



# Βελτιστοποίηση Περιβαλλοντικών Συστημάτων

Πολυτεχνείο Κρήτης  
Σχολή Μηχανικών Περιβάλλοντος  
Επαναληπτικές Ασκήσεις

- Θεωρήστε το εξής πρόβλημα χωρίς περιορισμούς:

$$\max \quad 4x_1^3 + 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_1 - 7x_2 - 3x_1x_2 + 4$$

1. Υπολογίστε την κατεύθυνση με τη μέθοδο της Μέγιστης καθόδου στο σημείο  $x_1=1, x_2=1$
2. Δώστε τον πίνακα του Hess
3. Υπολογίστε την κατεύθυνση  $d_k$  για τη Μέθοδο του Newton για  $x_1=1, x_2=1$   
Σχολιάστε τα αποτελέσματα σε σχέση με το ερώτημα (1)

## Άσκηση 1

$$\max \quad 4x_1^3 + 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_1 - 7x_2 - 3x_1x_2 + 4$$

1. Υπολογισμός κατεύθ. με μέθοδο τετραγωνιστικής κατεύθ.,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1$

2. Δώστε τον πίνακα του Hess

3. Υπολογισμός κατεύθ. με μέθοδο Newton στο  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1$

+ Σχολιασμός αποτελ. σε σχέση με το ερωτ. 1.

① Steepest Descent - Μέγιστη Καθόδος

$$x_1 = 1, x_2 = 1, \quad x_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f(x) = 4x_1^3 + 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_1 - 7x_2 - 3x_1x_2 + 4$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 12x_1^2 + 4x_1 + 1 - 3x_2 \\ 6x_2 - 7 - 3x_1 \end{bmatrix}_{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 12 + 4 + 1 - 3 \\ 6 - 7 - 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 14 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$d_k = \begin{bmatrix} 14 \\ -4 \end{bmatrix}$$

②. Hivakas Hess

$$H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} (12x_1^2 + 4x_1 + 1 - 3x_2) & \frac{\partial}{\partial x_1} (6x_2 - 7 - 3x_1) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} (12x_1^2 + 4x_1 + 1 - 3x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2} (6x_2 - 7 - 3x_1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 24x_1 + 4 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

③ Μέθοδος Newton

α<sub>k</sub> στο (1, 1)

$$Hf = \begin{bmatrix} 24x_1 + 4 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$x_{k+1} = x_k - [H(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k)$$

$$H^{-1} = \frac{1}{|H|} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & -\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ -\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{144x_1 + 15} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 24x_1 + 4 \end{bmatrix}^*$$

$$|H| = 6(24x_1 + 4) - (-3)(-3) = 144x_1 + 15$$

$$* [H(x_k)]^{-1} = \frac{1}{159} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{53} & \frac{1}{53} \\ \frac{1}{53} & \frac{28}{159} \end{bmatrix}, \quad \nabla f(x_k) = \begin{bmatrix} 14 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$d_k = [H(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{53} & \frac{1}{53} \\ \frac{1}{53} & \frac{28}{159} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{53} \cdot 14 - \frac{4}{53} \\ \frac{14}{53} - 4 \frac{28}{159} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,45 \\ -0,44 \end{bmatrix}$$

$$d_k = \begin{bmatrix} 14 \\ -4 \end{bmatrix}$$

- Μια λίμνη όγκου  $100.000 \text{ m}^3$  περιβάλλεται από αγροτική έκταση  $1000 \text{ ha}$ . Ένα ποσοστό από τα ζιζανιοκτόνα που χρησιμοποιούνται για τις αγροτικές καλλιέργειες καταφθάνει στη λίμνη και έχει επιβλαβή αποτελέσματα στα γεράκια που τρέφονται από τα ψάρια της λίμνης. Το Υπουργείο Περιβάλλοντος έχει βάλει σκοπό να καθορίσει τη βέλτιστη αγροτική έκταση που μπορεί να καλλιεργηθεί έτσι ώστε να μην επηρεαστεί ο πληθυσμός των γερακιών της περιοχής.
- Από μελέτες που έγιναν στην περιοχή έχει διαπιστωθεί ότι η συγκέντρωση των ζιζανιοκτόνων αυξάνει γεωμετρικά με τα διάφορα στάδια της αλυσίδας διατροφής. Εάν δηλαδή η συγκέντρωση των ζιζανιοκτόνων στη λίμνη είναι  $C$ , σε μέρη στο εκατομμύριο (ppm), τότε στο φυτοπλαγκτόν είναι  $C^2$ , στα ψάρια που τρέφονται από το φυτοπλαγκτόν είναι  $C^3$  και η συγκέντρωση που συναντάται στους ιστούς του σώματος των γερακιών που τρέφονται από τα ψάρια θα είναι  $C^4$ .
- Τα γεράκια μπορούν να ανεχθούν στο σώμα τους συγκέντρωση ζιζανιοκτόνου μέχρι  $100 \text{ ppm}$ . Τα  $1000 \text{ ha}$  της αγροτικής έκτασης καλύπτονται από δύο διαφορετικές καλλιέργειες με διαφορετικά χαρακτηριστικά όσον αφορά τα ζιζανιοκτόνα που εφαρμόζονται, το ποσοστό αυτών που διαρρέει στη λίμνη καθώς και τα έσοδα και τα έξοδα κάθε καλλιέργειας. Τα χαρακτηριστικά δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

