

Αριθμητικές μέθοδοι νέγεις θεμάτων

(~~Α εξεταστική~~) 13/6/2019 (θ/1)

1) $f(x) = 2x^3 - 13x^2 + 20x$

$\alpha = 1.2$ $2.8 = b$

(α) $f(1.2) = 2 \cdot (1.2)^3 - 13 \cdot (1.2)^2 + 20 \cdot (1.2) = 8.736$
 $f(2.8) = 2 \cdot (2.8)^3 - 13 \cdot (2.8)^2 + 20 \cdot (2.8) = -2.016$

Επειδή $f(1.2) \cdot f(2.8) < 0$
 έπεται από το θεώρημα
 Bolzano ότι η εξίσωση
 $f(x) = 0$ έχει μία ρίζα στο $(1.2, 2.8)$.

(διάστημα ρίζας) $[1.2, 2.8]$ $\alpha = 1.2, b = 2.8$

(β) Εάν η ο ζητούμενος αριθμός βημάτων ή $\epsilon = 10^{-5}$ η ζητούμενη
 ακρίβεια/σφάλμα, τότε:

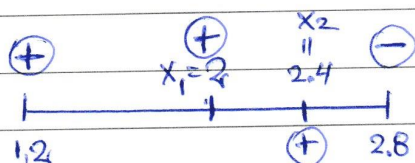
$$\frac{b-a}{2^n} \leq \epsilon \Rightarrow \frac{2.8-1.2}{2^n} \leq 10^{-5} \Rightarrow \log(2.8-1.2) - \log 2^n \leq \log 10^{-5}$$

$$\Rightarrow \log 1.6 - n \log 2 \leq -5 \log 10 \Rightarrow n \geq \frac{\log 1.6 + 5 \log 10}{\log 2} \approx 17.29$$

δηλ. απαιτούνται (τουλάχιστον) $n = 18$ βήματα.

1^η προσέγγιση

$$x_1 = \frac{\alpha + b}{2} = \frac{1.2 + 2.8}{2} = 2$$



$$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 13 \cdot 2^2 + 20 \cdot 2 = 4$$

Επειδή $f(2) \cdot f(2.8) < 0$, για ρίζα της
 $f(x) = 0$ βρίσκεται στο διάστημα $(2, 2.8)$

2^η προσέγγιση

$$x_2 = \frac{2 + 2.8}{2} = 2.4$$

$$f(2.4) = 2 \cdot 2.4^3 - 13 \cdot 2.4^2 + 20 \cdot 2.4 = 0.768$$

Επειδή $f(2.4) \cdot f(2.8) < 0$, για ρίζα της
 $f(x) = 0$ βρίσκεται στο διάστημα $(2.4, 2.8)$

3^η προσέγγιση

$$x_3 = \frac{2.4 + 2.8}{2} = 2.6$$

$$(f(2.6) = -0.728)$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=x \quad \text{σταθερού σημείου} \quad \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$(γ) f(x) = 2x^3 - 13x^2 + 20x = 0 \Rightarrow$$

$$(i) \left(\begin{smallmatrix} \text{γινώσκοντας} \\ \text{ως προς} \\ x \end{smallmatrix} \right) 20x = -2x^3 + 13x^2 \Rightarrow x = \frac{13x^2 - 2x^3}{20} = g_1(x)$$

$$(ii) \text{προσέγγιση} \\ x \text{ κ' στα } 2 \text{ μέγ} \quad 2x^3 - 13x^2 + 20x = 0 \Rightarrow 2x^3 - 13x^2 + 21x = x \\ \text{της } f(x)=0 \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{g_2(x)}$$

Χρησιμοποιούμε την $g_2(x)$ κ' την μέθοδο σταθερού σημείου για να προσεγγίσουμε τη ρίζα της $f(x)=0$.
Έχουμε: $x_0 = 2.9$

$$x_1 = g_2(x_0) = 2(2.9)^3 - 13(2.9)^2 + 21(2.9) = 0.348$$

$$x_2 = g_2(x_1) = g_2(0.348) = 2(0.348)^3 - 13(0.348)^2 + 21(0.348) \approx 5.81$$

$$x_3 = g_2(x_2) = g_2(5.81) = 2(5.81)^3 - 13(5.81)^2 + 21(5.81) = 75.42$$

Η μέθοδος δεν συγκλίνει στη ρίζα (η ρίζα βρίσκεται στο διάστημα $(1.2, 2.8)$).

