

Ασκήσεις bonus 2020-21

Προσοχή: στα παρακάτω θέματα όπου εμφανίζονται τα γράμματα α , β σημαίνουν:
 α = το προτελευταίο και β = το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σου
Εάν κάποιο από αυτά είναι 0, χρησιμοποιείτε αντί γι αυτό τον αριθμό 4

Άσκηση 1

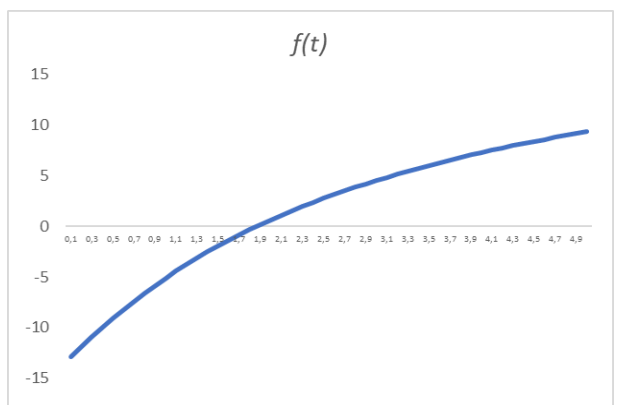
Η θερμοκρασία $\Theta(t)^\circ\text{C}$ ενός δωματίου, t ώρες μετά την έναρξη λειτουργίας ενός θερμαντικού σώματος, δίνεται από την εξίσωση:

$$\Theta(t) = t + 26 - 20e^{-0.5t}, \quad t \geq 0.$$

Το θερμαντικό σώμα σταματά να λειτουργεί (προσωρινά) τη χρονική στιγμή t_σ που η θερμοκρασία του δωματίου θα φτάσει τους 20°C . Θέλουμε να εκτιμήσουμε τη χρονική αυτή στιγμή t_σ .

(Υπόδειξη: βρείτε ρίζα της εξίσωσης $f(t) = t + 26 - 20e^{-0.5t} - 20$ (γιατί;)

Δίνεται ακόμα το γράφημα της συνάρτησης $y = f(t)$



Να δοθεί μια εκτίμηση t_σ^* της ζητούμενης χρονικής στιγμής t_σ με τη βοήθεια:

(α) της μεθόδου της διχοτόμησης, χρησιμοποιώντας 2 (πρώτες) προσεγγίσεις της μεθόδου (επιλέξτε κατάλληλο διάστημα για την εφαρμογή της μεθόδου με τη βοήθεια του γραφήματος).

Πόσα βήματα απαιτούνται, με τη μέθοδο της διχοτόμησης, για την προσέγγιση t_σ^* του t_σ με σφάλμα $10^{-\beta}$;

(β) της μεθόδου Newton - Raphson χρησιμοποιώντας 2 (πρώτες) προσεγγίσεις (επιλέξτε κατάλληλη αρχική εκτίμηση για το t_σ). Συγκλίνει η μέθοδος στο ζητούμενο t_σ (ρίζα της $f(t) = 0$);

(γ) της μεθόδου εσφαλμένης θέσης, χρησιμοποιώντας 2 (πρώτες) προσεγγίσεις (επιλέξτε κατάλληλο διάστημα για την εφαρμογή της μεθόδου). Ποια μέθοδος συγκλίνει

- γρηγορότερα στη ρίζα t_σ της εξίσωσης $f(t)=0$, η μέθοδος της διχοτόμου ή της εσφαλμένης θέσης;
- (δ) της μεθόδου της τέμνουσας χρησιμοποιώντας 2 προσεγγίσεις (επιλέξτε κατάλληλες αρχικές τιμές για την εφαρμογή της μεθόδου). Συγκλίνει η μέθοδος στο ζητούμενο t_σ ;
- (ε) για την προσέγγιση της παραπάνω ρίζας t_σ , κατασκευάστε 2 μεθόδους σταθερού σημείου ($x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$). Χρησιμοποιείτε μια από τις σχέσεις (συναρτήσεις) και τη μέθοδο του σταθερού σημείου για τον υπολογισμό του ζητούμενου t_σ (επιλέξτε κατάλληλη αρχική εκτίμηση για το t_σ). Συγκλίνει η μέθοδος στη ρίζα t_σ της $f(t)=0$;

Άσκηση 2

Κατά τη διάρκεια μιάς ανασκαφής, έρχονται στο φως ένας αριθμός από ανθρώπινους σκελετούς. Ο υπεύθυνος για την ανασκαφή αρχαιολόγος/ανθρωπολόγος θα ήθελε να γνωρίζει αν υπάρχει σχέση ανάμεσα στο μήκος του μετακαρπίου οστού IV (κόκκινο οστό στο παρακάτω σχήμα) κάθε σκελετού (ατόμου) και το ύψος του ατόμου στον οποίο ανήκει ο σκελετός.



