

Παράδειγμα

Το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{1.5} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ δεν μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά.

Να υπολογισθεί προσεγγιστικά με τη βοήθεια:

(α) ατμού τύπου $\frac{3}{8}$ Simpson.

(β) ατμού κανόνα μέσου βυθίου

(γ) τύπου ολοκλήρωσης Gauss-Legendre 2-βυθίων.

Λύση

(α) $a=0, b=1.5$ $h = \frac{b-a}{3} = 0.5$ $\hookrightarrow x_0=0, x_1=0.5, x_2=1, x_3=1.5$
 οπότε

$$I \approx \frac{3}{8} h (f(0) + 3f(0.5) + 3f(1) + f(1.5))$$

$$= \frac{3}{8} \cdot 0.5 (1 + 3 \times 0.882497 + 3 \times 0.606531 + 0.324652)$$

$$(β) \quad I \approx (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (1.5-0) \cdot f\left(\frac{0+1.5}{2}\right) = 1.5 \times 0.757840 \approx 1.13226$$

$\overset{0.75}{\text{ατμ}} \quad \underline{\approx 1.08595}$

(γ) Αλλαγή μεταβλητής: $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2} = \frac{1.5}{2}t + \frac{1.5}{2} \Rightarrow x = 0.75t + 0.75$
 Τώρα: $dx = 0.75 dt$

$$\int_0^{1.5} f(x) dx = 0.75 \int_{-1}^1 \underbrace{f(0.75t + 0.75)}_{g(t)} dt \approx \leftarrow \text{κανόνας 2-βυθίων}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.5774$$

$$= 0.75 \left(g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right) = 0.75 \left(g(0.5774) + g(0.5774) \right)$$

$$= 0.75 \left(f(0.75 \times 0.5774 + 0.75) + f(0.75 \times 0.5774 + 0.75) \right)$$

$$= 0.75 \left(f(0.31695) + f(1.18305) \right) \approx \underline{1.08577} \quad \#$$

Παρατήρηση

Σφάλμα με $\frac{3}{8}$ Simpson = 0.000097 (!!)
 Gauss 2 βυθίων = 0.000083

Παράδειγμα

Υπολογίστε τα βάρη ογκύρσεως w_1, w_2, w_3 στον κανόνα ογκύρσεως:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 0 f(-1) + w_2 f(1) + w_3 f'(1)$$

ώστε ο κανόνας να είναι ακριβής με βαθμό ακρίβειας 2 (ή να ισχύει με "=" για πολώνυμα όσο το δυνατόν μεγαλύτερου βαθμού).

Λύση

Ο τύπος θα πρέπει να δίνει ακριβή αποτελέσματα για τα μονώνυμα $1, x, x^2$ (3 άγνωστα βάρη).

$$\text{Αν } f(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \& \quad \int_0^2 1 dx = 2 = w_1 + w_2 \quad \textcircled{i}$$

$$\text{Αν } f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1 \quad \& \quad \int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 2 = -w_1 + w_2 + w_3 \quad \textcircled{ii}$$

$$\text{Αν } f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \quad \& \quad \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3} = w_1 + w_2 + 2w_3 \quad \textcircled{iii}$$

$$\text{Από (iii) χρησιμοποιώντας την (i) γίνεται: } \frac{8}{3} = 2 + 2w_3 \Rightarrow w_3 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow w_3 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Από (ii)(i): } \begin{aligned} w_1 + w_2 &= 2 \\ -w_1 + w_2 &= 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \end{aligned} \quad +$$

$$2w_2 = 2 + \frac{5}{3} = \frac{11}{3} \Rightarrow w_2 = \frac{11}{6}$$

$$\text{Τέλος: (i) } w_1 = 2 - w_2 = 2 - \frac{11}{6} = \frac{1}{6}$$

Άρα:

$$\int_0^2 f(x) dx \approx \frac{1}{6} f(-1) + \frac{11}{6} f(1) + \frac{2}{6} f'(1)$$

Παράδειγμα.