Ακριβής ρίζα $x=2.5$

Παρατήρηση

① Εάν χρησιμοποιήσουμε την $g_1(x) = \frac{13x^2 - 2x^3}{20}$ τότε:
 $x_0 = 2.9$

$$x_1 = g_1(2.9) = \frac{13(2.9)^2 - 2(2.9)^3}{20} = 3.0276$$

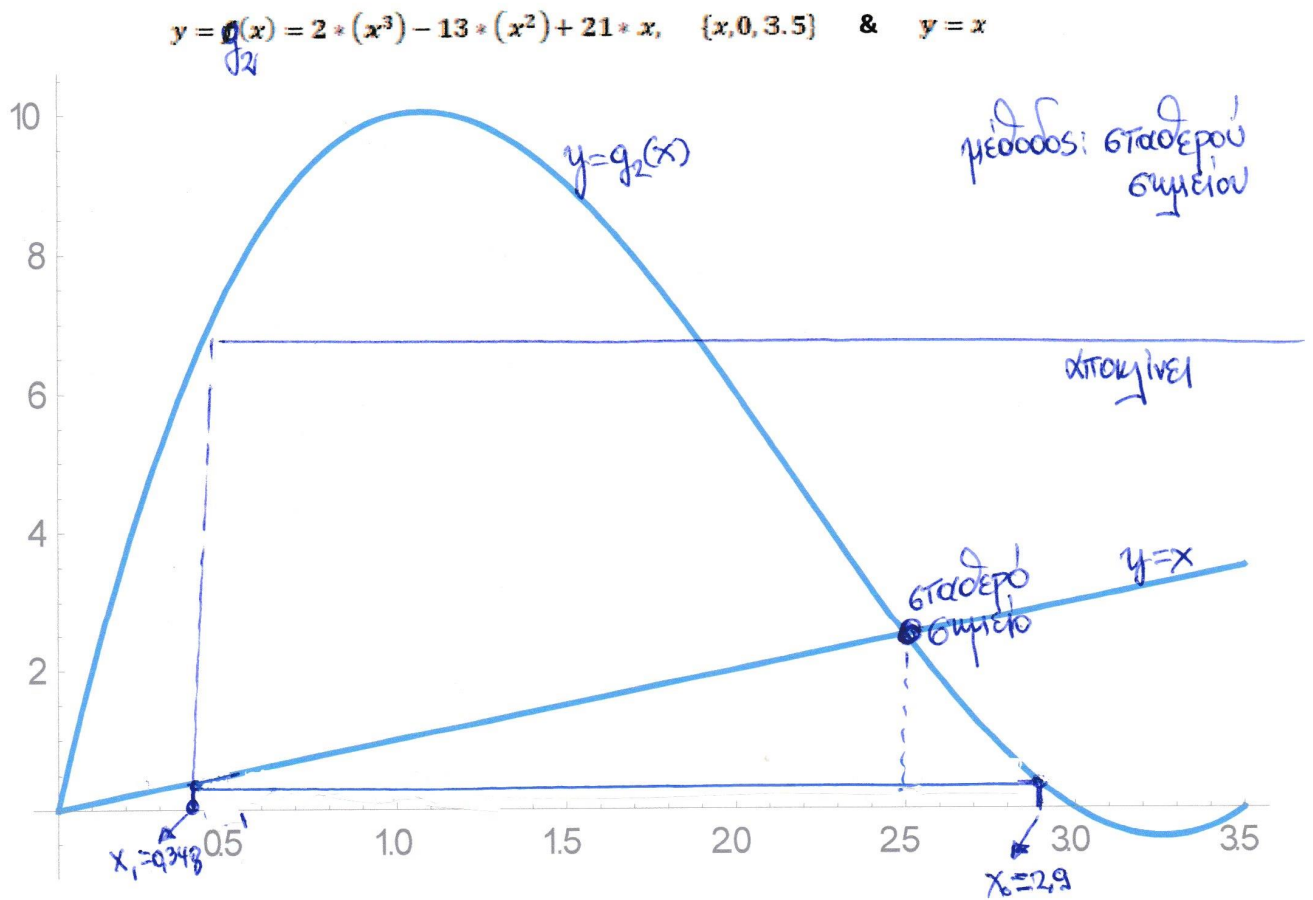
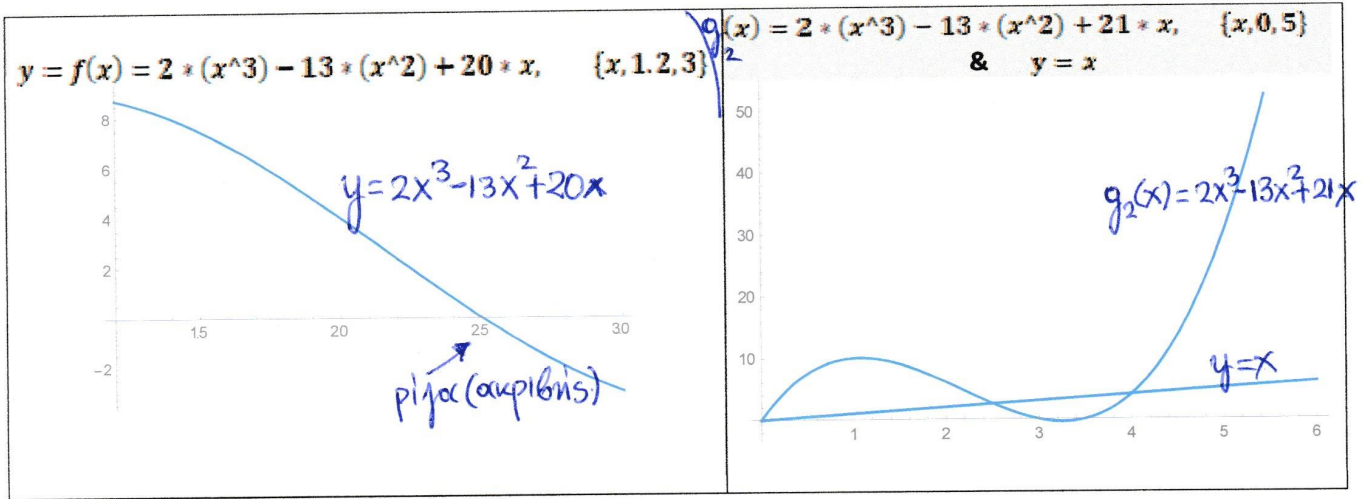
$$x_2 = g_1(3.0276) = \dots = 3.18293$$