Μετακάρπιο οστό είναι ένα από τα 5 οστά που, σε κάθε χέρι τοποθετούνται μεταξύ των καρπικών οστών και των κοντινών τους φαλαγγών κάθε δακτύλου.

Αποτελέσματα από τις μετρήσεις των μετακαρπίων οστών και του ύψους των ατόμων/σκελετών φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Μήκος μετακαρπίου οστού (σε mm)	Ύψος ατόμου (cm)
45	171
51	178
39	157
41	163
48	172
49	18α
46	173
43	175
47	173

← αν α=3, ύψος 183

- (α) Να κατασκευαστεί *διάγραμμα διασποράς* για τα δεδομένα (μπορείτε π.χ. να χρησιμοποιήσετε Excel). Τι μπορείτε να πείτε κοιτάζοντας το διάγραμμα, υπάρχει σχέση ανάμεσα στο μήκος του μετακαρπίου οστού IV του σκελετού (ατόμου) και το ύψος του ατόμου (σκελετού); Τι είδους; Εξηγήστε.

- (β) Να προσαρμοστεί στα δεδομένα (με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων):
- (I) μια ευθεία παλινδρόμησης (γραμμικό μοντέλο) ($y = a_0 + a_1 t$)
- (II) ένα εκθετικό μοντέλο ($y = a_0 e^{a_1 t}$)
- (να γραφούν **αναλυτικά** οι πράξεις και ο τρόπος προσδιορισμού των μοντέλων).
- (γ) Ποιο από τα μοντέλα του (β) προσαρμόζετε καλύτερα στα δεδομένα και γιατί;
Να γίνει κατάταξη προτίμησης των μοντέλων (ανάλογα με την καταλληλότητα προσαρμογής) και να δικαιολογηθεί η εν λόγω κατάταξη.
- (δ) Να εκτιμηθεί με τη βοήθεια των μοντέλων το ύψος ενός ατόμου, ένα το μήκος του μετακάρπιου οστού του είναι 44mm. Πόσο είναι το ύψος του στην περίπτωση που το μήκος είναι 53mm;
- (ε) Να γίνει επαλήθευση των μοντέλων του (β)(I) και (II) με τη βοήθεια της MATLAB (να δοθούν αναλυτικά οι εντολές και τ' αποτελέσματα που δίνει το πρόγραμμα).

Άσκηση 3

Ο πληθυσμός των ζώων μιάς περιοχής μειώνεται με το πέρασμα του χρόνου. Τα αποτελέσματα μετρήσεων αναφορικά με τον πληθυσμό αυτό παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Χρόνος t (σε χρόνια)	Πληθυσμός $N(t)$ (σε εκατ.)
0	10α
5	88
10	7β

