

(13/6/2019)

Θέματα

Προσοχή: στα παρακάτω θέματα όπου εμφανίζονται τα γράμματα α , β σημαίνουν:
 α = το προτελευταίο και β = το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σου
Εάν κάποιο από αυτά είναι 0, χρησιμοποιείτε αντί γι αυτό τον αριθμό 7

1. (2 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 13x^2 + 20x$.

- (α) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια (τουλάχιστον) ρίζα x^* στο διάστημα $[1.2, 2.8]$.
- (β) Πόσα βήματα απαιτούνται, με τη μέθοδο της διχοτόμησης, για την προσέγγιση της ρίζας x^* με σφάλμα $10^{-\beta}$. Να δοθούν οι 3 πρώτες προσεγγίσεις της μεθόδου.
- (γ) Για την προσέγγιση της παραπάνω ρίζας x^* , κατασκευάστε 2 μεθόδους σταθερού σημείου ($x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$) και χρησιμοποιήστε μια από αυτές 3 φορές επαναληπτικά με αρχική εκτίμηση το σημείο 2.9. Συγκλίνει η μέθοδος στην x^* ;
- (δ) Να δοθούν οι 2 πρώτες προσεγγίσεις της ρίζας, με χρήση της μεθόδου Newton - Raphson και αρχική εκτίμηση το σημείο 2.9.

2. (2 μονάδες)

- (α) Ο πληθυσμός μιας αποικίας βακτηρίων, t ημέρες μετά την αρχική μέτρηση, δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

t (χρόνος σε ημέρες)	y (πληθυσμός βακτηρίων σε χιλιάδες)
1	0.5
3	α
5	10.5
7	15.5

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο *ελαχίστων τετραγώνων*, καθορίστε την εκθετική καμπύλη προσέγγισης των δεδομένων $y = A \cdot e^{Bt}$ όπου A, B σταθερές. Ποια η προσέγγιση της τιμής του αριθμού των βακτηρίων τη χρονική στιγμή $t = 5$; Διαφέρει από την πραγματική; Γιατί;

→

3. (2 μονάδες) (α) Δίνεται ο πίνακας δεδομένων (δεξιά):

x	$f(x)$
1	1.1
3	α
5	4.3
7	8.2

(α) Να προσδιοριστεί το πολυώνυμο (παρεμβολής):

(I) Lagrange

(II) Newton (με τη βοήθεια των διαιρεμένων διαφορών)

που παρεμβάλει **μόνον** τα σημεία (1, 1.1), (3, α) και (5, 4.3).

(β) Να δοθεί προσεγγιστική τιμή της $f'(3)$ και της $f''(5)$ με τη βοήθεια του πολυωνύμου παρεμβολής Newton του (α) (II).

(γ) Εάν προσθέσουμε τις μετρήσεις (7, 8.2) και (10, 1) να υπολογιστεί το πολυώνυμο Newton που παρεμβάλει τα 5 παραπάνω σημεία, με τη βοήθεια των διαιρεμένων διαφορών.

Καλή επιτυχία