_0 \cdot e^{uX/E} \Rightarrow$$

$$\ln S = \ln S_0 + \frac{uX}{E}$$

$$\frac{u}{E} = 0.051 \Rightarrow E = 35.3 \frac{\text{mi}^2}{\text{d}}$$



Υπολογισμός K :



$$C = \frac{M}{2A\sqrt{\pi Et}} \exp\left[-\frac{(x-ut)^2}{4Et} - kt\right]$$

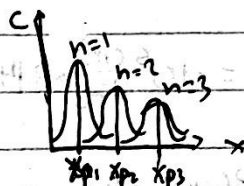
αντίσταση του x
από τη μέση τιμή
 $\varphi = x - ut$

$$x = ut$$

$$\varphi = 0 \rightarrow x_1 = ut_1$$

$$x_2 = ut_2$$

Βρίσκω το K
ολοκληρώνοντας
τις καμπύλες και
βρίσκω το M .



$$C_P x = \frac{M}{2A\sqrt{\pi Et}} e^{-kt}$$



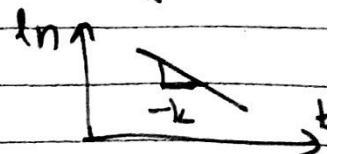
τις 1^{ες} καλ.
κύκλους

$$a) u_x = \frac{x_P}{t_n} = \frac{x_{P1}}{t_1} = \frac{x_{P2}}{24.84 \text{ hr}} = \frac{x_{P3}}{37.26 \text{ hr}}$$

$$b) M = A \int_0^\infty C dx = Q_{\text{net}} \int_0^\infty C dt$$

$$M = M_0 \cdot e^{-kt} \Rightarrow$$

$$\ln M = \ln M_0 - kt$$



1st Neues Fick: $J = -DA \frac{dC}{dx} \rightarrow$ Kationen

παρεκλή
μαζας

60VTEAE6TH
MOPATHS
SIAIUS

2^{os} Nöpas Fick: $\frac{C-C_0}{C_0-C_0} = \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{4Dt}}\right)$

C: " " Inteira de Baços 2

7: Baños

εργ: συμπληρωματική συνάρτηση τιμολογ

$$I = mg/day$$

$$\frac{dc}{dx} = -1 \text{ mg/L}\cdot\text{cm}$$

$$D = 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$$

$$A = 3.14 \text{ cm}^2$$

$$J = -DA \frac{dc}{dx} = -10^{-5} \frac{\text{cm}^2}{\text{day}} \times 3.14 \text{ cm}^2 \times (-1) \frac{\text{mg}}{\text{L} \cdot \text{cm}} \Rightarrow$$

$$J = 3.14 \times 10^{-5} \times 86400 \times 10^{-3} \text{ mg/day}$$

$$= 3.14 \times 86400 \times 10^{-6} \text{ mg/day}$$

$$= 0.0027 \text{ mg/day}$$

Άσκηση ②

$$D = 0.63 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{sec}$$

$$1 \text{ mg/L}$$

$$J = j \text{ mg/sec}$$

$$A = 0.1 \text{ m}^2, dx = 60 \mu\text{m}$$

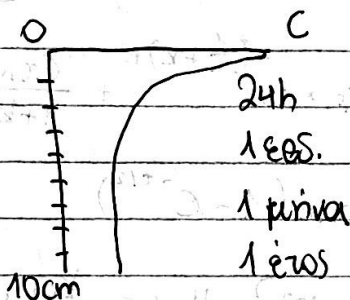
$$t = j \text{ σε } 1 \text{ mg/L καλείνται}$$

$$J = -DA \frac{dc}{dx} = -0.63 \times 10^{-5} \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}} \times 0.1 \text{ m}^2 \times \frac{1 - 0}{60 \mu\text{m}} \Rightarrow$$

$$J = 0.63 \times 10^{-5} \times 10^{-4} \times 0.1 \times \frac{1/10^{-3}}{60 \times 10^{-6}} \Rightarrow J = 0.00105 \text{ mg/sec}$$

$$t = \frac{C}{J} \Rightarrow t = 952.38 \text{ sec}$$

Άσκηση ③



$$C = j$$

$$D = 1.275 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{sec}$$

$$C_0 = 1391 \text{ mg/L}, C_b = 10 \text{ mg/L}$$

$$\text{Από 2}^{\circ} \text{ νόμο του Fick: } \frac{C - 1391}{10 - 1391} = \text{erf} \left(\frac{z}{\sqrt{4 \times 1.275 \times 10^{-5} t}} \right)$$

Μέσω excel ανακατασκευάζω τις τιμές z,t.