← αν $\alpha=3$, πληθυσμός 103

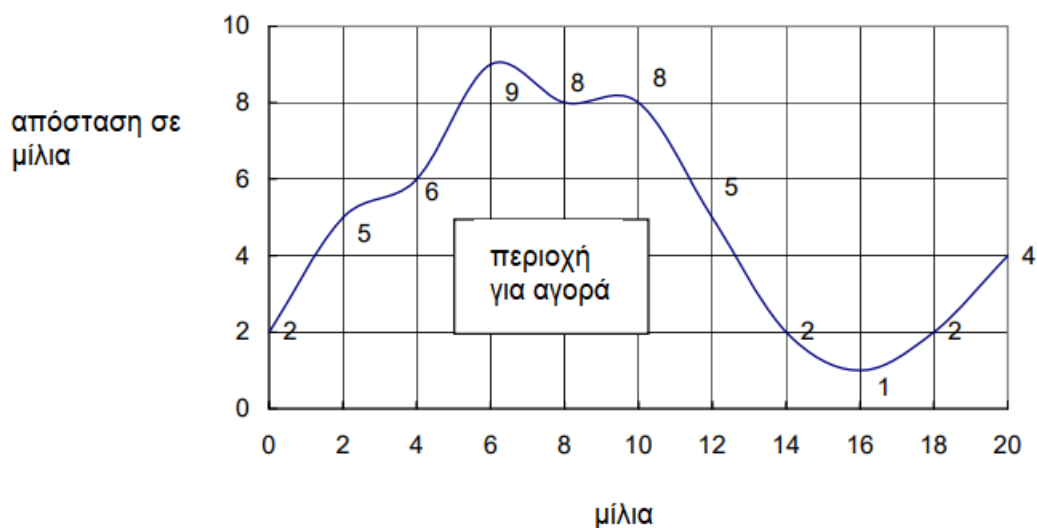
← αν $\beta=3$, πληθυσμός 73

- (α) Θέλουμε να εκτιμήσουμε τον πληθυσμό των ζώων τη χρονική στιγμή $t = 9$ χρόνια. Η εκτίμηση αυτή να γίνει με τη βοήθεια:
- (I) του πολωνύμου παρεμβολής Lagrange (στα παραπάνω σημεία)
- (II) του πολωνύμου παρεμβολής Newton
- (III) της τετραγωνικής spline $s_2(t)$ που παρεμβάλλεται της $N(t)$ στα παραπάνω σημεία και ικανοποιεί τη σχέση $s_2'(0) = \beta$. (να γραφούν **αναλυτικά** οι πράξεις).
- (β) Να συγκριθούν οι προσεγγιστικές τιμές του (α), με την πραγματική τιμή του πληθυσμού τη χρονική στιγμή $t = 9$ χρόνια, εάν είναι γνωστό ότι το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει το (πραγματικό) μέγεθος του πληθυσμού είναι $N(t) = \frac{300}{2 + e^{0,06t}}$
- Η σύγκριση να γίνει δίνοντας το απόλυτο σχετικό σφάλμα σε κάθε μιά από τις περιπτώσεις. Ποια από τις εκτιμήσεις προτιμάτε;
- (γ) Να εκτιμηθεί ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού τη χρονική στιγμή $t = 5$ χρόνια.
- (δ) Να επαληθευτούν οι εκτιμήσεις του πληθυσμού σε κάθε μια από τις περιπτώσεις του α(I) και (II), με τη βοήθεια της MATLAB. (να δοθούν αναλυτικά οι εντολές και τ' αποτελέσματα που δίνει το πρόγραμμα).

Άσκηση 4

Ένα τμήμα εθνικής οδού κατασκευάζεται και σύμφωνα με το σχεδιασμό του θα διασχίσει μέρος ιδιοκτησιών μιάς περιοχής (δείτε το παρακάτω σχήμα). Η πολιτεία πρόκειται να

αγοράσει (αποζημιώσει) το μέρος της περιοχής που βρίσκεται νότια (κάτω) της εθνικής οδού. Θα θέλαμε να εκτιμήσουμε το εμβαδόν της περιοχής που πρόκειται να αγοραστεί.



Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής που πρόκειται να αγοραστεί με χρήση:

(α) του σύνθετου κανόνα του τραπεζίου με τη βοήθεια:

- (i) 10 διαστημάτων ίσου μήκους και
- (ii) 5 διαστημάτων ίσου μήκους.

(β) του σύνθετου κανόνα $1/3$ του Simpson με τη βοήθεια 11 σημείων που ισαπέχουν.

(γ) Ποια η κλίση της εθνικής οδού, 10 μίλια δεξιά από την αρχή του τμήματος της οδού. Ο υπολογισμός να γίνει με τη βοήθεια (i) προς τα εμπρός (ii) κεντρικών και (iii) προς τα πίσω διαφορών.

(δ) Είναι δυνατόν να παραστήσουμε το περίγραμμα της εθνικής οδού (μπλε γραμμή) με τη βοήθεια μιάς συνάρτησης/πολυωνύμου. Πως; (μην υπολογίσετε τη συνάρτηση/πολυώνυμο/ απλά δικαιολογήστε την απάντησή σας). Είναι καλή η αναπαράσταση αυτή; Πως υπολογίζετε σε αυτή τη περίπτωση το εμβαδόν της περιοχής που πρόκειται να αγοραστεί;

(ε) Τα αποτελέσματα των (α) και (β) να επαληθευτούν με τη βοήθεια της MATLAB.

Καλή επιτυχία