$$x_3 = g_1(3.18293) = \dots = 3.36854$$

κ' εδώ φαίνεται, η μέθοδος του σταθερού σημείου, να αποκλίνει (αργά)

Μέθοδος σταθερού σημείου.

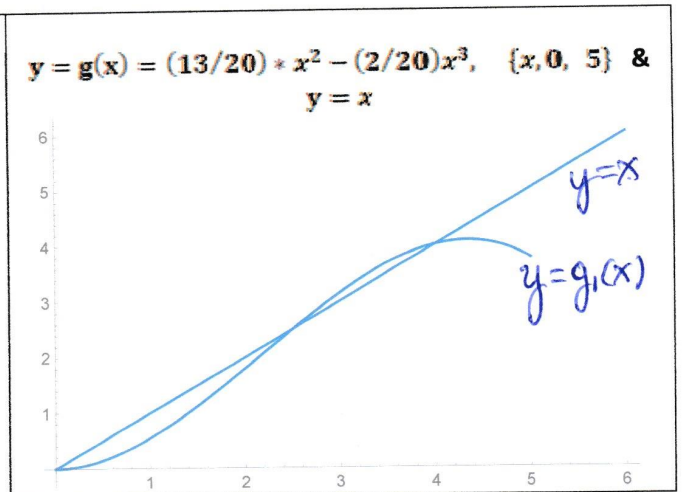
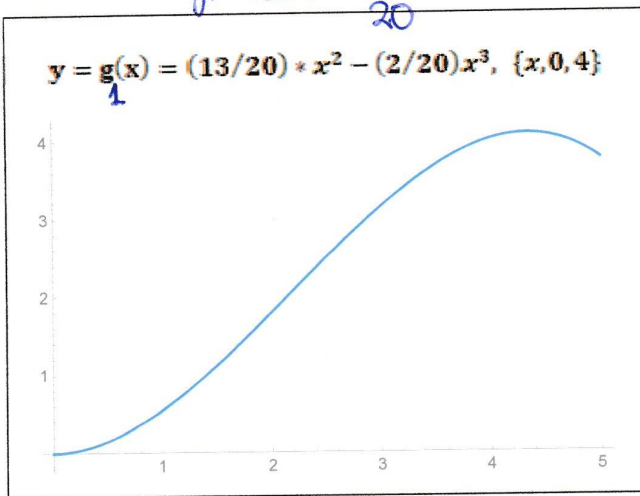
1) (γ) (ii)