Άσκηση ④

$$C_0 = 1780 \mu\text{g/L}$$

$$C_b = 5 \mu\text{g/L}$$

$$t = 2 \text{ years}$$

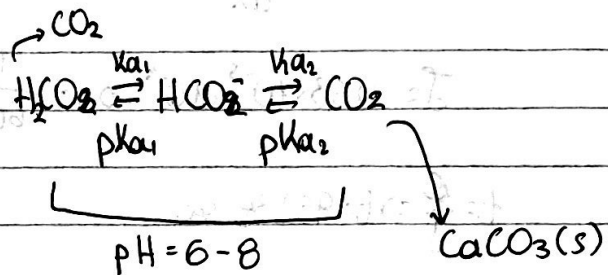
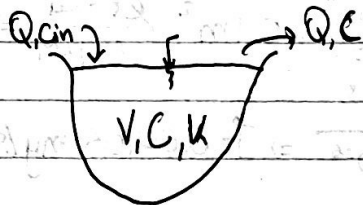
$$t = j \text{ για } C = 50\% C_0 \text{ και}$$

10cm από την
επιφάνεια

$$\frac{C - C_0}{C_0 - C_0} = \text{erf}(x) \quad \text{και} \quad \text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x)$$

Από τον πίνακα στο excel βρίσκω το $\text{erf}(x)$ και από αυτό το $\text{erfc}(x)$ και έπειτα από τον πίνακα βρίσκω τα αντίστοιχα x

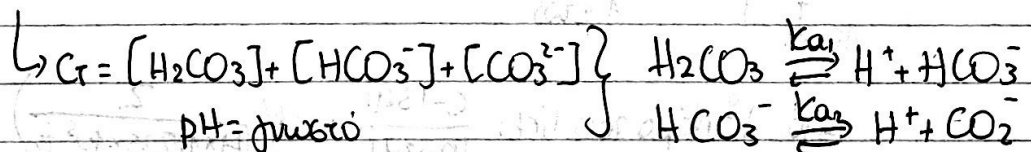
25/11/2022



Αν στην παραπάνω περίπτωση δεν έχουμε αέριο και ιονισμό

$$\frac{dV C_T}{dt} = Q C_{T,in} - Q C_T \Rightarrow C_T = C_{T,0} \cdot e^{-(\frac{1}{\tau} + k)t} + \frac{C_{T,in}}{1+k\tau} [1 - e^{-(\frac{1}{\tau} + k)t}]$$

$$\text{Για } k=0: C_T = C_{T,0} \cdot e^{-t/\tau} + C_{T,in} (1 - e^{-t/\tau})$$



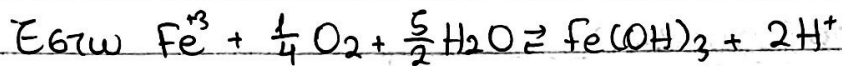
$$K_{a1} = \frac{[\text{H}^+][\text{HCO}_3^-]}{[\text{H}_2\text{CO}_3]}, \quad K_{a2} = \frac{[\text{H}^+][\text{CO}_3^{2-}]}{[\text{HCO}_3^-]}$$

Νόμος Σπείρης μαζών

$$[A] \geq [B]$$

$$r_a \propto [B] \Rightarrow r_a \propto -k[A][B]$$

↳ πυκνός με τον
οποιο αυξάνει

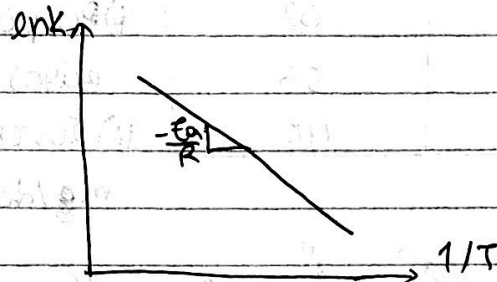


Κατακρύπνωση σιδήρου $\rightarrow \text{Fe}^{2+} \rightarrow \text{Fe}^{3+} + \frac{1}{4} \text{O}_2 \rightarrow \text{Fe}(\text{OH})_3$