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
1	1.2		
3	2.3		
5	4.1		

- (α) Να συμπληρωθεί ο πίνακας, χρησιμοποιώντας προς τα εμπρός, πίσω ή κεντρικές διαφορές (πς πιο κατάλληλες κάθε φορά).
 (β) Να υπολογιστεί η $f'(3)$ χρησιμοποιώντας το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange.
 (γ) Να υπολογιστεί η $f''(2)$ χρησιμοποιώντας το πολυώνυμο παρεμβολής Newton. Ποιά η $f''(4)$;

Λύση.

(α) $f'(1) \approx \frac{f(3) - f(1)}{h} = \frac{2.3 - 1.2}{2} = 0.55$ εμπρός διαφορές (άκρο διαστήματος)

$h=2$
 $f'(5) \approx \frac{f(5) - f(3)}{h=2} = \frac{4.1 - 2.3}{2} = 0.9$ πίσω διαφορές (άκρο διαστήματος)

$f'(3) \approx \frac{f(5) - f(1)}{2h} = \frac{4.1 - 1.2}{4} = 0.725$ κεντρικές (συνήδως καλύτερο αποτέλεσμα).

$f''(1) \approx \frac{f(5) - 2f(3) + f(1)}{2^2} = \frac{4.1 - 2 \times 2.3 + 1.2}{4} = 0.175$ εμπρός (άκρο).

$f''(3) \approx \frac{f(5) - 2f(3) + f(1)}{4} = 0.175$ κεντρικές

$f''(5) \approx \frac{f(1) - 2f(3) + f(5)}{4} = 0.175$ πίσω διαφορές (άκρο).

(2^η παράγωγος εδώ, σταθερή ανεξαρτησία του σημείου).

(β) Η $f''(x_0)$ με τη βοήθεια του πολυωνύμου παρεμβολής Lagrange, είναι: (για ισοπλάχεια σημεία).

$$f''(x_0) \approx L_2''(x_0) = \frac{2}{2h^2} f(x_0) - \frac{3}{h^2} f(x_1) + \frac{2}{2h^2} f(x_2) \quad \text{οπότε}$$

$$f''(3) \approx L_2''(3) = \frac{2}{8} \cdot 1.2 - \frac{3}{4} \cdot 2.3 + \frac{2}{8} \cdot 4.1 = 0.175$$

Παρατήρηση

(1) Το $L_2(x)$ είναι 2ου βαθμού, επομένως η $L_2''(x)$ είναι σταθερή $\forall x$, δηλ. $L_2''(x) = 0.175$

(2) Ο αναγωγικός τύπος του $L_2(x)$ είναι:

x	1	3	5	Γινόμενα
1	$x-1$	-2	-4	$8(x-1)=\pi_0$
3	+2	$x-3$	-2	$-4(x-3)=\pi_1$
5	4	2	$(x-5)$	$8(x-5)=\pi_2$
				$\pi = (x-1)(x-3)(x-5)$

$$\begin{aligned} \text{Το} \quad L_2(x) &= \frac{\pi}{\pi_0} f(x_0) + \frac{\pi}{\pi_1} f(x_1) + \frac{\pi}{\pi_2} f(x_2) = \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{8(x-1)} f(x_0) + \frac{(x-1)(x-5)}{-4} f(x_1) \\ &\quad + \frac{(x-1)(x-3)}{8} f(x_2) \\ &= 0.0875x^2 + 0.2x + 1.4625 \end{aligned}$$

(γ)

x	f(x)	α_0
1	1.2	$\left. \begin{aligned} &\frac{2.3-1.2}{3-1} = 0.55 = \alpha_1 \\ &\frac{4.1-2.3}{5-3} = 0.9 \end{aligned} \right\}$
3	2.3	
5	4.1	

(Διαμεμένες διαφορές για Newton)

$$\frac{0.9 - 0.55}{4} = 0.0875 = \alpha_2$$

ΕΠ2
5

Η $f''(x_\alpha)$, με τη βοήθεια του πολλαπλού παρεμβολής Newton, δίνεται από τη σχέση:

$$f''(x_\alpha) \cong p_2''(x_\alpha) = 2 \cdot \alpha_2 = 2 \times 0.0875 = 0.175$$

Επομένως $f''(2) \cong p_2''(2) = 0.175$. Ανάλογα, $f''(4) = 0.175$.
Το $p_2(x)$ είναι πολλαώνυμο 2ου βαθμού, οπότε $p_2''(x) = c$.