| Καλλιέργεια | Εφαρμογή<br>Ζιζανιοκτόνου<br>(kg/ha) | Ποσοστό Ζιζ.<br>που φτάνει στη<br>λίμνη (%) | Έσοδα<br>Καλλιέργειας<br>(Euro/ha) | Έξοδα<br>Καλλιέργειας<br>(Euro) |
|-------------|--------------------------------------|---------------------------------------------|------------------------------------|---------------------------------|
| 1           | 6                                    | 15                                          | 300                                | $1500\sqrt{\text{εμβαδόν}}$     |
| 2           | 2.5                                  | 20                                          | 150                                | $600\sqrt{\text{εμβαδόν}}$      |

- Ο χρόνος ανακύκλωσης του νερού στη λίμνη είναι 6 μήνες δηλαδή 200.000  $m^3$  περνούν από τη λίμνη κάθε χρόνο.
- 1 ppm=1mg/lit = 1mg/kg

1. Διατυπώστε τη μαθηματική έκφραση του προβλήματος βελτιστοποίησης έτσι ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος από τις αγροτικές καλλιέργειες και να εξασφαλίζεται η σταθερή διαβίωση των γερακιών.

## Δεσμεύ 2

Λίτην ογκού  $100.000 \text{ m}^3$

Περβ. ογκός εκτάκη  $1000 \text{ ha} \rightarrow 2 \text{ εδών καλλιέργειας}$

2, λειτουργούν: ποσοστό που κατατίθεται στη λίτην  $\rightarrow$  Γεράκια

Βέλτιστη ογκός εκτάκη για καλλιέργ. ώστε να μην επηρεάζονται τα γεράκια και να μεγιστοποιείται το κέρδος

|             | Λίτην | Φυλάκιση       | Ψάρι           | Γεράκια        |
|-------------|-------|----------------|----------------|----------------|
| Συγκέντρωση | C     | C <sup>2</sup> | C <sup>3</sup> | C <sup>4</sup> |

Γεράκια: έως  $100 \text{ ppm}$

|                   | Καλλιέργεια | Εφαρμογή λίγων (kg/ha) | Ποσοστό στη λίτην (%) | Εξόδα col (€/ha) | Εξόδα (€)                    |
|-------------------|-------------|------------------------|-----------------------|------------------|------------------------------|
| $x_1 \rightarrow$ | 1           | 6                      | 15                    | 300              | $1500 \sqrt{\text{ΕΙΛΕΘΕΣ}}$ |
| $x_2 \rightarrow$ | 2           | 2,5                    | 20                    | 150              | $600 \sqrt{\text{ΕΙΛΕΘΕΣ}}$  |

Χρόνος αναχώρησης νερού στη λίτην: 6 μήνες  $\rightarrow 200.000 \frac{\text{m}^3}{\text{year}}$

$$\max \quad 300x_1 + 150x_2 - 1500\sqrt{x_1} - 600\sqrt{x_2}$$

$$\text{s.t.} : \quad \textcircled{1} \quad x_1 + x_2 \leq 1000$$

$$0,15 \cdot 6 \frac{\text{kg}}{\text{kg}} \cdot x_1 (\cancel{\text{kg}}) + 0,2 \cdot 2,5 \frac{\text{kg}}{\text{kg}} \cdot x_2 (\cancel{\text{kg}}) =$$

$$= (0,9x_1 + 0,5x_2) \text{ kg}$$

$$\frac{0,9x_1 + 0,5x_2 \text{ kg}}{200.000 \text{ m}^3} = \frac{0,9x_1 + 0,5x_2}{200} \text{ ppm}$$

Συγκέντρωση  
στο ύψος

$$\text{Συγκέντρωση στο σημείο} \quad \textcircled{2} \quad \left( \frac{0,9x_1 + 0,5x_2}{200} \right)^4 \leq 100 \text{ ppm}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Δίδεται το πρόγραμμα μη γραμμικού προγραμματισμού:

$$\text{Minimize } f(x) = \frac{x_1}{x_2 + 1}$$

$$\text{s.t} \quad \begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

1. Δώστε μόνο τις συνθήκες Kuhn and Tucker. Δεν απαιτείται η επίλυση του προβλήματος.

### - Άσκηση 3

Δίνεται το πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού

$$\min f(x) = \frac{x_1}{x_2 + 1}$$

$$\text{s.t. } x_1 - x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Δώστε ως συνθήκες Kuhn and Tucker.

