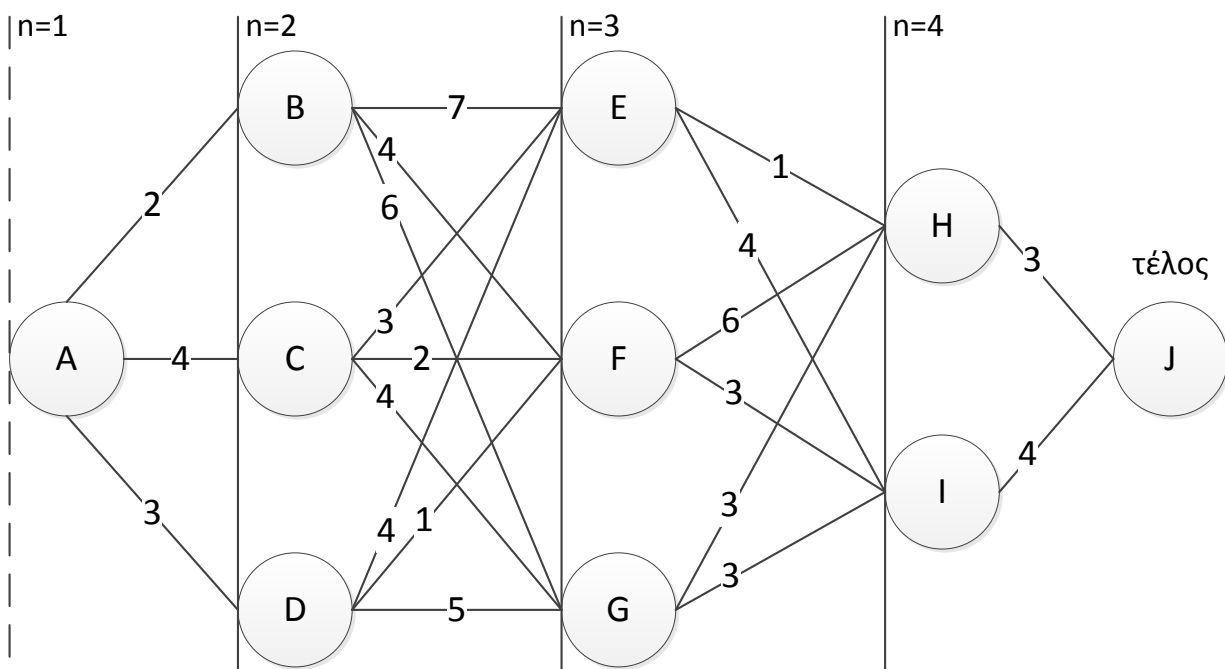


Δυναμικός Προγραμματισμός



Σκοπός είναι από το A να βρεθεί η βέλτιστη διαδρομή προς το J $(A \rightarrow J)$

Η πιο σύντομη διαδρομή από κάθε επίπεδο (n) στο επόμενο είναι η: $A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{4} F \xrightarrow{3} I \xrightarrow{4} J$ (13)

Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για τη συγκεκριμένη διαδρομή ισούται με 13.

Όμως εάν επιλεγόταν για διαδρομή η: $A \xrightarrow{3} D \xrightarrow{1} F \xrightarrow{3} I \xrightarrow{4} J$ ⑪

Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα ήταν μικρότερη και ίση με 11.

Ορίζω στάδια $n = 1, 2, 3, 4$

	f	x ₄ *		H	I	f	x ₃ *		E	F	G	f	x ₂ *
H	3	J		E	1+3 4	8	4 H		B	7+4 11	4+7 11	6+6 12	11 E ḡ F
I	4	J	→	F	9	7	7 I →	C	3+4 7	2+7 9	4+6 10	7 E	→
				G	6	7	6 H	D	4+4 8	1+7 8	5+6 11	8 E ḡ F	

								B	C	D	f	x ₁ *
→	A	13	11	11	11	C ḡ D						

Άρα οι βέλτιστες διαδρομές είναι:

1^η διαδρομή

$$A \xrightarrow{4} C \xrightarrow{3} E \xrightarrow{1} H \xrightarrow{3} J \quad (11)$$

2^η διαδρομή

$$A \xrightarrow{3} D \xrightarrow{4} E \xrightarrow{1} H \xrightarrow{3} J \quad (11)$$

3^η διαδρομή

$$A \xrightarrow{3} D \xrightarrow{1} F \xrightarrow{3} I \xrightarrow{4} J \quad (11)$$

Και για τις 3 διαδρομές η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι η ίδια και ισούται με 11.

