

Α πρόοδος -- Ασκήσεις επανάληψης

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.
- (α) Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια (τουλάχιστον) ρίζα x^* στο διάστημα $[0.5, 1.3]$.
- (β) Πόσα βήματα απαιτούνται, με τη μέθοδο της διχοτόμησης, για την προσέγγιση της ρίζας x^* με σφάλμα 10^{-6} . Να δοθούν οι 3 πρώτες προσεγγίσεις της μεθόδου. Να βρεθεί το σχετικό σφάλμα σε αυτή την περίπτωση.
- (γ) Να δοθούν οι 2 πρώτες προσεγγίσεις της ρίζας, με χρήση της μεθόδου της εσφαλμένης θέσης. Προτιμάτε τη μέθοδο αυτή ή τη μέθοδο της τέμνουσας (απάντηση σε αυτό χωρίς να κάνετε πράξεις); Γιατί;
- (δ) Να δοθούν οι 3 πρώτες προσεγγίσεις της ρίζας, με χρήση της μεθόδου Newton - Raphson και αρχική εκτίμηση το σημείο 1.2. Συγκλίνει η μέθοδος στη ρίζα x^* ;
- (ε) Να δοθούν οι 2 πρώτες προσεγγίσεις της ρίζας, με χρήση της μεθόδου της τέμνουσας και αρχικές εκτιμήσεις τα σημεία 1.2 και 0.7. Σε τι διαφέρει η μέθοδος αυτή από τη μέθοδο της εσφαλμένης θέσης; Συγκλίνει η μέθοδος στη ρίζα x^* ;
- (στ) Για την προσέγγιση της παραπάνω ρίζας x^* , κατασκευάστε 3 μεθόδους σταθερού σημείου ($x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$) και χρησιμοποιήστε μία από αυτές 2 φορές επαναληπτικά, για την προσέγγιση της ρίζας με αρχική εκτίμηση το σημείο 1.2. Συγκλίνει η μέθοδος στην x^* ;
2. Δίνεται ο πίνακας των τιμών της θερμοκρασίας ενός ασθενή που μετρήθηκε (σε βαθμούς Κελσίου) σε χρονικά διαστήματα μιάς ώρας.

X (ώρα)	$f(x)$ θερμοκρασία
3	38.2
4	39.4
5	40.2

- (α) Να προσδιοριστεί το πολώνυμο (παρεμβολής):
- (I) Lagrange
- (II) Newton (με τη βοήθεια των διαιρεμένων διαφορών)
- (β) Να δοθεί προσεγγιστική τιμή της θερμοκρασίας του ασθενή στις 4:30 με καθένα από τα δύο πολώνυμα. Τι παρατηρείτε; Γιατί;
- (γ) Να βρεθεί η: (i) γραμμική (ii) τετραγωνική spline (αν δίνεται ότι: $s'(3) = 0$) που παρεμβάλει τα 3 αυτά σημεία. Να δοθεί προσεγγιστική τιμή της θερμοκρασίας του ασθενή στις 4:30 σε κάθε μία από τις περιπτώσεις spline. Ποιά εκτίμηση προτιμάτε: κάποια από τις spline ή αυτή του (β);
- (δ) Είναι η τετραγωνική spline ίδια με τα πολώνυμα παρεμβολής; Γιατί;

(ε) Εάν προσθέσουμε τις μετρήσεις (6, 39.2) και (7, 38.3) να υπολογιστεί η θερμοκρασία του ασθενή στις 5:30, χρησιμοποιώντας το πολυώνυμο Newton που παρεμβάλει τα 5 παραπάνω σημεία, με τη βοήθεια των διαιρεμένων διαφορών.

3. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τη συγκέντρωση ενός φαρμάκου, στον οργανισμό ενός ατόμου, t ώρες μετά τη χορήγησή του.

t (χρόνος σε ώρες)	y (συγκέντρωση σε ppm)
0	21
2	7.5
4	4.2
6	3.4

- (α) Να βρεθεί η συγκέντρωση του φαρμάκου $t=10$ ώρες και 20 λεπτά μετά τη χορήγησή του. Η εκτίμηση να γίνει προσαρμόζοντας στα δεδομένα μια καμπύλη της μορφής $y = \frac{1}{A \cdot t + B}$ που A, B σταθερές και χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.
Πως θα μπορούσαμε να δούμε πόσο καλή είναι η προσαρμογή της καμπύλης; (εξηγήστε χωρίς υπολογισμούς).
- (β) Να δοθεί προσεγγιστική τιμή της συγκέντρωσης του φαρμάκου $t=10$ ώρες και 20 λεπτά μετά τη χορήγησή του με τη βοήθεια του πολυωνύμου παρεμβολής Newton (με τη βοήθεια των διαιρεμένων διαφορών).
- (γ) Ποιά από τις δύο προσεγγίσεις θα προτιμούσατε; Αυτή της προσαρμοσμένης ευθείας των ελαχίστων τετραγώνων ή το πολυώνυμο παρεμβολής Newton;
- (δ) Αν πρέπει να δοθεί μία (επιπλέον) δόση του φαρμάκου (21 ppm) όταν η συγκέντρωσή του είναι 1.5 ppm, μετά από πόσο χρονικό διάστημα, από την αρχική δόση, θα πρέπει να δοθεί η δόση; Πόση θα είναι, αμέσως μετά τη 2^η δόση, η συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό;

4. Μία φυσική spline s στο $[0,2]$, ορίζεται από τη σχέση:

$$s(x) = \begin{cases} p_0(x) = 1 + 2x - x^3 & \text{εάν } x \in [0, 1] \\ p_1(x) = 2 + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & \text{εάν } x \in [1, 2] \end{cases}$$

Να βρεθούν τα: b, c, d .

5. Μία φυσική spline s στο $[1, 3]$, ορίζεται από τη σχέση:

$$s(x) = \begin{cases} p_0(x) = 1 + B(x-1) - D(x-1)^3 & \text{εάν } x \in [1, 2] \\ p_1(x) = 1 + b(x-2) - \frac{3}{4}(x-2)^2 + d(x-2)^3 & \text{εάν } x \in [2, 3] \end{cases}$$

Εάν η spline s παρεμβάλει τα σημεία $(1,1)$, $(2,1)$ και $(3,0)$, να βρεθούν τα B, D, b, d .

6. Μιά πλήρης spline s για τη συνάρτηση $f(x)$, ορίζεται από τη σχέση:

$$s(x) = \begin{cases} p_0(x) = 1 + Bx + 2x^2 - 2x^3 & \text{εάν } x \in [0, 1] \\ p_1(x) = 1 + b(x-1) - 4(x-1)^2 + 7(x-1)^3 & \text{εάν } x \in [1, 2] \end{cases}$$

Να βρεθούν τα $f'(0)$ και $f'(2)$

Καλή επιτυχία