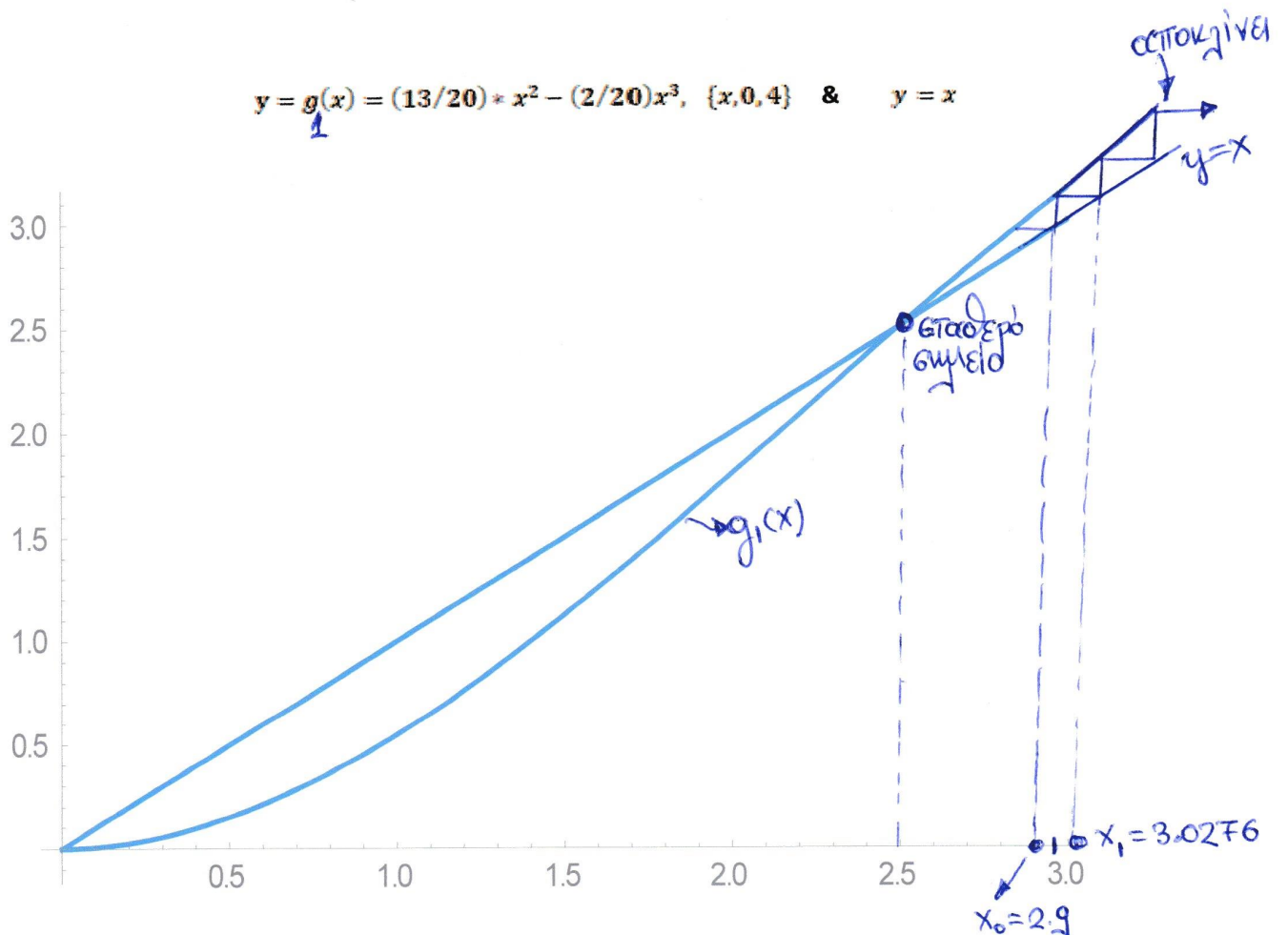
Παραζήτηση (μέθοδος σταθερού σημείου)

