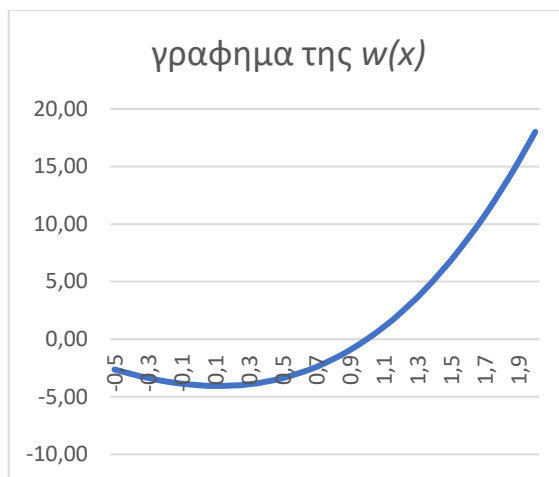


Προσοχή: στα παρακάτω θέματα όπου εμφανίζονται τα γράμματα α , β σημαίνουν:
 α = το προτελευταίο και β = το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σου
Εάν κάποιο από αυτά είναι 0, χρησιμοποιείτε αντί γι αυτό τον αριθμό 4

1. (3 μονάδες) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + (5 - \alpha)x^2 + (4 - 5\alpha)x - 4 \cdot \alpha$.
- (α) Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια (τουλάχιστον) ρίζα x^* στο διάστημα $[\alpha - 0.6, \alpha + 0.7]$.
- (β) Είναι **1β** επαναληπτικά βήματα αρκετά, με τη μέθοδο της διχοτόμησης, για την προσέγγιση της ρίζας x^* με σφάλμα $10^{-\alpha}$. Να δοθούν οι 2 πρώτες προσεγγίσεις της μεθόδου.
- (γ) Να δοθούν οι 2 πρώτες προσεγγίσεις της ρίζας, με χρήση της μεθόδου της εσφαλμένης θέσης. Ποιό το σχετικό σφάλμα σε αυτή την περίπτωση;
- (δ) Ποιά(ες) από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι κατάλληλη(ες) για την προσέγγιση της ρίζας x^* της εξίσωσης $f(x) = 0$, με τη μέθοδο σταθερού σημείου $x_n = g(x_{n-1})$
- (I) $g_1(x) = \frac{x^3 + (5-\alpha)x^2 - 4\alpha}{5\alpha - 4}$ (II) $g_2(x) = x^3 + (5 - \alpha)x^2 + (5 - 5\alpha)x - 4 \cdot \alpha$
- (III) $g_3(x) = x + \frac{x^3 + (5-\alpha)x^2 - 4\alpha}{4 - 5\alpha}$. Εξηγείστε.
- Χρησιμοποιήστε μια από αυτές 3 φορές επαναληπτικά, για την εκτίμηση της x^* , με αρχικό σημείο/εκτίμηση $\alpha + 0.4$. Συγκλίνει η μέθοδος στην x^* ;
- (ε) Εάν στην παρακάτω συνάρτηση $w(x)$ εφαρμόσουμε τη μέθοδο Newton-Raphson, τότε θα συγκλίνει πάντα στη ρίζα της $w(x) = 0$, ανεξάρτητα από το αρχικό σημείο που ξεκινάμε;



2. (2 μονάδες) Ο παρακάτω πίνακας αναφέρεται στον αριθμό των ατόμων (σε χιλιάδες) που έχουν εμβολιαστεί για τον ιό της γρίπης, x ημέρες μετά την έναρξη της εμβολιαστικής περιόδου.

→

x (ημέρες)	f(x) Άτομα (χιλιάδες)
1	3α
2	5β
5	105

- (α) Να προσδιοριστεί το πολυώνυμο (παρεμβολής):
 (I) Lagrange
 (II) Newton (με τη βοήθεια των διαιρεμένων διαφορών)
- (β) Να υπολογιστεί προσεγγιστικά ο αριθμός των εμβολιασθέντων 4 ημέρες και 10 ώρες μετά την έναρξη του εμβολιασμού, με καθένα από τα δύο πολυώνυμα. Τι παρατηρείτε; Γιατί;
- (γ) Εάν προσθέσουμε τις μετρήσεις (6, 130) και (7, 150), μετά από πόσες ημέρες ο αριθμός των εμβολιασθέντων θα είναι 200.000. Ο υπολογισμός να γίνει χρησιμοποιώντας το πολυώνυμο Newton που παρεμβάλλει τα 5 παραπάνω σημεία.
3. **(2,5 μονάδες)** (α) Ο παρακάτω πίνακας δίνει τη θερμοκρασία, της ατμόσφαιρας, σε ύψος h από τους πρόποδες μιας (ψηλής) οροσειράς.

h (σε χιλιόμετρα)	y (θερμοκρασία σε °C)
0	20
1	15
2	11.α
5	7.α

Να δοθεί η θερμοκρασία (προσεγγιστικά) σε ύψος 1.800 m από τους πρόποδες της οροσειράς. Η εκτίμηση να γίνει με τη βοήθεια καμπύλης ελαχίστων τετραγώνων, της μορφής $y(h) = \frac{a}{A \cdot B^h}$ όπου A, B σταθερές.

Εάν γνωρίζετε ότι το θερμόμετρο με το οποίο γίνεται η μέτρηση της θερμοκρασίας είναι ακριβείας, τι θα προτιμούσατε για την εκτίμηση της θερμοκρασίας:

- (I) Πολυώνυμο παρεμβολής Newton (II) την παραπάνω καμπύλη παλινδρόμησης (III) γραμμική ή (IV) κυβική spline; Εξηγήστε (ΜΗΝ υπολογίσετε τις καμπύλες).
- (β) (I) Εάν ένα πολυώνυμο παρεμβάλλει τα παραπάνω σημεία είναι μοναδικό;
 (II) Εάν ένα πολυώνυμο παρεμβάλλει τα παραπάνω σημεία θα πρέπει να ισούται με το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange /Newton;
 (III) Μπορεί ποτέ ένα πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange /Newton να είναι το ίδιο με την γραμμική spline που παρεμβάλλει τα ίδια σημεία; Με μιά τετραγωνική; Εξηγήστε (ΜΗΝ κάνετε υπολογισμούς στο (β)).

4. **(2,5 μονάδες)** Μιά φυσική κυβική spline s στο $[\alpha-1, \alpha+1]$ ορίζεται από τη σχέση:

$$s(x) = \begin{cases} p_0(x) = 1 + A(x - (\alpha - 1)) + B(x - (\alpha - 1))^2 & \text{εάν } x \in [\alpha - 1, \alpha] \\ p_1(x) = 2 + \Gamma(x - \alpha)^2 + \Delta(x - \alpha)^3 & \text{εάν } x \in [\alpha, \alpha + 1] \end{cases}$$

- (α) Να βρεθούν τα A, B, Γ, Δ.

Έστω ότι αυτή η κυβική spline s παρεμβάλλει μιά συνάρτηση $y = f(x)$, στα σημεία (με τετμημένες), $x_0 = \alpha - 1$, $x_1 = \alpha$, $x_2 = \alpha + 1$

- (β) Να δοθεί μια προσέγγιση της $f\left(\alpha - \frac{1}{4}\right)$,
 (γ) Να δοθεί μια προσέγγιση της $f'\left(\alpha + \frac{1}{5}\right)$

Καλή επιτυχία