Ρυθμός που θα αντιστοιχεί: $V_{\text{Fe}} = -k [\text{Fe}^{2+}] [\text{O}_2]^{1/4}$
ο ΣΙΔΕΥΣ

Νόμος σταθεράς ταχύτητας της αντίδρασης Arrhenius

$$k = A \exp(-E_a/R \cdot T) \Rightarrow \ln k = \ln A - \frac{E_a}{R} \cdot \frac{1}{T}$$



Σύστημα Batch: Τίποτα δεν "μπαίνει", τίποτα δεν "βγαίνει".

A. Μονομερής ραγής αντίδραση

$$\frac{dC}{dt} = -k[C]^0 = -k \rightarrow \frac{\text{mg/L}}{\text{day}}$$

$$\frac{dC}{dt} = -k[C]^1 \leftrightarrow \frac{1}{d} \frac{\text{mg}}{\text{L}}$$

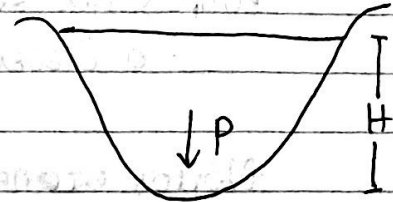
$$\frac{dC}{dt} = -k[C]^2 \rightarrow \frac{1}{\text{mg} \cdot \text{d}} \left(\frac{\text{mg}}{\text{L}} \right)^2 = \frac{\text{mg}}{\text{L} \cdot \text{d}}$$

* Για k δεν έχουν τις ίδιες μονάδες καθώς σε κάθε περίπτωση στο 2^ο μέρος πρέπει να είναι ελεγχμένο σε $(\text{mg/L})/\text{day}$.

Παραδείγματα

1. Ιασηανή μέρα	P (mg/L)
250	97
254	90
264	86
270	72
275	51
280	57
290	62
295	55
300	46

λίμνη τίνου
Batch

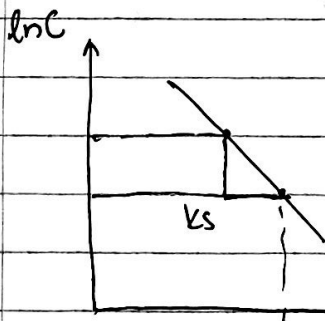


i) Ρυθμός καθίζησης αν μέσο βάθος 5.9m.

ii) Συντελεστής καθίζησης σε mg/day.

$$i) \frac{d(C)}{dt} = Q_{in} - Q_{out} - k_s V C \Rightarrow \frac{dC}{dt} = -k_s \cdot C \Rightarrow \frac{dC}{C} = -k_s dt \Rightarrow$$

$$C = C_0 e^{-k_s t} \Rightarrow \ln C = \ln C_0 - k_s t$$

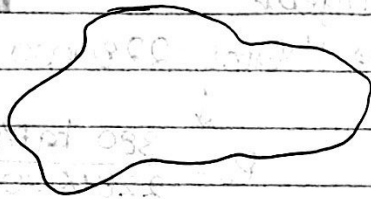


$$ii) \text{slope} = \frac{4.57 - 3.8}{50 \Delta t} = 0.015 / d *$$

$$k_s = H \cdot K = 5.5 \times 0.015 \frac{m}{d} = 0.0825 \frac{m}{d}$$

* Για εύρος παύρων 2 τυχόν
που θεωρούμε ανεξαρτητοποιημένες
και διαχωρίζουμε με Δt : $k_s = \frac{\Delta(\ln C)}{\Delta t}$

2.



$$V = 5 \times 10^6 \text{ m}^3$$

Θέλουν να ποτίσουν 2500 στρέμματα
(1 στρέμμα = 1000 m²)

5 λίτρα/ha → Τα λίτρα κορμίζουν
(1 ha = 10⁴ m²) στην περιοχή



Σταθερά φασφάρας από
κροτιδωτικά: $K_s = 0.05 \text{ day}$

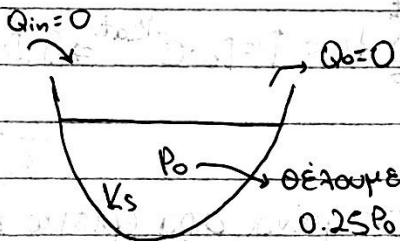
Θέλουμε να μειώσουμε τη συστένωση του P στο 25%.