4/4

$$g_1(x) = \frac{13x^2 - 2x^3}{20}$$



$y = g(x) = (13/20) * x^2 - (2/20)x^3, \{x, 0, 4\}$ & $y = x$



2) Άλλες συναρτήσεις συνάρτησεις $g(x)$ είναι

III) $2x^3 - 13x^2 + 20x = 0 \Rightarrow 13x^2 = 2x^3 + 20x \Rightarrow$ Διαιρώντας με x
 $13x = 2x^2 + 20 \Rightarrow$

$$x = \frac{2}{13}x^2 + \frac{20}{13}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{g_3(x)}$

IV) $2x^3 - 13x^2 + 20x = 0 \Rightarrow 13x^2 = 2x^3 + 20x \Rightarrow$

$$x = \sqrt{\frac{2}{13}x^3 + \frac{20}{13}x}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{g_4(x)}$

δ) Η προσέγγιση της ρίζας με τη βοήθεια της μεθόδου Newton-Raphson, δίνεται από τη σχέση:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \quad k=1,2,3,\dots$$

Εδώ $f(x) = 3 \cdot 2x^2 - 2 \cdot 13x + 20 = 6x^2 - 26x + 20$, $x_0 = 2.9$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2.9 - \frac{f(2.9)}{f'(2.9)} = 2.9 - \frac{2(2.9)^3 - 13 \cdot 2.9^2 + 20 \cdot 2.9}{6 \cdot (2.9)^2 - 26 \cdot (2.9) + 20}$$

$$= 2.38$$

$$x_2 = 2.38 - \frac{f(2.38)}{f'(2.38)} = \dots = 2.49$$

(φαίνεται η μέθοδος να συγκλίνει στη ρίζα / αν συνεχίσουμε ένα ακόμα βήμα:

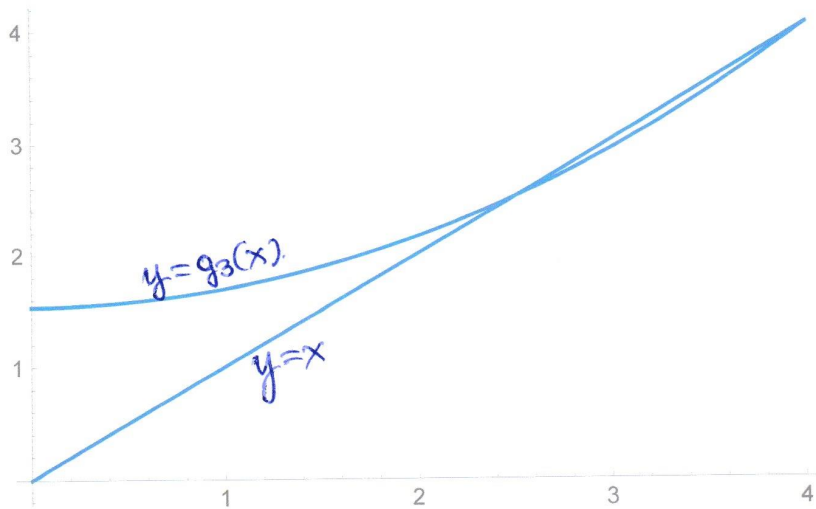
$$x_3 = 2.4999 \approx 2.5 \text{ (ακριβώς) ρίζα})$$

(σταθερό σημείο)

