



Βελτιστοποίηση Περιβαλλοντικών Συστημάτων

Πολυτεχνείο Κρήτης
Σχολή Μηχανικών Περιβάλλοντος
3^η σειρά φροντιστηριακών ασκήσεων

Άσκηση 1

- Επιλύστε το πρόβλημα βελτιστοποίησης που ακολουθεί με χρήση της μεθόδου Simplex. Καθορίστε τις σκιώδεις τιμές.

$$\begin{aligned}\max Z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t } 2x_1 + x_2 &\leq 18 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 42 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 24 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Άσκηση 1- Λύση

- Με την προσθήκη των χαλαρών μεταβλητών το πρόβλημα διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \max Z &= 3x_1 - 2x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 \\ \text{s.t } 2x_1 + x_2 + S_1 &= 18 \\ 2x_1 + 3x_2 + S_2 &= 42 \\ 3x_1 + x_2 + S_3 &= 24 \\ x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Άσκηση 1- Λύση

- 1^{ος} πίνακας Simplex. Βασικές μεταβλητές: S_1, S_2, S_3

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	$\Delta.M$	Λόγος
Z	1	-3	-2	0	0	0	0	
S_1	0	2	1	1	0	0	18	$18/2=9$
S_2	0	2	3	0	1	0	42	$42/2=24$
S_3	0	3	1	0	0	1	24	$24/3=8$

pivot

- Ως εισερχόμενη μεταβλητή επιλέγεται η μη βασική, με το μεγαλύτερο κατά απόλυτή τιμή συντελεστή, δηλαδή η x_1
- Ως εξερχόμενη επιλέγεται η μεταβλητή με τον ελάχιστο μη αρνητικό λόγο, δηλαδή η S_3

Άσκηση 1- Λύση

- 2^{ος} πίνακας Simplex. Βασικές μεταβλητές: S_1, S_2, x_1

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	Δ.Μ	Λόγος	Νέα γραμμή οδηγός
Z	1	0	-1	0	0	1	24		$\Gamma'_1 = \Gamma_1 + 3\Gamma'_4$
S_1	0	0	1/3	1	0	-2/3	2	2/(1/3)=6	$\Gamma'_2 = \Gamma_2 - 2\Gamma'_4$
S_2	0	0	7/3	0	1	-2/3	26	26/(7/3)=78/7	$\Gamma'_3 = \Gamma_3 - 2\Gamma'_4$
x_1	0	1	1/3	0	0	1/3	8	8/(1/3)=24	$\Gamma'_4 = \frac{\Gamma_4}{3}$

pivot

- Εισερχόμενη μεταβλητή η x_2
- Εξερχόμενη η S_1

Άσκηση 1- Λύση

- 3^{ος} πίνακας Simplex. Βασικές μεταβλητές: x_2, S_2, x_1

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	$\Delta.M$	Λόγος	
Z	1	0	0	3	0	-1	30		$\Gamma'_1 = \Gamma_1 + \Gamma'_2$
x_2	0	0	1	3	0	-2	6	$6/(-2)=-3$	$\Gamma'_2 = 3\Gamma_2$
S_2	0	0	0	-7	1	4	12	12/4=3	$\Gamma'_3 = \Gamma_3 - 7/3\Gamma'_2$
x_1	0	1	0	-1	0	1	6	$6/1=6$	$\Gamma'_4 = \Gamma_4 - 1/3\Gamma'_2$

- Εισερχόμενη μεταβλητή η S_3
- Εξερχόμενη η S_2

pivot

Άσκηση 1- Λύση

- 4^{ος} πίνακας Simplex. Βασικές μεταβλητές: x_2, S_3, x_1

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	$\Delta.M$	
Z	1	0	0	5/4	1/4	0	33	$\Gamma'_1 = \Gamma_1 + \Gamma'_3$
x_2	0	0	1	-1/2	1/2	0	12	$\Gamma'_2 = \Gamma_2 + 2\Gamma'_3$
S_3	0	0	0	-7/4	1/4	1	3	$\Gamma'_3 = \Gamma_3/4$
x_1	0	1	0	3/4	-1/4	0	3	$\Gamma'_4 = \Gamma_4 - \Gamma'_3$