Παρατήρηση

(1) Το $p_2(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-1) + \alpha_2(x-1)(x-3) =$
 $= 1.2 + 0.55(x-1) + 0.0875(x-1)(x-3)$
 $\qquad\qquad\qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{x^2-4x+3}$

$$= 1.2 + 0.55x - 0.55 + 0.0875x^2 - 0.35x + 0.2625 \Rightarrow$$

$$p_2(x) = 0.0875x^2 + 0.2x + 1.4625$$

Οπότε $p_2'(x) = 2 \times 0.0875x + 0.2 \quad \kappa'$

$$p_2''(x) = 2 \times 0.0875 = 0.175 \quad \forall x.$$

(2) $L_2''(x) = p_2''(x)$, λόγω του μονοσήματου του πολλαπλού παρεμβολής.

Παράδειγμα

Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών:
$$\begin{cases} y' = -xy \\ y(0) = 1 \\ 0 \leq x \leq 0.3, \quad y \end{cases}$$

- Να εξεταστεί αν το Π.Α.Τ έχει μοναδική λύση. Είναι το Π.Α.Τ κατ'ορισμένο;
- Να βρεθεί η προσεγγιστική λύση του Π.Α.Τ
 - με τη μέθοδο Ευλης κ' $h=0.1$
 - με τη μέθοδο Ταυλός 2^{ης} τάξης κ' $h=0.1$
- Να βρεθεί η (πραγματική) λύση του Π.Α.Τ
- Να υπολογισθούν τα στικά σφάλματα, στο σημείο $x=0.3$, στα (β') κ' β(β'). Τι παρατηρείται;
- Να βρεθεί το τοπικό σφάλμα στο σημείο $x=0.2$ που κάνουμε, όταν χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Ευλης.

Λύση

(α) Εδώ $f(x,y) = -xy \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = |-x| = |x| \leq 0.3 = L$

δηλ. η $f(x,y)$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz με $L=0.3$.
Επομένως, από γνωστά θεωρήματα, το Π.Α.Τ έχει μοναδική λύση κ' είναι κατ'ορισμένο.

(β)(i) $h=0.1, \quad x_0=0, \quad x_1=0.1, \quad x_2=0.2, \quad x_3=0.3$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = y_0 + h(-x_0 y_0) = y_0 - h x_0 y_0 = y_0 (1 - h x_0) \\ &= 1 \cdot (1 - 0.1 \cdot 0) = 1 \end{aligned}$$

$$y_2 = y_1 (1 - h \cdot x_1) = 1 \cdot (1 - 0.1 \cdot 0.1) = 0.99$$

$$y_3 = y_2 (1 - 0.1 \cdot 0.2) = 0.99 \times 0.98 = 0.9702$$

(ii) $f(x,y) = -xy \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x$

Παρατηρούμε ότι το σφάλμα με τη μέθοδο Τσουλς είναι (κατά) πολύ μικρότερο από τα αντίστοιχα με τη μέθοδο Ευλείς.

(ε) Τοπικό σφάλμα στο σημείο $x_2 = 0.2$.

$$y(0.2) = e^{-\frac{0.2^2}{2}} \approx 0.980199$$

$$y(x_1) = y(0.1) = e^{-\frac{0.1^2}{2}} = 0.995012$$

$$\bar{y}_2 = y(x_1) + h f(x_1, y(x_1))$$

$$= 0.995012 + 0.1(-0.1 \times 0.995012)$$

$$= 0.9850619$$

Άρα, τοπικό σφάλμα:

$$|y(0.2) - \bar{y}_2| = |0.980199 - 0.9850619|$$

$$\approx 0.0048629$$

Άσκηση

Ο όγκος του στερεού που περικλείεται (κάτω) από την επιφάνεια $f(x) = \frac{1}{xy^\alpha}$ και (πάνω από)