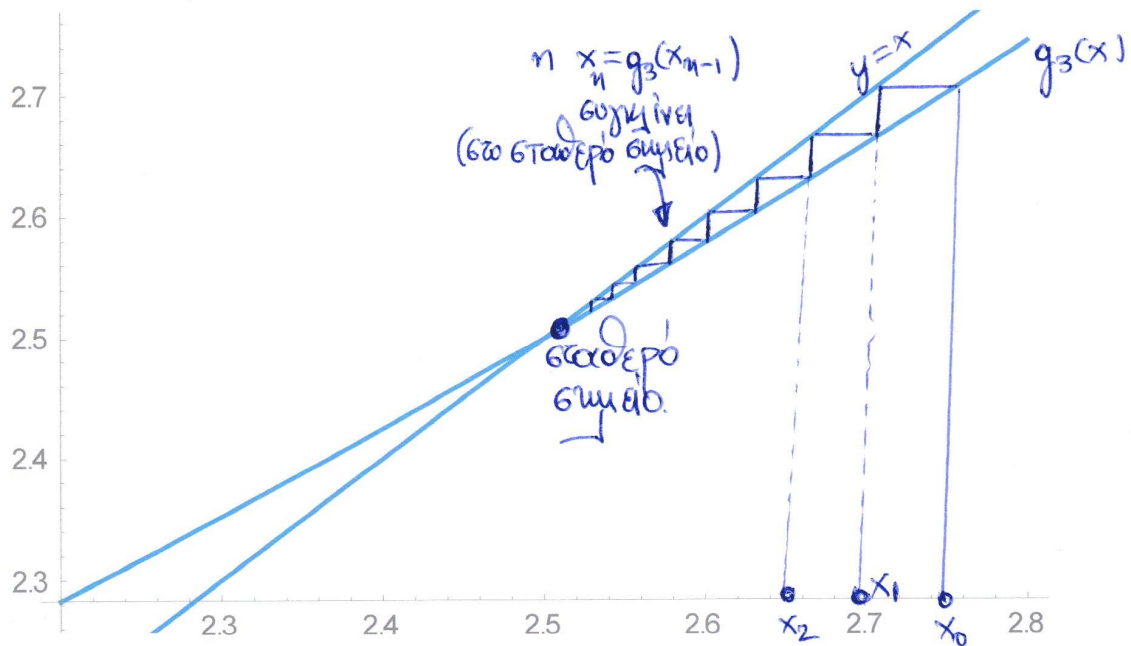
6/6

$$g_3(x) = \frac{2}{13}x^2 + \frac{20}{13}$$

$\left\{ \text{Plot}[(2/13) * x^2 + (20/13), \{x, 2.2, 2.8\}] \right\}$
 $h3 = \text{Plot}[x, \{x, 0, 3.5\}]$



$\text{Plot}[(2/13) * x^2 + (20/13), \{x, 2.2, 2.8\}], \{x, 0, 4\} \text{ \& } y = x$



(Έστω $\alpha = 5$)

2) α) Έχουμε τα δεδομένα:

$x=t$ (χρόνος)	y (πληθυσμός βακτηρίων)	t^2	$\ln y$	$t \ln y$
1	0.5	1	-0.69315	-0.69315
3	5	9	1.6094	4.8283
5	10.5	25	2.3513	11.75688
7	15.5	49	2.74084	19.18588

$n=4$
(πληθός δεδομένων)

Εδώ: $y = A \cdot e^{Bt}$ αρχαριάζοντας $\ln y = \ln(A \cdot e^{Bt}) = \ln A + \ln e^{Bt}$
 $= \ln A + Bt$

Ε' είν $Y = \ln y$ ή $a = \ln A$ τότε

$Y = a + Bt$ χρησιμοποιούμε παραμόρφωση
 οπότε τα a, B υπολογίζονται από τη μέση του συστήματος:

$$\left. \begin{aligned} a \cdot n + \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) B &= \sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n \ln y_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^n t_i + \left(\sum_{i=1}^n t_i^2 \right) B &= \sum_{i=1}^n t_i Y_i = \sum_{i=1}^n t_i \ln y_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} 4a + 16B &= 6.008506 \\ 16a + 84B &= 35.07792 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -0.706653, B = 0.5522$$