Δυναμικός Προγραμματισμός

Ο Δ.Π. αναπτύχθηκε από τον Bellman το 1952 για προβλήματα βελτιστοποίησης με διαδοχικές αποφάσεις. Συνοπτικά ο Δ.Π. χρησιμοποιείται για συστήματα των οποίων η περιοχή εφαρμογής (π.χ. χώρος-χρόνος) μπορεί να χωριστεί σε N υποπεριοχές εφαρμογής που καλούνται στάδια ή φάσεις (stages). Η κατάστρωση του προβλήματος γίνεται σε στάδια ή φάσεις για αυτό ο Δ.Π. είναι γνωστός σαν μεθοδολογία διαδοχικών καταμερισμών (sequential allocation process), ή σαν διαδικασία λήψης αποφάσεων πολλαπλών σταδίων (multi-stage decision making procedure).

Η κατανόηση της μεθοδολογίας του Δ.Π. είναι εύκολη, αλλά η κατάστρωση και η επίλυση ενός προβλήματος παρουσιάζουν συχνά δυσκολίες επειδή δεν είναι δυνατή η παρουσία τυποποιημένης μεθοδολογίας προσέγγισης του προβλήματος. Κάθε σύστημα έχει τα δικά του χαρακτηριστικά και επιδέχεται συχνά επίλυση προσαρμοσμένη σ' αυτό και μόνο.

1. Ορισμοί και Χαρακτηριστικά Στοιχεία Προβλημάτων Δυναμικού Προγραμματισμού

- Το πρόβλημα μπορεί να χωριστεί σε στάδια ή φάσεις. Σε κάθε φάση απαιτείται μία απόφαση (policy decision). Ορίζουμε σαν n τη φάση του προβλήματος.
- Σε κάθε στάδιο υπάρχει ένας αριθμός χαρακτηριστικών καταστάσεων ή θέσεων. Γενικά, οι χαρακτηριστικές θέσεις είναι οι διάφορες δυνατές συνθήκες στις οποίες μπορεί να βρεθεί το σύστημα κατά το συγκεκριμένο στάδιο. Ορίζουμε S μεταβλητή θέσης ή κατάστασης (state variables) σε κάποια φάση.
- Ορίζουμε x_n την απόφαση πολιτικής (policy decision) ή μεταβλητή απόφασης (decision variable) που θα ληφθεί στη φάση n .
- Το αποτέλεσμα της απόφασης x_n είναι η μεταφορά (transportation) από την τρέχουσα S της φάσης n σε μία νέα θέση S η οποία σχετίζεται με την επόμενη φάση $(n+1)$ ή την προηγούμενη $(n-1)$ του προβλήματος (ανάντη ή κατόντη). Ορίζουμε $s_n = f(s_{n+1}, x_n)$ η οποία συνδέει δύο διαδοχικές φάσεις του προβλήματος.

- ε) Με δεδομένη την τρέχουσα θέση n , η βέλτιστη πολιτική για τις επόμενες φάσεις είναι ανεξάρτητη των πολιτικών που υιοθετήθηκαν στην προηγούμενη φάση. Γενικά στο δυναμικό προγραμματισμό η γνώση της τρέχουσας θέσης S περιέχει όλες τις πληροφορίες για την προηγούμενη συμπεριφορά που είναι απαραίτητες για τον προσδιορισμό της βέλτιστης πολιτικής. Ορίζουμε $f_{n-1}(s, x_n)$ ή $f_{n+1}(s, x_n)$ το κόστος όλων των προηγούμενων ή επόμενων αντίστοιχα φάσεων του προβλήματος όταν αυτό βρίσκεται στη θέση s όπου θα ληφθεί η απόφαση x_n .

2. Αρχή του Bellman ή Αξίωμα Βελτιστοποίησης

Η επίλυση προβλήματος δυναμικού προγραμματισμού βασίζεται στην αρχή του Bellman σύμφωνα με την οποία:

«Για οποιαδήποτε αρχική σειρά αποφάσεων και καταστάσεων του συστήματος, οι υπολειπόμενες αποφάσεις πρέπει να αποτελούν μία βέλτιστη πολιτική για την κατάσταση του συστήματος που προέκυψε μετά την αρχική απόφαση»

$$f^*(s) = \min/\max(c_s \cdot x_n + f_{n+1}^*(x_n)) \text{ για ανάντη } \Delta.Π.$$

$$f^*(s) = \min/\max(c_s \cdot x_n + f_{n-1}^*(x_n)) \text{ για κατάντη } \Delta.Π.$$