

Πολυτεχνείο Κρήτης // Σχολή Μηχανικών Περιβάλλοντος
Αριθμητικές Μέθοδοι στην Περιβαλλοντική Μηχανική
Διδάσκων: Τρύφων Δάρας

Ασκήσεις επανάληψης -- Β πρόοδος 2020-2021

Προσοχή: στα παρακάτω θέματα όπου εμφανίζονται τα γράμματα α , β σημαίνουν:
 α = το προτελευταίο και β = το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σου
Εάν κάποιο από αυτά είναι 0, χρησιμοποιείτε αντί γι αυτό τον αριθμό 5

1. (α) Δίνεται ο παρακάτω πίνακας (δεδομένα):

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
2	1.5		
4	3. α		_____
6	5. β	_____	
8	9. α		

(I) Να συμπληρωθούν τα κενά του πίνακα με τη βοήθεια προς τα εμπρός, προς τα πίσω ή κεντρικών διαφορών (όποιες θεωρείτε κατάλληλες κάθε φορά).

(II) Να δοθεί προσεγγιστική τιμή της $f'(5)$ και της $f''(7)$ με τη βοήθεια του:

(i) πολωνύμου παρεμβολής Lagrange.

(ii) πολωνύμου παρεμβολής Newton.

μόνον στα σημεία (4, 3. α), (6, 5. β) και (8, 9. α). Τι παρατηρείτε; Εξηγείστε.

(β) Υπολογίστε τα βάρη παραγωγίσης w_1, w_2 του κανόνα παραγωγίσης:

$$f'(x) = w_1 \cdot f(x-3h) + w_2 \cdot f(x+4h),$$

ώστε να ισχύει ακριβώς για πολώνυμα όσο το δυνατόν μεγαλύτερου βαθμού.

2. Δίνεται το ολοκλήρωμα: $\int_0^{\alpha} e^{-\beta x+2} dx$

(α) Να προσεγγιστεί η τιμή του ολοκληρώματος κάνοντας χρήση της μεθόδου:

(I) τραπεζίου χρησιμοποιώντας $n = 4$ υποδιαστήματα.

(II) 1/3 Simpson χρησιμοποιώντας 5 ισαπέχοντα σημεία.

(III) απλού κανόνα 3/8 Simpson

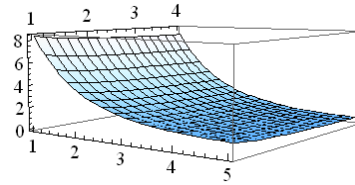
(IV) τύπου ολοκλήρωσης Gauss 2 σημείων.

(β) Πόσα σημεία (κόμβους) χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα προσεγγιστικά με το σύνθετο κανόνα τραπεζίου, με σφάλμα μικρότερο του $10^{-\alpha}$.

(γ) Να υπολογιστεί το (απόλυτο) σχετικό σφάλμα στην περίπτωση του (α) (II)

3. Δίνεται το διπλό ολοκλήρωμα:

$$\int_1^5 \int_1^4 \left(e^{-\alpha x+3} + \frac{1}{y^\beta} \right) dy dx$$



(όγκος του στερεού που περικλείεται (κάτω) από την επιφάνεια $f(x) = e^{-\alpha x+3} + \frac{1}{y^\beta}$ και (πάνω από) το ορθογώνιο χωρίο $D = [1, 5] \times [1, 4]$).

- (α) Να υπολογιστεί η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος.
- (β) Να δοθεί μια προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος με τη βοήθεια του τύπου του τραπεζίου και $n = m = 2$ (βήματα ολοκλήρωσης).
- (γ) Να υπολογιστεί το (απόλυτο) σχετικό σφάλμα.

4. Δίνεται το Π.Α.Τ.:
$$\begin{cases} y' = \alpha y - \beta \\ y(0) = \beta \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 0.6$$

- (α) Να εξεταστεί εάν έχει μοναδική λύση. Είναι το Π.Α.Τ καλά ορισμένο;. Εξηγήστε.
- (β) Να βρεθεί η προσεγγιστική λύση του Π.Α.Τ:
 - (I) με την μέθοδο του Euler και $h=0.2$
 - (II) με την μέθοδο του Taylor 2^{ης} τάξης και $h=0.2$.
- (γ) Εάν η γενική λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι ίση με $y(x) = ce^{-\alpha x} - \beta$, να βρεθεί η (πραγματική) λύση του Π.Α.Τ.
- (δ) Να βρεθεί το ολικό σφάλμα στο σημείο $x_3 = 0.3$ στα (β) (I) και (II) .
- (ε) Να βρεθεί το τοπικό σφάλμα στο σημείο $x_2 = 0.2$ όταν χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Euler και $h=0.2$