ή $A = e^{-0.706653} \approx 0.4933$

Άρα $y = 0.4933 e^{0.5522 \cdot t}$ η πυκνότητα εκδοσίμων
καμπύλη

Ο αριθμός των βακτηρίων τη χρονική στιγμή $t=5$
 είναι:

$$y = 0.4933 e^{0.5522 \cdot 5} \approx 7.8 \text{ (χιλιάδες)}$$

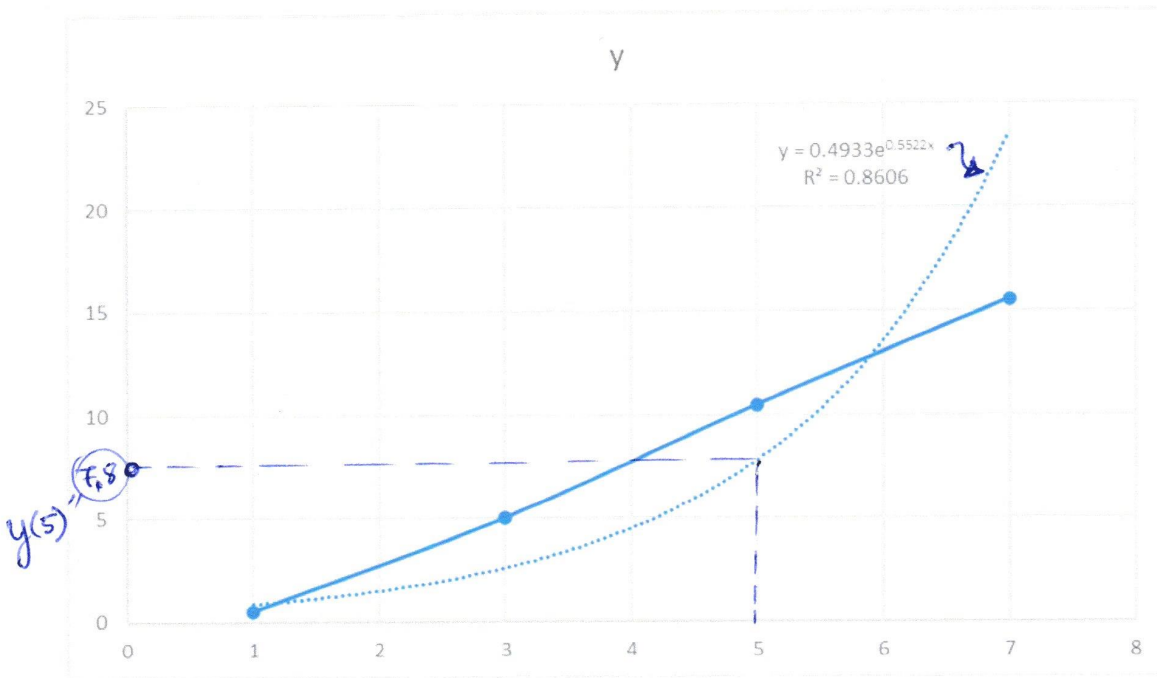
καμπύλη
 $y = A \cdot e^{Bt}$

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΙΣΗ

t	y	t^2	lny	t lny
1	0.5	1	-0.69315	-0.69315
3	5	9	1.609438	4.828314
5	10.5	25	2.351375	11.75688
7	15.5	49	2.74084	19.18588

ΣΥΝΟΛΑ	16	31.5	84	6.008506	35.07792
--------	----	------	----	----------	----------

$\sum t$ $\sum y$ $\sum t^2$ $\sum \ln y$ $\sum t \ln y$



• → δεδομένα.

είναι φθίνουσα στο διάστημα $(1,5)$, $\max_{x \in (1,5)} |f'(x)| = f'(1)$ (4) $\frac{1}{12}$
 $= 2520 \cdot \frac{1}{18} = 2520$

Τέλος $n \geq \left(\frac{45}{180} \cdot 10^3 \cdot 2520 \right)^{1/4} = 61,53$ δηλ 62 διαβάσματα ή 16000 ανάμειξη 63 σημεία.