το ορθογώνιο χωρίο $D = [1, 5] \times [2, 6]$ δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα:

$$\int_1^5 \int_2^6 \frac{1}{xy^\alpha} dy dx$$

$$f(x, y) = \frac{1}{xy^\alpha}$$

έστω $\alpha = 2$

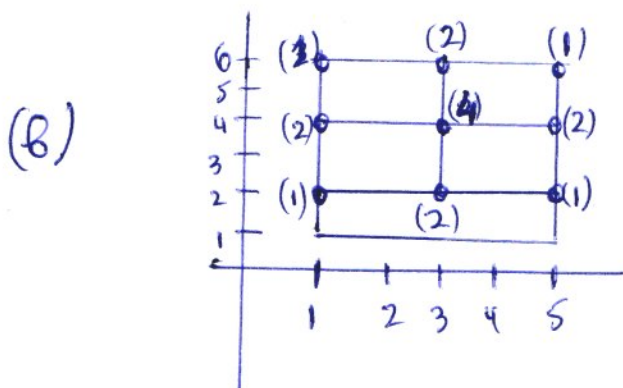
(α) Να υπολογιστεί η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος

(β) Να δοθεί μια προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος με τη βοήθεια του τύπου του τραπεζίου για διπλά ολοκληρώματα και $n = m = 2$.

(α) Λύση

$$\int_1^5 \int_2^6 \frac{1}{xy^2} dy dx = \left(\int_1^5 \frac{1}{x} dx \right) \left(\int_2^6 \frac{1}{y^2} dy \right) = \ln x \Big|_1^5 \cdot \left(-\frac{1}{y} \right) \Big|_2^6 =$$

$$= \ln 5 \cdot \left(1 - \frac{1}{6} \right) \approx 1.3412.$$



Το πλέγμα δείχνει τα σημεία/κόμβους στα οποία πρέπει να υπολογίσουμε τις τιμές της f , για να προσεγγίσουμε το $\iint_R f(x, y) dA$. Μέσα σε παρένθεση το αντίστοιχο βάρος που πρέπει να πολλαπλασιάσουμε κάθε τιμή από αυτές.

έχουμε:

$$\int_1^5 \int_2^6 \frac{1}{xy^2} dy dx \approx \frac{(5-1)(6-2)}{16} \left\{ f(1,2) + 2f(3,2) + f(5,2) + 2f(1,4) + 4f(3,4) + 2f(5,4) + f(1,6) + 2f(3,6) + f(5,6) \right\} =$$

$$= \frac{16}{16} \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2^2} + 2 \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^2} + 2 \frac{1}{1 \cdot 4^2} + 4 \frac{1}{3 \cdot 4^2} + 2 \frac{1}{5 \cdot 4^2} + \frac{1}{1 \cdot 6^2} + 2 \frac{1}{3 \cdot 6^2} + \frac{1}{5 \cdot 6^2} \right\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{20} + \frac{1}{12} + \frac{1}{40} + \frac{1}{36} + \frac{1}{54} + \frac{1}{180}$$

$$\approx 0.7518$$

Λύση

Δίνεται το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^6 \frac{\alpha}{(x+\beta)^4} dx$$

(AM)

έστω $\frac{b=2}{\alpha=3}$

θέτουμε $\int_0^6 \frac{3}{(x+2)^4} dx$

$f(x) = \frac{3}{(x+2)^4}$

(α) Να προσεγγιστεί η τιμή του ολοκληρώματος κάνοντας χρήση της μεθόδου:

(I) **τραπεζίου** χρησιμοποιώντας 5 ισαπέχοντα σημεία.

(II) **1/3 Simpson** χρησιμοποιώντας 5 ισαπέχοντα σημεία.

(β) Υπολογίστε το (απόλυτο) σχετικό σφάλμα προσέγγισης σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις. Ποια προσέγγιση του ολοκληρώματος είναι καλύτερη;

(γ) Πόσα (υπο) διαστήματα χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα προσεγγιστικά με το σύνθετο κανόνα τραπεζίου, με σφάλμα μικρότερο του 10^{-4} .

