

Θέματα

Προσοχή: στα παρακάτω θέματα όπου εμφανίζονται τα γράμματα α, β σημαίνουν:
α = το προτελευταίο και β = το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σου
Εάν κάποιο από αυτά είναι 0, χρησιμοποιείτε αντί γι αυτό τον αριθμό 3

1. (2,5 μονάδες) (α) Δίνεται ο παρακάτω πίνακας (δεδομένα):

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
1	13		
3	2α	_____	
5	4β		_____
7	65		

← αν α=3, $f(x)=23$

← αν β=3, $f(x)=43$

- (I) Να συμπληρωθούν τα κενά του πίνακα με τη βοήθεια προς τα εμπρός, προς τα πίσω ή κεντρικών διαφορών (όποιες θεωρείτε κατάλληλες κάθε φορά).

Ποιό είδος διαφορών προτιμάμε (συνήθως), και γιατί;

- (II) Να δοθεί προσεγγιστική τιμή της $f'(4,7)$ και της $f''(6,3)$ με τη βοήθεια του πολωνύμου παρεμβολής Newton. (υπολογίστε το πολώνυμο).

Αν χρησιμοποιούσαμε το πολώνυμο παρεμβολής Lagrange, το αποτέλεσμα της προσέγγισης θα ήταν διαφορετικό; Εξηγείστε. (μην υπολογίσετε το πολώνυμο).

- (β) Υπολογίστε τα βάρη ολοκλήρωσης w_1, w_2, w_3 του κανόνα ολοκλήρωσης:

$$\int_{-\beta}^{\beta} f(x)dx \approx w_1 \cdot f(\alpha) + w_2 \cdot f(\alpha-1) + w_3 \cdot f(\alpha-2),$$

ώστε να ισχύει ακριβώς για πολώνυμο όσο το δυνατόν μεγαλύτερου βαθμού.

2. (2,5 μονάδες) Δίνεται το ολοκλήρωμα: $\int_{-2}^{\alpha} (x + \cos(\beta x)) dx$

- (α) Να προσεγγιστεί η τιμή του ολοκληρώματος κάνοντας χρήση της μεθόδου:

(I) τραπεζίου χρησιμοποιώντας $n=8$ υποδιαστήματα.

(II) 1/3 Simpson χρησιμοποιώντας 7 ισαπέχοντα σημεία.

(III) τύπου ολοκλήρωσης Gauss 2 σημείων.

- (β) Πόσα σημεία (κόμβους) χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα προσεγγιστικά, με το σύνθετο κανόνα τραπεζίου, με σφάλμα μικρότερο του $10^{-\beta}$.

- (γ) Να υπολογιστεί το (απόλυτο) σχετικό σφάλμα στην περίπτωση του (α) (II). Να σχολιαστεί το μέγεθος του σφάλματος.



3. (2,5 μονάδες)

Δίνεται το διπλό ολοκλήρωμα:

$$\int_2^6 \int_4^{10} \left(x e^{\beta x} + \frac{1}{y^\alpha} \right) dy dx$$

(όγκος του στερεού που περικλείεται (κάτω) από την επιφάνεια $f(x, y) = x e^{\beta x} + \frac{1}{y^\alpha}$

και (πάνω από) το ορθογώνιο χωρίο $D = [2, 6] \times [4, 10]$).

- (α) Να υπολογιστεί η ακριβής τιμή του διπλού ολοκληρώματος.
- (β) Να δοθεί μια προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος με τη βοήθεια του τύπου του τραπεζίου και $n = m = 2$ (βήματα ολοκλήρωσης).
- (γ) Να υπολογιστεί το (απόλυτο) σχετικό σφάλμα. Είναι καλή η εκτίμηση του διπλού ολοκληρώματος;

4. (2,5 μονάδες)

Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.):
$$\begin{cases} y' = -\frac{3y}{x} + \beta x \\ y(1) = 2 \end{cases} \quad 1 \leq x \leq 4$$

- (α) Έχει το Π.Α.Τ. μοναδική λύση; Τι σημαίνει ότι το Π.Α.Τ είναι καλά ορισμένο;
- (β) Να βρεθεί η προσεγγιστική λύση του Π.Α.Τ:
 - (I) με τη μέθοδο του Euler και $h=1$.
 - (II) με τη μέθοδο του Taylor 2^{ης} τάξης και $h=1$.
- (γ) Εάν η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι ίση με $y(x) = \frac{x^2}{5} \beta + \frac{c}{x^3}$, να βρεθεί η (πραγματική/ακριβής) λύση του Π.Α.Τ. (δηλ. προσδιορίστε το c)
- (δ) Να βρεθεί το ολικό σφάλμα στο σημείο $x = 4$ στο (α) (I).
- (ε) Να βρεθεί το τοπικό σφάλμα στο σημείο $x = 3$ όταν χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Euler και $h=1$.

Καλή επιτυχία