Λεκάνη απορροής να

επηρεάσει το νερό =

1900 στρέμματα

Λύση



$$\frac{d(C \times V)}{dt} = Q_{in} C - Q_{out} C - K_s V C \Rightarrow$$

$$\frac{dC}{dt} = -K_s C \Rightarrow \frac{dC}{C} = -K_s dt \Rightarrow$$

$$C = C_0 e^{-K_s t}$$

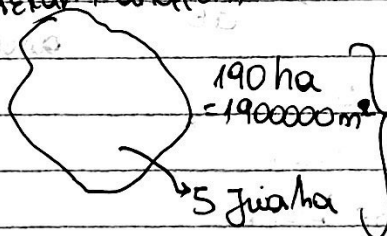
Θέλω $C = 0.25 C_0$

$$0.25 C_0 = C_0 e^{-K_s t} \Rightarrow t = \frac{\ln 0.25}{0.05} = 27.7 \text{ days}$$

(Θέμα εξετάσεων)

Ποια είναι η αρχική συστένωση του φωσφόρου στο λίμνη;

Λεκάνη απορροής



$$Z_{\text{λίμνη}} = 5 \frac{\text{λίτρα}}{\text{ha}} \times 1900 \text{ ha} = 950 \text{ λίτρα}$$

Κάθε λίτρο παράγει 400 g P/year

$$\text{Φορτίο λίμνης} = 400 \frac{\text{g P}}{\text{year}} \times 950 = 380000 \text{ g/year} = 380 \text{ kg P/year}$$

$$B_{\text{prox}}: 1200 \text{ mm/year} = 12 \text{ m/year}$$

$$O_{\text{oxos}} = 1900000 \text{ m}^2 \times 1.2 \frac{\text{m}}{\text{year}} \Rightarrow \text{Volume} = 2280000 \text{ m}^3/\text{yr}$$

$$P_0 = \frac{380 \text{ kg P/yr}}{2280000 \text{ m}^3/\text{yr}} = 167 \frac{\text{mg}}{\text{L}}$$

4^ο ΣΕΤ ΑΓΚΙΣΕΩΝ

ΑΓΚΙΣΗ ①

$$C_0 = ? , K_{La} = ;$$

$$D = C_{\text{sat}} - C \text{ (Έλασμα δ/νου } O_2)$$

$$D \xrightarrow{K_{La}} 0$$

Από παράρτημα βιβλίου:

$$T = 25^\circ\text{C} \rightarrow C_{\text{sat}} = 8.4 \text{ mg/L}$$

$$D = 8.4 - C$$

$$\frac{dD}{dt} = -K_{La} D \Rightarrow \int \frac{dD}{D} = -K_{La} \int dt \Rightarrow D = D_0 \cdot e^{-K_{La} t} \Rightarrow \ln D = \ln D_0 - K_{La} t$$

↓
από την σχέση
βρίσκω το K_{La}

Έχω χρόνο και συσχετισμένη δεδομένα, άρα βρίσκω το D του καί-
νω διαγράμμα στο excel. Από εξίσωση $y = 0.0578x + 2.0932$ έχω
 $K_{La} = 0.0578/\text{min}$

$$\ln D_0 = 2.0932 \Rightarrow D_0 = 8.24 \text{ mg/L} = C_{\text{sat}} - C_0 \Rightarrow C_0 = C_{\text{sat}} - D_0 \Rightarrow C_0 = 0.16 \text{ mg/L}$$