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_2 + 1} \\ \frac{-x_1}{(x_2 + 1)^2} \end{bmatrix} \quad \left| \quad g'_2(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right.$$

$$g'_1(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \left| \quad g'_3(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right.$$

Lagrange

$$\textcircled{1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + u_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_1} + u_3 \frac{\partial g_3}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_2 + 1} + u_1 + u_2 = 0$$

$$\textcircled{2} \frac{\partial f}{\partial x_2} + u_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + u_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial g_3}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{x_1}{(x_2 + 1)^2} - u_1 + u_3 = 0$$

$$\textcircled{3} g_1(x) \geq 0 \Rightarrow x_1 - x_2 - 2 \geq 0$$

$$\textcircled{4} g_2(x) \geq 0 \Rightarrow x_1 \geq 0$$

$$\textcircled{5} g_3(x) \geq 0 \Rightarrow x_2 \geq 0$$

$$\textcircled{6} u_1 g_1(x) = 0 \rightarrow$$

$$u_1(x_1 - x_2 - 2) = 0$$

$$\textcircled{7} u_2 g_2(x) = 0 \Rightarrow$$

$$u_2 x_1 = 0$$

$$\textcircled{8} u_3 g_3(x) = 0 \rightarrow$$

$$u_3 x_2 = 0$$

$$\textcircled{9} \textcircled{10} \textcircled{11} : u_1, u_2, u_3 \leq 0$$

Επιλύστε το πρόβλημα βελτιστοποίησης που ακολουθεί με χρήση της μεθόδου Simplex. Καθορίστε τις σκιώδεις τιμές και σχολιάστε τη σπουδαιότητα τους

$$\max Z = x_1 - 7x_2 + 3x_3$$

$$\text{s.t } 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4$$

$$4x_1 - 3x_2 \leq 2$$

$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Aufgaben 4

$$\max z = x_1 - 7x_2 + 3x_3$$

$$\text{s.t.} : 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4$$

$$4x_1 - 3x_2 \leq 2$$

$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Gibson ke  
Simplex

---

$$\max z = x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

$$\text{s.t.} : 2x_1 + x_2 - x_3 + s_1 = 4$$

$$4x_1 - 3x_2 + s_2 = 2$$

$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 + s_3 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

1<sup>os</sup> pivotos

|       | 2 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $\Delta M.$ | Notas                      |
|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------|----------------------------|
| 2     | 1 | -1    | 7     | -3    | 0     | 0     | 0     | 0           |                            |
| $s_1$ | 0 | 2     | 1     | -1    | 1     | 0     | 0     | 4           | $\frac{4}{-1} = -4$        |
| $s_2$ | 0 | 4     | -3    | 0     | 0     | 1     | 0     | 2           | $\frac{2}{0} = \text{---}$ |
| $s_3$ | 0 | -3    | 2     | 1     | 0     | 0     | 1     | 3           | $\frac{3}{1} = 3$          |

2<sup>os</sup> pivotos

|       | 2 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $\Delta M.$ |                                    |                                     |
|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| 2     | 1 | -10   | 13    | 0     | 0     | 0     | 3     | 8           | $\frac{8}{3} = \frac{\gamma_4}{1}$ |                                     |
| $s_1$ | 0 | -1    | 3     | 0     | 1     | 0     | 1     | 7           | $\frac{7}{-1} = -7$                | $\gamma'_1 = \gamma_1 + 3\gamma'_4$ |
| $s_2$ | 0 | 4     | -3    | 0     | 0     | 1     | 0     | 2           | $\frac{2}{4} = 0,5$                | $\gamma'_2 = \gamma_2 + \gamma'_4$  |
| $x_3$ | 0 | -3    | 2     | 1     | 0     | 0     | 0     | 3           | $\frac{3}{-3} = -1$                | $\gamma'_3 = \gamma_3 - 0\gamma'_4$ |

$z^{\text{os}} = \text{given}$

lin basics

|       | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $\Delta M$ |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------------|
| 2     | 1   | 0     | 5,5   | 0     | 0     | 2,5   | 3     | 14         |
| $s_1$ | 0   | 0     | 2,25  | 0     | 1     | 0,25  | 1     | 7,5        |
| $x_1$ | 0   | 1     | -0,75 | 0     | 0     | 0,25  | 0     | 0,5        |
| $x_3$ | 0   | 0     | -0,25 | 1     | 0     | 0     | 1     | 4,5        |

$$\bar{r}_3'' = \frac{\bar{r}_3'}{4}, \quad \bar{r}_1'' = \bar{r}_1' + 10 \bar{r}_3''$$

$$\bar{r}_2'' = \bar{r}_2' + \bar{r}_3''$$

$$\bar{r}_4'' = \bar{r}_4' + 3 \bar{r}_3''$$

$$x^* = (x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3) = (0,5, 0, 4,5, 7,5, 0, 0)$$

$$z_{\max} = 14$$