

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ Β – ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Παρεμβολή στα σημεία $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$

Πολυώνυμο Lagrange $L_n(x) = l_0(x) \cdot f(x_0) + l_1(x) \cdot f(x_1) + \dots + l_n(x) \cdot f(x_n)$	$l_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}$ $j = 0, 1, \dots, n$
Πολυώνυμο Newton $p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots$ $\dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$	όπου οι διαιρεμένες διαφορές j τάξης $j = 0, 1, \dots, n$ $a_j = f[x_j, x_{j-1}, \dots, x_1, x_0] = \frac{f[x_j, x_{j-1}, \dots, x_1] - f[x_{j-1}, \dots, x_1, x_0]}{x_j - x_0}$

Ολοκλήρωση

Μέθοδος	Κανόνας	Σφάλμα
Απλός τραπεζίου	$(\beta-\alpha) \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$	$-\frac{(\beta-\alpha)^3}{12} f''(\xi)$
Σύνθετος τραπεζίου	$\frac{h}{2} (f(x_0)+2f(x_1)+\dots+2f(x_{n-1})+f(x_n))$	$-\frac{(\beta-\alpha)}{12} h^2 f''(\xi)$
1/3 απλός Simpson	$\frac{h}{3} \left(f(\alpha) + 4f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + f(\beta) \right)$	$-\frac{(\beta-\alpha)^5}{2^5 \cdot 90} f^{(4)}(\xi)$
1/3 σύνθετος Simpson	$\frac{h}{3} (f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\dots+4f(x_{n-1})+f(x_n))$	$-\frac{(\beta-\alpha)}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$
3/8 απλός Simpson	$\frac{3}{8} h (f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3))$	$-\frac{(\beta-\alpha)}{80} h^4 f^{(4)}(\xi)$
Μέσου σημείου	$(\beta-\alpha) \cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$	$\frac{(\beta-\alpha)^3}{24} f''(\xi)$
Gauss 2- σημείων	$\int_{-1}^1 f(x)dx \cong f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f(-0.5774) + f(0.5774)$ Για $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής: $x = \frac{\beta-\alpha}{2}t + \frac{\beta+\alpha}{2}$ $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{\beta-\alpha}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{\beta-\alpha}{2}t + \frac{\beta+\alpha}{2}\right)dt$	
Gauss 3- σημείων	$\int_{-1}^1 f(x)dx \cong \frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ $\cong 0.55556 \cdot f(-0.774596) + 0.88889 \cdot f(0) + 0.55556 \cdot f(0.774596)$ Για $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ αλλαγή μεταβλητής $x = \frac{\beta-\alpha}{2}t + \frac{\beta+\alpha}{2}$ (συνέχεια ανάλογη με 2-σημείων)	

Παραγωγή

Μέθοδος	Τύπος	Σφάλμα
Εμπρός διαφορές	$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ $f''(x_0) \cong \frac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{h^2}$	$-\frac{h}{2}f''(\xi)$
Πίσω διαφορές	$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$ $f''(x_0) \cong \frac{f(x_0)-2f(x_0-h)+f(x_0-2h)}{h^2}$	$\frac{h}{2}f''(\xi)$
Κεντρικές διαφορές	$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $f''(x_0) \cong \frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$	$-\frac{h^2}{6}f'''(\xi)$ $-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)$
Χρήση π.π. Lagrange (ισαπέχοντα) $n=2$	$f'(x) \cong L_2'(x) = \frac{2x-x_1-x_2}{2h^2}f(x_0) - \frac{2x-x_0-x_2}{h^2}f(x_1) + \frac{2x-x_1-x_0}{2h^2}f(x_2)$ $f''(x) \cong L_2''(x) = \frac{2}{2h^2}f(x_0) - \frac{2}{h^2}f(x_1) + \frac{2}{2h^2}f(x_2)$	
Χρήση π.π. Newton (ισαπέχοντα) $n=2$	$f'(x) \cong p_2'(x) = \alpha_1 + \alpha_2(2x-x_1-x_0)$ $f''(x) \cong p_2''(x) = 2\alpha_2$	

Προβλήματα Αρχικών Τιμών

Μέθοδος	Αναδρομικός Τύπος -- Σφάλμα
Euler (1 ^{ης} τάξης)	$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1$ Σφάλμα Ολικό στο x_k: $y(x_k) - y_k$ $y(x_k)$ τιμή της λύσης στο x_k y_k προσέγγιση τιμή της λύσης στο x_k Τοπικό στο x_k: $y(x_k) - \bar{y}_k$ $\bar{y}_k = y(x_{k-1}) + h \cdot f(x_{k-1}, y(x_{k-1}))$
Taylor 2 ^{ης} τάξης	$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} (f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i) \cdot f(x_i, y_i))$ $i = 0, 1, \dots, n-1$ Σφάλμα Ολικό στο x_k: $y(x_k) - y_k$