Λύση (I)

(α) 5 σημεία $\Rightarrow n=4$ διαστήματα.

$$h = \frac{6-0}{4} = 1.5$$

0	1.5	3	4.5	6
x_0	x_1	x_2	x_3	x_4

$$\begin{aligned} \int_0^6 \frac{3}{(x+2)^4} dx &\approx \frac{h}{2} \{ f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4) \} \\ &\approx \frac{1.5}{2} \{ f(0) + 2f(1.5) + 2f(3) + 2f(4.5) + f(6) \} \\ &\approx \frac{1.5 \cdot 3}{2} \left\{ \frac{1}{2^4} + \frac{2}{(3.5)^4} + \frac{2}{5^4} + \frac{2}{6.5^4} + \frac{1}{8^4} \right\} \\ &\approx 0.1809 \end{aligned}$$

(II) $h=1.5$ (όπως στο (I))

$$\begin{aligned} \int_0^6 \frac{3}{(x+2)^4} dx &\approx \frac{h}{3} \{ f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) \} \\ &\approx \frac{3 \cdot 1.5}{3} \left\{ \frac{1}{2^4} + \frac{4}{(3.5)^4} + \frac{2}{5^4} + \frac{4}{6.5^4} + \frac{1}{8^4} \right\} \\ &\approx 0.1423 \end{aligned}$$

$$\textcircled{b} \int \frac{3}{(x+2)^4} dx = 3 \int (x+2)^{-4} dx = \frac{3}{-4+1} (x+2)^{-4+1} + C =$$

$$= -\frac{1}{(x+2)^3} + C$$

Άρα $\int_0^6 \frac{3}{(x+2)^4} dx = -\frac{1}{(x+2)^3} \Big|_0^6 = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{8^3} = 0.1230$ (ακριβής
αγνή)

Σχετικό
εφάλμα

Τραπέζιο $\left| \frac{0.1809 - 0.1230}{0.1230} \right| \approx 0.4707$ δηλ. 47.07%

$\frac{1}{3}$ Simpson $\left| \frac{0.1423 - 0.1230}{0.1230} \right| \approx 0.157$ δηλ. 15.7%
($\frac{2}{3}$ λιγότερο)

Προτιμάμε την προσέγγιση $\frac{1}{3}$ -Simpson.

(γ) Είναι γνωστό ότι ο τύπος του εφάλματος δίνεται:

$$R_{n+1}(f) = \frac{-(b-a)}{12} h^2 f''(\xi) \quad \xi \in [0,6]$$

a, b = άκρα διαστήματος
σχημάτωσης, $a=0$
 $b=6$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{6-0}{n} = \frac{6}{n}$$

Άρα $|R_{n+1}(f)| = \left| -\frac{(6-0)}{12} \cdot \frac{6^2}{n^2} f''(\xi) \right| = \frac{18}{n^2} |f''(\xi)| \leq 10^{-3}$
(έστω $\alpha=3$)

Η $f(x) = \frac{3}{(x+2)^4} = 3(x+2)^{-4}$

$$f'(x) = -3 \cdot 4 (x+2)^{-3}$$

$$f''(x) = 3 \cdot 3 \cdot 4 (x+2)^{-2} = \frac{36}{(x+2)^2}$$

Αλλά $g(x) = \frac{36}{(x+2)^2}$ είναι φθίνουσα στο $[0,6]$

οπότε

$$\max_{x \in [0,6]} g(x) = g(0) = \frac{36}{(0+2)^2} = 9$$

Τέλος, $\frac{18}{n^2} |f''(\xi)| \leq 10^{-3} \Rightarrow \frac{18}{n^2} \cdot 9 \leq 10^{-3} \Rightarrow n^2 \geq 9 \cdot 18 \cdot 10^3$

$$n \geq \sqrt{9 \cdot 18 \cdot 10^3} \approx 402.49$$

δηλ. $n=403$ διαστήματα