- Αφού όλες οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης μεγιστοποίησης είναι θετικές, έχουμε βρει τη βέλτιστη λύση
- $\mathbf{x}^* = (x_1, x_2, S_1, S_2, S_3) = (3, 12, 0, 0, 3)$
- $\mathbf{Z}_{max} = 33$
- Οι συντελεστές των μη βασικών μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης στον τελικό πίνακα Simplex, αποτελούν τις σκιάδεις τιμές
- Ο σημαντικότερος περιορισμός είναι ο 1^{ος} (S_1), αφού έχει τη μεγαλύτερη σκιάδη τιμή.

Άσκηση 2

- Επιλύστε το πρόβλημα βελτιστοποίησης που ακολουθεί με χρήση της μεθόδου Simplex και με χρήση Δυϊκού προβλήματος.

$$\begin{aligned}\max Z &= x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t } 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

Άσκηση 2- Λύση Simplex

- Με την προσθήκη των χαλαρών μεταβλητών το πρόβλημα διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 0S_1 + 0S_2 \\ \text{s.t } 2x_1 + 2x_2 + x_3 + S_1 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + S_2 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Άσκηση 2- Λύση Simplex

- 1^{ος} πίνακας Simplex. Βασικές μεταβλητές: S_1, S_2

	z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	Δ.Μ	Λόγος
z	1	-1	-4	-3	0	0	0	
S_1	0	2	2	1	1	0	4	4/2=2
S_2	0	1	2	2	0	1	6	6/2=3

pivot

- Εισερχόμενη η x_2
- Εξερχόμενη η S_1

Άσκηση 2- Λύση Simplex

- 2^{ος} πίνακας Simplex. Βασικές μεταβλητές: x_2, S_2

	z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	Δ.Μ	Λόγος	Νέα γραμμή οδηγός
z	1	3	0	-1	2	0	8		$\Gamma'_1 = \Gamma_1 + 4\Gamma'_2$
x_2	0	1	1	1/2	1/2	0	2	2/1/2=4	$\Gamma'_2 = \frac{\Gamma_2}{2}$
S_2	0	-1	0	1	-1	1	2	2/1=2	$\Gamma'_3 = \Gamma_3 - 2\Gamma'_2$

pivot

- Εισερχόμενη η x_3
- Εξερχόμενη η S_2

Άσκηση 2- Λύση Simplex

- 3^{ος} πίνακας Simplex. Βασικές μεταβλητές: x_2, x_3

	z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	$\Delta.M$
z	1	2	0	0	1	1	10
x_2	0	3/2	1	0	1	-1/2	1
x_3	0	-1	0	1	-1	1	2

Νέα γραμμή οδηγός

$$\Gamma'_1 = \Gamma_1 + \Gamma'_3$$

$$\Gamma'_2 = \Gamma_2 - \frac{1}{2}\Gamma'_3$$

$$\Gamma'_3 = \frac{\Gamma_3}{1}$$

- $x^* = (x_1, x_2, x_3, S_1, S_2) = (0, 1, 2, 0, 0)$
- $Z_{max} = 10$

Άσκηση 2- Λύση Δυσικό Πρόβλημα

$$\begin{aligned}\max Z &= x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t } 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\min w &= 4y_1 + 6y_2 \\ \text{s.t } 2y_1 + y_2 &\geq 1 \\ 2y_1 + 2y_2 &\geq 4 \\ y_1 + 2y_2 &\geq 3 \\ y_1, y_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Άσκηση 2- Λύση Δυϊκό Πρόβλημα

- Οι βέλτιστες τιμές του δυϊκού είναι οι συντελεστές των σκιωδών τιμών στον τελικό πίνακα Simplex του πρωτεύοντος προβλήματος

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	$\Delta.M$
Z	1	2	0	0	1	1	10
x_2	0	3/2	1	0	1	-1/2	1
x_3	0	-1	0	1	-1	1	2

Έχουμε: $\min w = 4y_1 + 6y_2$

Επομένως η βέλτιστη λύση είναι η:

- $\mathbf{y}^* = (y_1, y_2) = (1, 1)$
- $\mathbf{w}_{min} = 10$