

Αριθμητικές Μέθοδοι στην Περιβαλλοντική Μηχανική

Διδάσκων: Τρύφων Δάρας

ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ-ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ – Εντολές MATLAB

Παράδειγμα 1.

Θα θέλαμε να ξέρουμε ένα υπάρχει σχέση ανάμεσα στην ταχύτητα ενός αυτοκινήτου (miles/hour) και την απόσταση (miles) που διανύει μ' ένα gallon βενζίνης. Τα δεδομένα για 13 διαφορετικές ταχύτητες φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα.

Ταχύτητα (miles/hour)	Απόσταση (miles/gallon)
15	22,3
20	25,5
25	27,5
30	29
35	28,8
40	30
45	29,9
50	30,2
55	30,4
60	28,8
65	27,4
70	25,3
75	23,3

Να προσαρμοστεί στα δεδομένα (με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων):

(I) μια ευθεία παλινδρόμησης (γραμμικό μοντέλο)

(II) πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού

(III) ένα εκθετικό μοντέλο

(IV) ένα γεωμετρικό μοντέλο

Λύση

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ (ΕΥΘΕΙΑ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ)

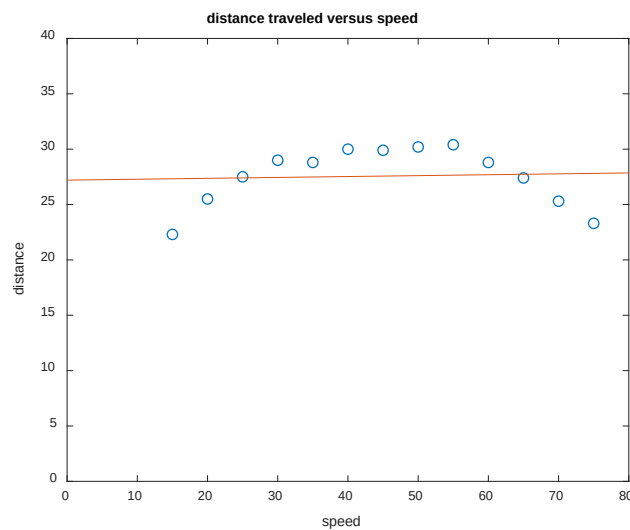
```
>> x=[15:5:75];  
>> y=[22.3 25.5 27.5 29 28.8 30 29.9 30.2 30.4 28.8 27.4 25.3 23.3];  
>> n=length(x);  
>> xy=x.*y;  
>> x2=x.*x;  
>> Sx=sum(x);  
>> Sy=sum(y);  
>> Sx2=sum(x2);  
>> Sxy=sum(xy);  
>> A=[n Sx; Sx Sx2];  
>> b=[Sy Sxy]';  
>> ab=(A\b)'
```

ab =27.2033 0.0081 ← Αποτελέσματα MATLAB (δηλαδή ευθεία παλινδρόμησης

$$y = 27.2034 + 0.00813 \cdot x$$

(Γιά διάγραμμα διασποράς και ευθεία παλινδρόμησης)

```
>> f = @(x) (ab(2).*x + ab(1))  
f = function_handle with value:  
@(x)(ab(2).*x+ab(1))  
>> xf=0:5:80;yf=f(xf);  
>> plot(x,y,'o',xf,yf)  
>> xlabel('speed');ylabel('distance');title('distance traveled versus speed')  
>> axis([0, 80, 0, 40])
```



ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

```
>> x=[15:5:75];  
>> y=[22.3 25.5 27.5 29 28.8 30 29.9 30.2 30.4 28.8 27.4 25.3 23.3];  
>> n=length(x);  
>> xy=x.*y;  
>> x2=x.*x;  
>> x3=x.*x2;  
>> x4=x.*x3;  
>> Sx=sum(x);  
>> Sx2=sum(x2);  
>> Sx3=sum(x3);  
>> Sx4=sum(x4);  
>> Sy=sum(y);  
>> x2y=x2.*y  
>> x2y=x2.*y;
```

```
>> Sxy=sum(xy);
>> Sx2y=sum(x2y);
>> A=[n Sx Sx2; Sx Sx2, Sx3; Sx2 Sx3 Sx4];
>> b=[Sy Sxy Sx2y]';
>> ab=(A\b)'
```

ab = 13.4686 0.7461 -0.0082 ← Αποτελέσματα MATLAB

(δηλαδή πολώνυμο 2^{ου} βαθμού $y = 13.4686 + 0.746114 \cdot x - 0.0081998 \cdot x^2$)

(Γιά διάγραμμα διασποράς και ευθεία παλινδρόμησης)

```
>> f = @(x) (ab(3).*x.*x + ab(2).*x+ab(1))
```

f=function_handle with value:

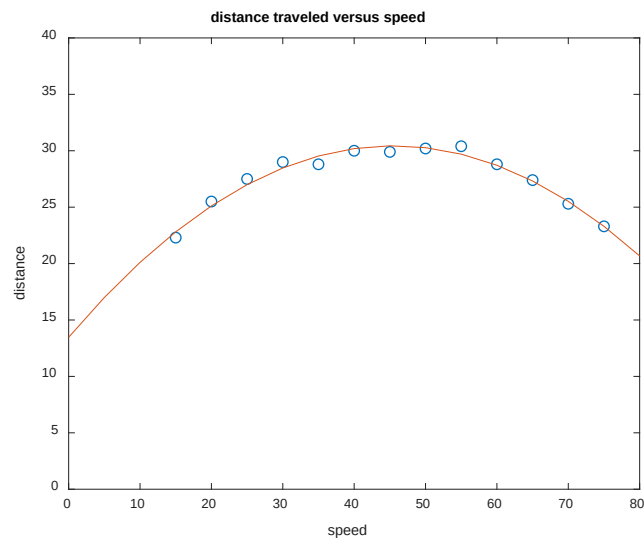
```
@(x)(ab(3).*x.*x+ab(2).*x+ab(1))
```

```
>> xf=0:5:80;yf=f(xf);
```

```
>> plot(x,y,'o',xf,yf)
```

```
>> xlabel('speed');ylabel('distance');title('distance traveled versus speed')
```

```
>> axis([0, 80, 0, 40])
```



Παράδειγμα 2.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x+1}$ και τα σημεία της (0,1), (3,2) και (8,1).

(α) Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής (I) Lagrange (II) Newton στα εν λόγω σημεία.

(β) Να βρεθεί ο πολυώνυμο Taylor στο σημείο $x=3$.

(γ) να βρεθεί η φυσική κυβική spline που παρεμβάλλεται της $f(x)$ στα εν λόγω σημεία.

(δ) Να εκτιμηθεί η τιμή $\sqrt{3.9}$ με τη βοήθεια καθενός από τα παραπάνω πολυώνυμα.

(ε) Εάν η ακριβής τιμή της $\sqrt{3.9}=1.97484176$ να βρεθεί το σφάλμα σε κάθε μια από τις περιπτώσεις του (δ).

Λύση

Εντολές MATLAB για το (δ)

Lagrange

```
>> x=[0 3 8];  
>> y=[1 2 3];  
>> n=length(x)-1;  
>> xp=2.9;  
>> sm=0;  
>> for i=1:n+1  
pr=1;  
for j=1:n+1  
if j~=i  
pr=pr*(xp-x(j))/(x(i)-x(j));  
end  
end  
sm=sm+y(i)*pr;  
end  
>> yp=sm
```

yp = 1.9715 ← Αποτελέσματα MATLAB (εκτίμηση $\sqrt{3.9}$)

Newton

```
>> x=[0 3 8];
>> y=[1 2 3];
>> n=length(x);
>> a(1)=y(1)
>> xx=2.9;
>> for k=1:n-1
d(k,1)=(y(k+1)-y(k))/(x(k+1)-x(k));
end
>> for j=2:n-1
for k=1:n-j
d(k,j)=(d(k+1,j-1)-d(k,j-1))/(x(k+1)-x(k));
end
end
>> d
d =
    0.3333   -0.0444
    0.2000         0
>> for j=2:n
a(j)=d(1,j-1);
end
>> Df(1)=1
>> c(1)=a(1);
>> for j=2:n
Df(j)=(xx-x(j-1)).*Df(j-1);
c(j)=a(j).*Df(j);
end
>> fp=sum(c)
```

fp = 1.9796 ← Αποτελέσματα MATLAB (εκτίμηση $\sqrt{3.9}$)

Taylor

```
>> syms x
```

```
>> h=sqrt(x+1)
```

$$h = (x + 1)^{(1/2)}$$

```
>> t = taylor(h, 'ExpansionPoint', 3, 'Order', 3)
```

```
t = x/4 - (x - 3)^2 /64 + 5/4 ← Αποτελέσματα MATLAB ( πολυώνυμο Taylor 2ου βαθμού)
```

```
>> 2.9/4 - ((2.9-3)^2)/64+(5/4)
```

```
ans = 1.9748 ← Αποτελέσματα MATLAB (εκτίμηση  $\sqrt{3.9}$  )
```

Κυβική spline

```
>> x=[0 3 8];
```

```
>> y=sqrt(x+1);
```

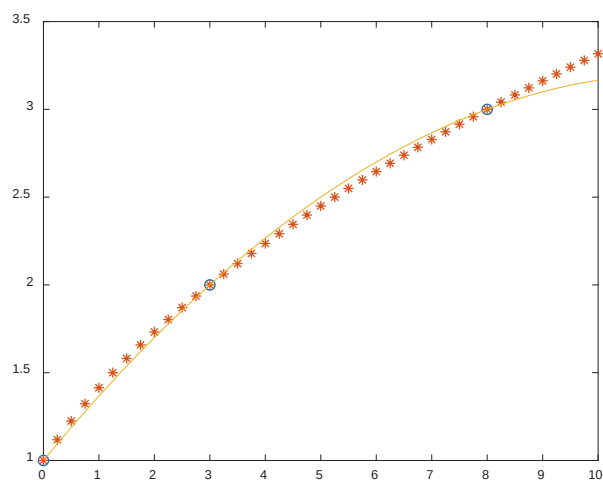
```
>> f=@(x) (sqrt(x+1));
```

```
>> xx=0:.25:10;
```

```
>> yy=spline(x,y,xx);
```

```
>> yp=f(xx);
```

```
>> plot(x,y,'o',xx,yp,'*', xx,yy)
```



```
>> ypp=spline(x,y,2.9)
```

```
ypp = 1.9715 ← Αποτελέσματα MATLAB (εκτίμηση  $\sqrt{3.9}$  )
```