

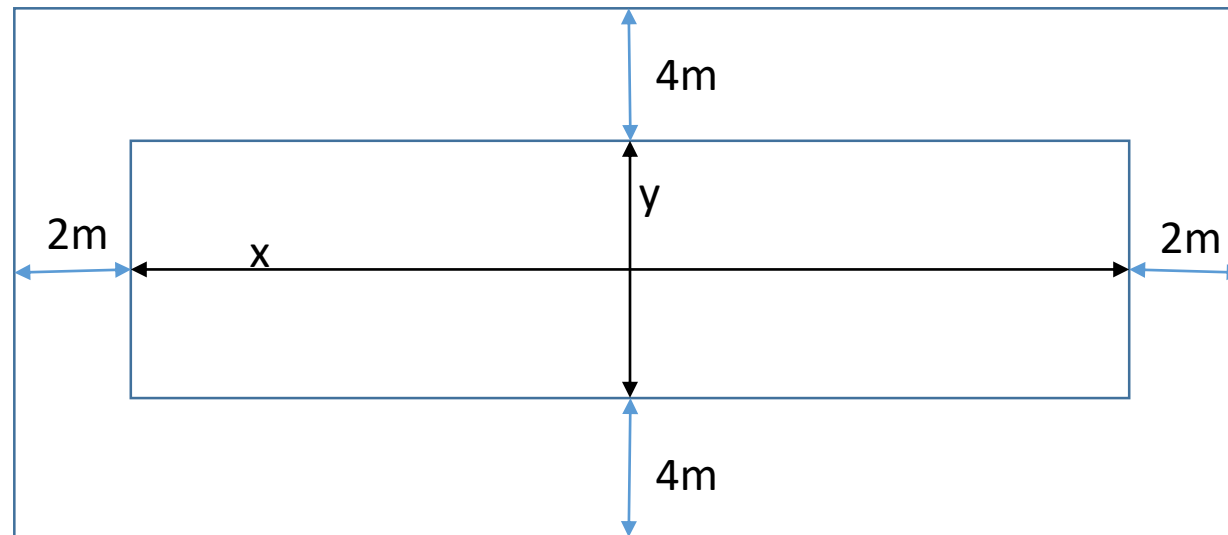


Βελτιστοποίηση Περιβαλλοντικών Συστημάτων

Πολυτεχνείο Κρήτης
Σχολή Μηχανικών Περιβάλλοντος
2^η σειρά φροντιστηριακών ασκήσεων

Άσκηση 1

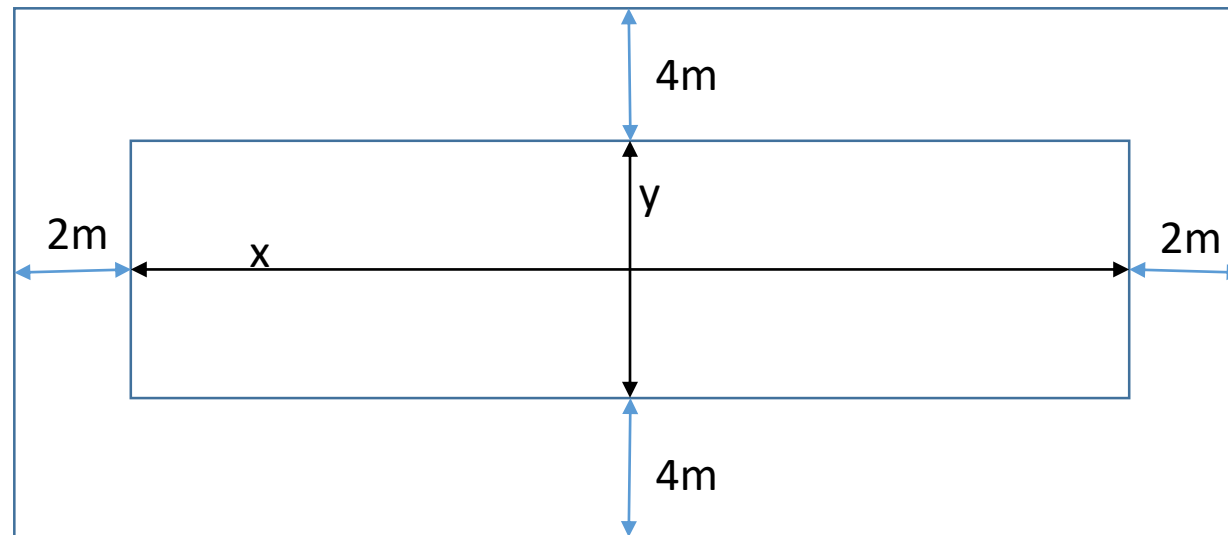
- Μια βιοτεχνία θέλει να χτίσει ένα ορθογώνιο κτήριο επιφάνειας 3200 m^2 . Να βρεθούν οι μικρότερες διαστάσεις του ορθογωνίου οικοπέδου που μπορεί να χωρέσει το κτήριο, εάν οι κανονισμοί επιβάλλουν χώρους 4m μπροστά και πίσω από το κτήριο και 2m δεξιά και αριστερά. Να λυθεί το πρόβλημα με τη μέθοδο Lagrange.