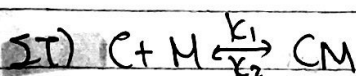
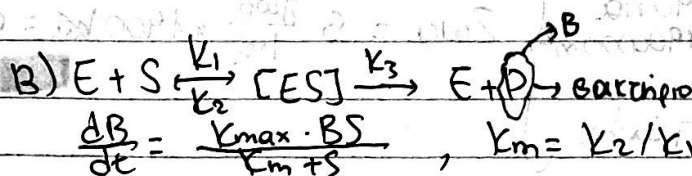
ΑΓΚΙΣΗ ②

$$A, \Gamma, \Delta, \text{Ε παρόμοια έκφραση} \Rightarrow A) \frac{dC}{dt} = -KC$$

$$(\text{μη αντιστρέφει, 1^ο τάξης αντίδραση}) B) \frac{dD}{dt} = -KD$$

$$\Delta) \frac{dC}{dt} = -KC \text{ (φωτοαποδόξινωση)}$$

$$E) \frac{d[Ra]}{dt} = -K[Ra] \text{ (ραδιενεργική αποδόξινωση του Ra στο νερό)}$$



$$\frac{dC}{dt} = -k_1 [C][M] + k_2 [CM]$$

7/12/2022

2^ο Εργαστήριο - Μοντελοποίηση BOD-DO σε οικιακά υγρά

Οργανική φόρτιση στον ποταμό. Οξυγόνο με το μοντέλο Streeter-Phelps.

(Βιβλίο σελ. 263)

A. Εξισώσεις - Δεδομένα

$$u = 0.3 \text{ m/s}$$

$$C_{\text{sat}} = 8.3 \text{ mg/L (ωρεάνιζωση ρορέματος)}$$

472 m → Εργαστήριο βιολογικού καθαρισμού

$$\text{BOD} \rightarrow L_0 = 12 \text{ mg/L}$$

$$\text{DO} \rightarrow C_0 = 8 \text{ mg/L}$$

Ποταμός:

L: BOD

$$\frac{d(VL)}{dt} = -K_d VL \Rightarrow \int_0^L \frac{dL}{L} = - \int_0^t K_d dt \Rightarrow \boxed{L = L_0 e^{-K_d t}}$$

μοντελοποίηση

$$\ln L = \ln L_0 - K_d t \Rightarrow t = \frac{x}{u}$$

$$\ln L = \ln L_0 - \frac{K_d}{u} \cdot x$$

Από το διάγραμμα $\ln L - x$, η κλίση αντιστοιχεί στο K_d .

Streeter-Phelps: $C = C_{\text{sat}} - (C_{\text{sat}} - C_0) e^{-K_d \frac{x}{u}} - \frac{K_d \cdot L_0}{K_a - K_d} (e^{-K_d \frac{x}{u}} - e^{-K_a \frac{x}{u}}) (1)$

$$D = C_{\text{sat}} - C$$

Εξίσωση

μπορώ να πάρω αυτές από τον οδηγό του εργαστηρίου

$$K_d = 0.23 / \text{day}$$

← Πρέπει να έχω αυτό

Υποθέτω τιμές για το K_a και για τα K_d υπολογίζω το δείκτη RMSE. Το γεγονός για το οποίο $\text{RMSE} \approx 0$ είναι και αυτό που επιλέγω.

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum (n_{\text{εδίου}} - \text{μοντέλου})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum (C_n - C_m)^2}{n}}$$

nίvares εἰσίωch

Δοκιμάζω εκ νέου νέα ζεύγη για ka-kd και βρίσκω το μικρότερο RMSE. Αυτό το ζεύγος είναι το σωστό και αυτό που τελικά επιλέγω.

B. $Q = 1000 \text{ lt}^3/\text{sec} = \text{L/day}$
 $F_{\text{εισ}} = ; \text{ kg BOD/day}$

Υποθέτω ένα λογιστικό μάγος για ένα τμήμα του ποταμού:

$$F_{\text{εισ},0} = F_{\text{εισ}} + F_{\text{εισ},1}$$

$$F_{\text{εισ}} = F_0 - F_{\text{εισ}} \Rightarrow F_{\text{εισ}} = Q \cdot L_0 - Q \cdot L_{\text{εισ}} = \text{mg/day}$$

μετατρέπω σε
kg/day

$$C_{cr} = 5 \text{ mg/L} \rightarrow X_{cr}$$

$$X_{cr} = \frac{u}{k_a - k_d} \ln \left[\frac{k_a}{k_d} - \frac{k_a D_0 (k_a - k_d)}{k_d L_0} \right]$$

ka-kd: αυτό που βρίσκω
670 A

$$D_0 = C_{sat} - C_0 = 0.3 \frac{\text{mg}}{\text{L}}$$

u: μετατρέπω σε m/day

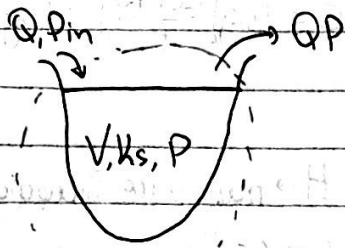
$$(1) \rightarrow \left. \begin{matrix} X = X_{cr} \\ C = C_{cr} \end{matrix} \right\} L_0 \Rightarrow F_{\text{εισ}} \text{ πρέπει να είναι μικρότερο από το } F_{\text{εισ}}$$

