

Θέματα

Προσοχή: στα παρακάτω θέματα όπου εμφανίζονται τα γράμματα α , β σημαίνουν:
 α = το προτελευταίο και β = το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σου
Εάν κάποιο από αυτά είναι 0, χρησιμοποιείτε αντί γι αυτό τον αριθμό 7

1. (2,5 μονάδες) (α) Δίνεται ο παρακάτω πίνακας (δεδομένα):

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
1	1.1		
3	α	_____	
5	4.3		_____
7	8.2		

(I) Να συμπληρωθούν τα κενά του πίνακα με τη βοήθεια προς τα εμπρός, προς τα πίσω ή κεντρικών διαφορών (όποιες θεωρείτε κατάλληλες κάθε φορά).

(II) Να δοθεί προσεγγιστική τιμή της $f'(4)$ και της $f''(6)$ με τη βοήθεια του:

(i) πολωνύμου παρεμβολής Lagrange.

(ii) πολωνύμου παρεμβολής Newton.

μόνον στα σημεία $(1, 1.1)$, $(3, \alpha)$ και $(5, 4.3)$. Τι παρατηρείτε; Εξηγήστε.

(β) Υπολογίστε τα βάρη παραγωγίσης w_1, w_2 του κανόνα παραγωγίσης:

$$f'(x) = w_1 \cdot f(x-2h) + w_2 \cdot f(x+2h),$$

ώστε να ισχύει ακριβώς για πολυώνυμα όσο το δυνατόν μεγαλύτερου βαθμού.

2. (2,5 μονάδες) (α) Να βρεθεί μια προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_{-6}^6 x \cdot \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}x\right) dx, \text{ με τη βοήθεια:}$$

(I) απλού κανόνα 3/8 Simpson.

(II) (απλού) κανόνα μέσου σημείου.

(III) τύπου ολοκλήρωσης Gauss 2 σημείων.

(β) Υπολογίστε τα βάρη ολοκλήρωσης w_1, w_2, w_3 του κανόνα ολοκλήρωσης:

$$\int_{-a}^a f(x) dx \approx w_1 \cdot f(-1) + w_2 \cdot f(1) + w_3 \cdot f'(1),$$

ώστε να ισχύει ακριβώς για πολυώνυμα όσο το δυνατόν μεγαλύτερου βαθμού.



3. (2,5 μονάδες)

Δίνεται το διπλό ολοκλήρωμα:

$$\int_0^6 \int_1^7 \left(x + \frac{1}{y^\alpha} \right) dy dx$$

(όγκος του στερεού που περικλείεται (κάτω) από την επιφάνεια $f(x) = x + \frac{1}{y^\alpha}$ και

(πάνω από) το ορθογώνιο χωρίο $D = [0, 6] \times [1, 7]$).

- (α) Να υπολογιστεί η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος.
- (β) Να δοθεί μια προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος με τη βοήθεια του τύπου του τραπεζίου και $n = m = 2$ (βήματα ολοκλήρωσης).
- (γ) Να υπολογιστεί το (απόλυτο) σχετικό σφάλμα.

4. (2,5 μονάδες)

Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.):
$$\begin{cases} y' = -\frac{y}{x} + \beta \\ y(1) = a \end{cases} \quad 1 \leq x \leq 2.5$$

- (α) Να εξεταστεί εάν το Π.Α.Τ καλά ορισμένο. Έχει μοναδική λύση; Εξηγήστε.
- (β) Να βρεθεί προσεγγιστική λύση του Π.Α.Τ:
 - (I) με τη μέθοδο του Euler και $h=0.5$.
 - (II) με τη μέθοδο του Taylor 2^{ης} τάξης και $h=0.5$.
- (γ) Εάν η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι ίση με $y(x) = \frac{\beta}{2}x + \frac{c}{x}$, να βρεθεί η (πραγματική/ακριβής) λύση του Π.Α.Τ.
- (δ) Να βρεθεί το ολικό σφάλμα στο σημείο $x = 2.5$ στα (β) (I) και (II) . Τι παρατηρείτε;
- (ε) Να βρεθεί το τοπικό σφάλμα στο σημείο $x = 2$ όταν χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Euler και $h=0.5$

Καλή επιτυχία