

Θέματα (1)

Προσοχή: στα παρακάτω θέματα όπου εμφανίζονται τα γράμματα α , β σημαίνουν:

α = το προτελευταίο και β = το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σου

Εάν κάποιο από αυτά είναι 0, χρησιμοποιείτε αντί γι αυτό τον αριθμό 5

1. (2,5 μονάδες)

(α) Δίνεται ο παρακάτω πίνακας (δεδομένα):

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
2	1.5		
4	α		
6	5.4		

(I) Να συμπληρωθεί ο πίνακας με τη βοήθεια προς τα εμπρός, προς τα πίσω ή κεντρικών διαφορών (όποιες θεωρείτε κατάλληλες κάθε φορά).

(II) Να δοθεί προσεγγιστική τιμή της $f'(3)$ και της $f''(5)$ με τη βοήθεια του:

(i) πολωνύμου παρεμβολής (στα παραπάνω σημεία) Lagrange.

(ii) πολωνύμου παρεμβολής (στα παραπάνω σημεία) Newton.

Τι παρατηρείτε; Εξηγείστε.

(β) Υπολογίστε τα βάρη παραγωγίσης w_1, w_2 του κανόνα παραγωγίσης:

$$f'(x) = w_1 \cdot f(x) + w_2 \cdot f(x+3h),$$

ώστε να ισχύει ακριβώς για πολυώνυμα όσο το δυνατόν μεγαλύτερου βαθμού.

2. (2,5 μονάδες)

Ο όγκος του στερεού που περικλείεται (κάτω) από την επιφάνεια $f(x) = \frac{1}{xy^\alpha}$ και

(πάνω από) το ορθογώνιο χωρίο $D = [1, 5] \times [2, 6]$ δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα:

$$\int_1^5 \int_2^6 \frac{1}{xy^\alpha} dy dx$$

(α) Να υπολογιστεί η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος

(β) Να δοθεί μια προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος με τη βοήθεια του τύπου του τραπεζίου και $n = m = 2$ (βήματα ολοκλήρωσης).

(γ) Να υπολογιστεί το (απόλυτο) σχετικό σφάλμα.

3. (2,5 μονάδες) (α) Να βρεθεί μια προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_0^\beta x e^{-\alpha x} dx, \text{ με τη βοήθεια:}$$

(I) απλού κανόνα 3/8 Simpson

(II) (απλού) κανόνα μέσου σημείου.

(III) τύπου ολοκλήρωσης Gauss 2 σημείων.

→

(β) Υπολογίστε τα βάρη ολοκλήρωσης w_1, w_2, w_3 του κανόνα ολοκλήρωσης

$$\int_{-3}^3 f(x)dx \simeq w_1 \cdot f(-\alpha) + w_2 \cdot f(0) + w_3 \cdot f(\alpha),$$

ώστε να ισχύει ακριβώς για πολυώνυμα όσο το δυνατόν μεγαλύτερου βαθμού.

4. (2,5 μονάδες)

Δίνεται το Π.Α.Τ.:
$$\begin{cases} y' = \alpha y - \beta \\ y(0) = \beta \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 0.6$$

(α) Να εξεταστεί εάν έχει μοναδική λύση. Είναι το Π.Α.Τ καλά ορισμένο;. Εξηγείστε.

(β) Να βρεθεί η προσεγγιστική λύση του Π.Α.Τ:

(I) με την μέθοδο του Euler και $h=0.2$

(II) με την μέθοδο του Taylor 2^{ης} τάξης και $h=0.2$.

(γ) Εάν η γενική λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι ίση με

$$y(x) = ce^{-\alpha x} - \beta, \text{ να βρεθεί η (πραγματική) λύση του Π.Α.Τ.}$$

(δ) Να βρεθεί το ολικό σφάλμα στο σημείο $x_3 = 0.4$ στα (β) (I) και (II) . Τι παρατηρείτε;

(ε) Να βρεθεί το τοπικό σφάλμα στο σημείο $x_2 = 0.4$ όταν χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Euler και $h=0.2$

Καλή επιτυχία