9/12/2022

Πόσην της χημικής βιομάσσης των φαικών νεφών από τα αλγά

P_s : φωσφορος
στη βιομάζα στην
μορφή

P : φωσφορος
του ελαφρού σε
διαλυτή μορφή



Ισοζύγιο φώρου ελέγχου:

$$V \frac{dP}{dt} = Q P_{in} - Q P - k_s P_s V$$

Σταθερές συνθήκες:

$$Q P_{in} - Q P - k_s a P V = 0 \Rightarrow$$

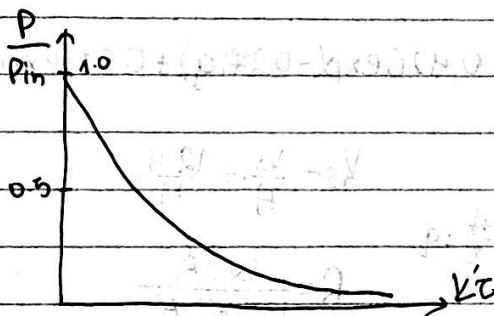
$$P_s = \frac{P_{in}}{1 + k_s \tau}$$

$$a = \frac{P_s}{P}, k_s = a \frac{V_s}{H}$$

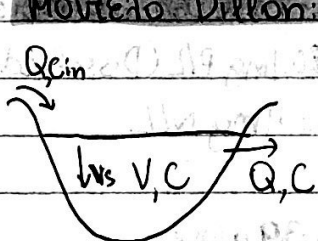
settling velocity

μέσο βάθος

% απομάκρυνσης: $R = 1 - \frac{P}{P_{in}} = \frac{k_s \tau}{1 + k_s \tau}$



Μοντέλο Dillon:



$$\left. \begin{aligned} V \frac{dC}{dt} &= Q C_{in} - Q C - k_s V C \\ k_s &= \frac{V_s}{H} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

A : επιφάνεια
λίμνης

$$\frac{(m^3/year)(g/m^3)}{m^2}$$

$$\frac{Q C_{in}}{A}$$

$$= \frac{Q C}{A} + \frac{k_s V C}{A}$$

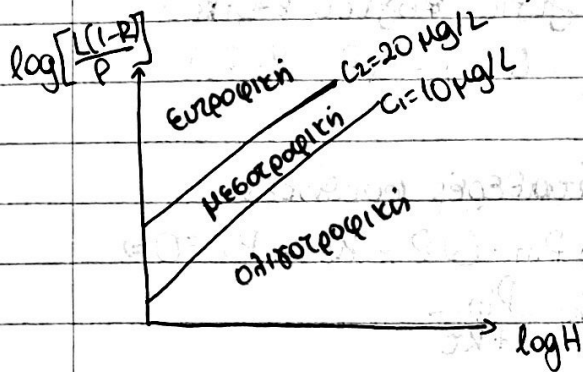
μέρος φορτίου που
απομακρύνεται

$$= (g/m^2) year = L (yeario)$$

$L \cdot R$

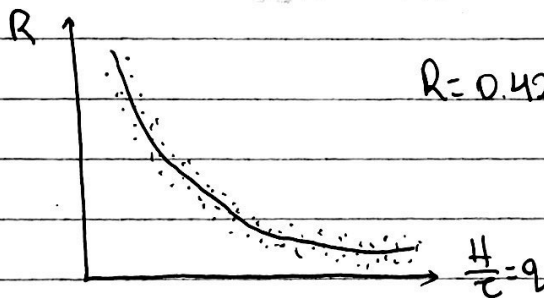
$$\frac{QC}{A} \cdot \frac{H}{H} = \frac{QCH}{V} = \frac{CH}{\tau}$$

$$L - LR = \frac{HC}{\tau} \xrightarrow{P=\frac{1}{5}} \frac{L(1-R)}{P} = HC = \log\left[\frac{L(1-R)}{P}\right] = \log HC = \log H$$