Άσκηση 1

- Οι διαστάσεις του κτηρίου είναι $xy=3200$
- Οι διαστάσεις του οικοπέδου είναι $(8+y)(4+x)$
- Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση των διαστάσεων του οικοπέδου, δηλαδή:

$$\begin{aligned} \text{➤ } \min f(x,y) &= (8+y)(4+x) \\ \text{s.t } xy &= 3200 \Rightarrow 3200 - xy = 0 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$



Άσκηση 1 -Λύση

1^ο βήμα

Θεωρούμε τη συνάρτηση Lagrange

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$L(x,y,\lambda) = (8+y)(4+x) + \lambda(3200 - xy)$$

$$L(x,y,\lambda) = xy + 8x + 4y + 32 + 3200\lambda - \lambda xy$$

2^ο βήμα

Επιλύουμε το σύστημα:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\Leftrightarrow y + 8 - \lambda y = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 4 - \lambda x = 0 \\ &\Leftrightarrow xy - 3200 = 0 \end{aligned}$$

Άσκηση 1 -Λύση

$y+8-\lambda y=0$	$\Leftrightarrow y(1-\lambda)=-8$	$\Leftrightarrow y=-8/(1-\lambda)$
$x+4-\lambda x=0$	$\Leftrightarrow x(1-\lambda)=-4$	$\Leftrightarrow x=-4/(1-\lambda)$
$xy-3200=0$	$\Leftrightarrow xy=3200$	$\Leftrightarrow xy=3200$

- Το σύστημα μας οδηγεί στις λύσεις $x=40$ m, $y=80$ m και $\lambda=1,1$

Άσκηση 1 -Λύση

- Δηλαδή η συνάρτηση $f(x,y)$ παρουσιάζει τοπικό και ολικό ελάχιστο στο σημείο $(x^*, y^*)=40, 80$
- Άρα το μικρότερο ορθογώνιο οικόπεδο θα έχει διαστάσεις $88 \times 44 \text{ m}^2$
- Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι ίση με:

$$f(x^*, y^*)=3872$$

Άσκηση 2

- Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα μεγιστοποίησης με συνθήκες Kuhn-Tucker

$$\max (2x_1 - x_2)$$

$$\text{s.t } x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Λύση

Στόχος είναι η μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης $f(\vec{x}) = 2x_1 - x_2$, όπου:

$\vec{x} = (x_1, x_2)$, υπό τους περιορισμούς :

$$g_1(\vec{x}) = x_1 + x_2 - 4$$

$$g_2(\vec{x}) = x_1$$

$$g_3(\vec{x}) = x_2$$

Άσκηση 2-Λύση

1^ο βήμα

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους 1^{ης} τάξης των παραπάνω συναρτήσεων:

$$\bullet \quad f'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad g_2'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad g_1'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad g_3'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2-Λύση

2^ο βήμα

Ορίζουμε τις συνθήκες Kuhn – Tucker ως εξής:

- 1) $\frac{\partial f}{\partial x_1} - \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial g_j}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow 2 - u_1 - u_2 = 0$
- 2) $\frac{\partial f}{\partial x_2} - \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial g_j}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow -1 - u_1 - u_3 = 0$
- 3) $g_1(x) \leq 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 4 \leq 0$
- 4) $g_2(x) \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \geq 0$
- 5) $g_3(x) \geq 0 \Leftrightarrow x_2 \geq 0$
- 6) $u_1 g_1(x) = 0 \Leftrightarrow u_1 (x_1 + x_2 - 4) = 0$
- 7) $u_2 g_2(x) = 0 \Leftrightarrow u_2 x_1 = 0$

- 8) $u_3 g_3(x) = 0 \Leftrightarrow u_3 x_2 = 0$
- 9) $u_1 \geq 0$ (γιατί $g_1 \leq 0$)
- 10) $u_2 \leq 0$ (γιατί $g_2 \geq 0$)
- 11) $u_3 \leq 0$ (γιατί $g_3 \geq 0$)

Άσκηση 2-Λύση

3^ο βήμα

Για να προσδιορίσουμε το $x=(x_1, x_2)$ που μεγιστοποιεί την $f(x)$ διερευνούμε τις παραπάνω συνθήκες ως εξής:

- Έστω $u_2=u_3=0$, τότε:

$$1) \quad 2 - u_1 - u_2 = 0 \underset{u_2=0}{\iff} 2 - u_1 = 0 \iff u_1 = 2$$

$$2) \quad -1 - u_1 - u_3 = 0 \underset{u_3=0}{\iff} -1 - u_1 = 0 \iff u_1 = -1$$

Άτοπο

Έστω $u_1 = u_2 = 0$, τότε από (1) $2=0 \Rightarrow$ Άτοπο

- Έστω $u_1=u_3=0$, τότε:

$$1) \quad 2 - u_1 - u_2 = 0 \underset{u_1=0}{\iff} 2 - u_2 = 0 \iff u_2 = 2$$

$$2) \quad -1 - u_1 - u_3 = 0 \underset{u_3=0}{\iff} -1 - u_1 = 0 \iff u_1 = -1$$

Άτοπο λόγω της συνθήκης 10

Άτοπο λόγω της συνθήκης 9

Άσκηση 2-Λύση

3^ο βήμα

- Έστω $u_2=x_2=0$, τότε:

$$1) \quad 2 - u_1 - u_2 = 0 \underset{u_2=0}{\iff} 2 - u_1 = 0 \iff u_1 = 2$$

$$2) \quad -1 - u_1 - u_3 = 0 \underset{u_1=2}{\iff} -1 - 2 - u_3 = 0 \iff u_3 = -3$$

$$6) \quad u_1(x_1 + x_2 - 4) = 0 \underset{u_1=2, x_2=0}{\iff} 2(x_1 - 4) = 0 \iff x_1 = 4$$

- Κάνοντας έλεγχο σε όλες τις συνθήκες, αντικαθιστώντας τις τιμές που βρήκαμε, παρατηρούμε ότι ισχύουν. Επομένως, ένα τοπικό μέγιστο της συνάρτησης $f(x)$ παρουσιάζεται στο σημείο $(x_1, x_2)=(4,0)$.
- $f_{\max}=8$

Άσκηση 3

- Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα ελαχιστοποίησης με συνθήκες Kuhn-Tucker

$$\min f(x_1, x_2) = (2x_1^2 + 4000x_2)$$

$$\text{s.t } h(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 5000$$

$$g_1(x_1, x_2) = x_1$$

$$g_2(x_1, x_2) = x_2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Λύση

Ομοίως με την προηγούμενη άσκηση υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους 1^{ης} τάξης

Άσκηση 3-Λύση

1^ο βήμα

$$\bullet \quad f'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 \\ 4000 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad g_2'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad g_1'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad h'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3-Λύση

2^ο βήμα: Ορίζουμε τις συνθήκες Kuhn – Tucker

$$1) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{j=1}^2 u_j \frac{\partial g_j}{\partial x_1} + \sum_{j=1}^1 v_j \frac{\partial h_j}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow 4x_1 + u_1 + v_1 = 0$$

$$2) \frac{\partial f}{\partial x_2} + \sum_{j=1}^2 u_j \frac{\partial g_j}{\partial x_2} + \sum_{j=1}^1 v_j \frac{\partial h_j}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow 4000 + u_2 + v_1 = 0$$

$$3) g_1(x) \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \geq 0$$

$$4) g_2(x) \geq 0 \Leftrightarrow x_2 \geq 0$$

$$5) h_1(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 5000 = 0$$

$$6) u_1 g_1(x) = 0 \Leftrightarrow u_1 x_1 = 0$$

$$7) u_2 g_2(x) = 0 \Leftrightarrow u_2 x_2 = 0$$

$$8) v_1 h_1(x) = 0 \Leftrightarrow v_1 (x_1 + x_2 - 5000) = 0$$

$$9) u_1 \leq 0$$

$$10) u_2 \leq 0$$

Άσκηση 3-Λύση

3^ο βήμα

- Έστω $u_1=u_2=0$, τότε:

$$2) \quad 4000 + u_2 + v_1 = 0 \underset{u_2=0}{\iff} v_1 = -4000$$

$$1) \quad 4x_1 + u_1 + v_1 = 0 \underset{v_1=-4000}{\iff} x_1 = 1000$$

$$5) \quad x_1 + x_2 - 5000 = 0 \underset{x_1=1000}{\iff} x_2 = 4000$$

- Κάνοντας έλεγχο σε όλες τις συνθήκες, αντικαθιστώντας τις τιμές που βρήκαμε, παρατηρούμε ότι ισχύουν. Επομένως, ένα τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης $f(x)$ παρουσιάζεται στο σημείο $(x_1, x_2)=(1000,4000)$.
- $f_{\min}=18.000.000$