(4) (α) Δίνονται τα σημεία $(1, 1.1)$, $(3, 2)$ ή $(5, 4.3)$ (Έστω $AM/\alpha = 2$)

(I) Lagrange:

χρησιμοποιούμε τον παρακάτω πίνακα

	$x_0=1$	$x_1=3$	$x_2=5$	
$x_0=1$	$x-x_0$	$1-3=-2$	$1-5=-4$	$\pi_0=(-2)(-4)(x-1)$
$x_1=3$	$3-1=2$	$x-x_1=x-3$	$3-5=-2$	$\pi_1=(-2)2(x-2)$
$x_2=5$	$5-1=4$	$5-3=2$	$x-x_2$	$\pi_2=2 \cdot 4(x-5)$
				$\pi_3=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ $=(x-1)(x-3)(x-5)$

Το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange:

$$\begin{aligned}
 L_2(x) &= \frac{\pi_3}{\pi_0} y_0^{1.1} + \frac{\pi_3}{\pi_1} y_1^2 + \frac{\pi_3}{\pi_2} y_2^{4.3} = \\
 &= \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{8(x-1)} 1.1 + \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{-4(x-3)} 2 + \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{8(x-5)} 4.3 = \\
 &= \dots = 0.175x^2 - 0.25x + 1.175
 \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις με την εξέταση οι παρατηρήσεις διαφέρουν

$x_0 = 1$	$f(x)$	α_0
	1.1	α_1
$x_1 = 3$	2	$f[x_0, x_1] = \frac{2 - 1.1}{3 - 1} = 0.45$
$x_2 = 5$	4.3	$f[x_1, x_2] = \frac{4.3 - 2}{5 - 3} = 1.15$
$x_3 = 7$	8.2	$f[x_2, x_3] = \frac{8.2 - 4.3}{7 - 5} = 1.95$
$x_4 = 10$	1	$f[x_3, x_4] = \frac{1 - 8.2}{10 - 7} = -2.4$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1.15 - 0.45}{5 - 1} = 0.175$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{1.95 - 1.15}{7 - 3} = 0.2$$

$$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{-2.4 - 1.95}{10 - 5} = -0.87$$

$$f[x_0, x_3] = \frac{0.2 - 0.175}{7 - 1} = 0.0042$$

$$f[x_1, x_4] = \frac{-0.87 - 0.2}{10 - 3} = -0.1528$$

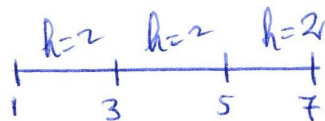
$$f[x_0, x_4] = \frac{-0.1528 - 0.0042}{10 - 1} = -0.0174$$

α II Προβλημα παραβολής Newton, στα σημεία $(1, 1.1), (3, 2), (5, 4.3)$:

$$P_2(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)(x - x_1) = 1.1 + 0.45(x - 1) + 0.175(x - 1)(x - 3) \Rightarrow$$

$$P_2(x) = 0.175x^2 - 0.25x + 1.175$$

1/8



8/14

6 (i) ~~$f'(3) \approx \frac{f(5) - f(3)}{2} = \frac{4.3 - 2}{2} = 1.15$~~

~~$f'(5) \approx \frac{f(7) - f(3)}{4} = \frac{8.2 - 4.3}{4} = 0.975$~~

~~η $f''(5)$ με τη βοήθεια των πέντε εμπεδισμένων διαφορών δεν υπολογίζεται~~

(ii) $P_2(x) = 0.175x^2 - 0.25x + 1.175 \Rightarrow$

$f'(x) \approx P_2'(x) = 2 \cdot 0.175x - 0.25 = 0.35x - 0.25$

$f'(3) \approx P_2'(3) = 3 \cdot 0.35 - 0.25 = 0.8$

$f''(x) = 0.35 \Rightarrow f''(5) = 0.35$

7 Συμπληρώσαμε τον πίνακα των διαμεμένων διαφορών του (α) (II) (αυτό με κόκκινο χρώμα). Το χρησιμοποιούμε το πολυώνυμο Newton έτσι:

$$P_4(x) = \underbrace{P_2(x)}_{(a)} + \alpha_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \alpha_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$= 0.175x^2 - 0.25x + 1.175 + 0.0042(x-1)(x-3)(x-5) +$$

$$(-0.1528)(x-1)(x-3)(x-5)(x-7) = \dots$$

Παρατήρηση (για 6(i))

είναι γνωστό ότι (προς τα εμπρός διαφορές)

~~$f''(x_0) = \frac{f(x_0+2h) - 2f(x_0+h) + f(x_0)}{h^2}$ εδώ $h=2$~~

~~οπότε $f''(5) = \frac{f(9) - 2f(7) + f(5)}{2^2}$ αφού το $f(9)$ δεν δίνεται.~~