$H \rightarrow$ παίρνουμε διαφορά βαιον και επι-
 $P \rightarrow \tau = \frac{V}{Q}$ βρούμε το μέσο
 A βαιον

Υπολογισμός R

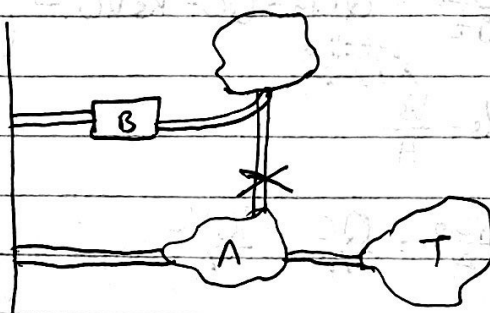


$$R = 0.426 \exp(-0.271q) + 0.577 \exp(-0.00949q)$$

$$K_s = \frac{V_s}{H} = \frac{12.4}{H}$$

$$R = \frac{Q/A}{13.5 + (Q/A)}$$

Αβκίνη (SOS) (Πρόβλημα 2-Ανάδραση ευτροφισμού λίμνης / 06)



DIP = 0.1 mg P/L (Dissolved Inorganic P)

DIN = 4 mg N/L

$MB_P = 32 \text{ g/mol}$

$MB_N = 14 \text{ g/mol}$

i) Περιοριστικός Παράγοντας

$$\frac{N}{P} = \frac{4 \text{ mg/L} / 14 \text{ mg/mmol}}{0.1 \text{ mg/L} / 32 \text{ mg/mmol}} = \frac{0.29 \text{ mM}}{0.003 \text{ mM}} = 92$$

Ο περιοριστικός παράγοντας είναι το P γιατί το N είναι 92 φορές περισσότερο στη λίμνη.

ii) $L_p = 82 \text{ ton/yr}$
 άμαρα 68%.

Ποσοστό κατακράτησης στην λίμνη με το ^{να καθίσταται (R)}
 μοντέλο του Dillon.

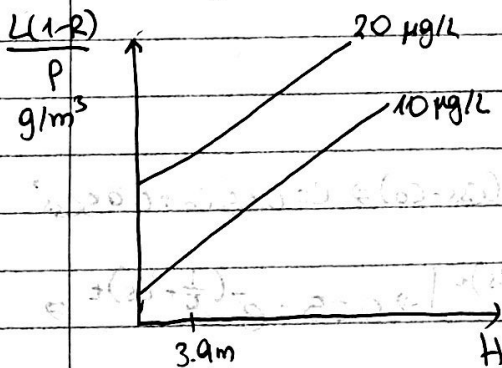
Dillon: $\frac{L(1-R)}{P} = HC, R = \frac{1}{2}$

$$\tau = \frac{V}{Q} = \frac{57 \times 10^6 \text{ m}^3}{761 \times 10^6 \text{ m}^3/\text{yr}} = 0.075 \text{ yr} = 27 \text{ d}$$

$$\frac{L(1-R)}{P} = HC \Rightarrow (1-R) = \frac{HCP}{L} = \frac{(3.9)(0.1)(13.33)}{5.61} = 0.93 \Rightarrow R = 0.07 \text{ ή } R = 7\%$$

$$\frac{L}{A} = \cancel{\frac{L}{V}} \cdot \frac{L}{V/H} = \frac{82 \times 10^6 \text{ g/yr}}{57 \times 10^6 / 3.9 \text{ m}^2} = 5.61 \text{ g/m}^2/\text{yr}$$

iii) Αξιολόγηση κατάστασης λίμνης πριν και μετά την έκρηξη του P



$$\frac{L(1-R)}{P} \begin{matrix} \nearrow \text{πριν} \\ \searrow \text{μετά} \end{matrix}$$

$$T_{piv} = \frac{5.61(1-0.07)}{13.33}$$

$$\text{Μετά: } L_{new} = 26.24 \text{ tn/yr}$$

$$\frac{L_{new}}{P} = \frac{26.24}{13.33} = 1.97$$

$L_{new} = 68\% \cdot L_p$ (ποσοστό μετά την έκρηξη)

Άσκηση (Πρόβλημα 3- Ανάλυση ευρωπαϊκού λίπους Λυσιμαξείας)

$$k_s = 0.1 \text{ d}$$

i) **Ισοζύγιο μάζας**

$$\frac{dVc}{dt} = Q C_{in} - Q C - k_s V C \quad (1)$$

ii) **Σε σταθιασμένη κατάσταση**

$$\frac{dVc}{dt} = 0$$

$$(1) \Rightarrow 0 = \frac{C_{in}}{\tau} + \frac{C}{\tau} + k_s C \Rightarrow C_{ss} = \frac{C_{in}}{1 + k_s \tau}$$

$$\tau = 27 \text{ d}$$

$$k_s = 0.1/\text{d}$$

$$C_{in} = 0.1 \text{ mg/l}$$

$$\Rightarrow C_{ss} = 0.027 \text{ mg/l}$$

$$= 27 \mu\text{g/l}$$

(Dillon $\rightarrow$ ευρωπαϊκή)

iii) **L $\downarrow$ 68% και δεν έχουμε έναλλαξη φασματικού βροχίου, να βρούμε το νέο C_{ss}**

$$C_{ss} = \frac{0.032(68 C_{in})}{1 + (0.1)(27)} = 0.008 \text{ mg/l}$$

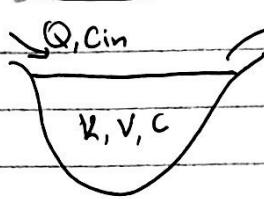
iv) **$t_{95\%ss} = ?$**

$$\frac{C - C_0}{C_{ss} - C_0} = 0.95 \Rightarrow C - C_0 = 0.95(C_{ss} - C_0) \Rightarrow C = 0.05 C_0 + 0.95 C_{ss}$$

$$C = e^{-(\frac{1}{\tau} + k_s)t} + C_{ss} [1 - e^{-(\frac{1}{\tau} + k_s)t}] \Rightarrow 0.05 = e^{-(\frac{1}{\tau} + k_s)t} \Rightarrow$$

$$t_{95\%ss} = \frac{3}{\frac{1}{\tau} + k_s} = 22 \text{ d}$$

Άσκησις (SOS) (Πρόβλημα 1-Ανάπτυξη επιρροής αίματος)



$$\tau = 5 \text{ yr}, \tau = \frac{V}{Q} \Rightarrow Q = \frac{V}{\tau} = \frac{10}{5} = 2 \times 10^5 \text{ m}^3/\text{yr}$$

$$V = 10^6 \text{ m}^3$$

$$C_{in} = 24 \text{ } \mu\text{g/L}$$

$$C_{ss} = 15 \text{ } \mu\text{g/L}$$

i) **Ισορροπία φαρμάκων στο αίμα**

$$\frac{d(VC)}{dt} = Q C_{in} - Q C - k_s V C$$

ii) **Ανάπτυξη αίμα**

$$C = C_0 e^{-(\frac{1}{\tau} + k_s)t} + \frac{C_{in}}{1 + k_s \tau} [1 - e^{-(\frac{1}{\tau} + k_s)t}]$$

iii) **$k_s \rightarrow$ σταθερές συστολής**

$$C_{ss} = \frac{C_{in}}{1 + k_s \tau} \Rightarrow k_s = \frac{(C_{in}/C_{ss}) - 1}{\tau} \Rightarrow k_s = 0.12/\text{yr}$$

iv) **Στην αίμα θα εισέλθουν εφόσον από βιοαπορρό. $Q_b = 200000 \text{ m}^3/\text{yr}$ και η συστ. του P από το βιοαπορρό είναι $C_b = 60 \text{ } \mu\text{g/L}$ Ζητείται η νέα συγκέντρωση του P.**

$$C_{in}^{new} Q^{new} = C_{in} Q_b + C_b Q_b \Rightarrow C_{in}^{new} = \frac{(15)(2 \times 10^5) + (60)(2 \times 10^5)}{2 \times 10^5}$$

$$v) \underline{C_{ss}^{new}} = \frac{C_{in}^{new}}{1 + k_s \tau} = 28.8 \text{ } \mu\text{g/L}$$

$$vi) \underline{t_{95\%ss}} = \frac{3}{\frac{1}{\tau} + k_s} = 5.7 \text{ yr}$$