

Επίλυση προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ) 1^{ης} τάξης

Μία βασική κατηγορία προβλημάτων που αντιμετωπίζει κανείς καθημερινά, είναι αυτά που αφορούν το ρυθμό μεταβολής μιας ποσότητας (εξαρτημένης μεταβλητής) $y(x)$ σε σχέση με μία (ανεξαρτητική) μεταβλητή x . Τα προβλήματα αυτά μοντελοποιούνται (μαθηματικά) με τη βοήθεια παραγώγων/παραγώγων της άγνωστης συνάρτησης ή οι εξισώσεις που προκύπτουν καλούνται (συνήθως) διαφορικές εξισώσεις. Μία (συνήθως) διαφορική εξίσωση n -οστής τάξης είναι μία εξίσωση που περιέχει τη μεταβλητή x ή παραγώγους μιας (άγνωστης) συνάρτησης $y(x)$ μέχρι n -οστής τάξης (δηλ. κάποιες/όλες, από τις $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)$). Δηλ. $\exists F$ τ.ω:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \quad (*) \quad \text{πετυχημένη μορφή.}$$

Αν η $F(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$ μπορεί να γράφει ως προς την $y^{(n)}(x)$ τότε η μορφή:

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad \text{καλείται γυμνή μορφή.}$$

Λύση της διαφορικής εξίσωσης (*) καλείται μία συνάρτηση $y=y(x)$ η φορές παραγωγίσιμη, η οποία ικανοποιεί την (*).
Σ' ότι ακολουθεί, ενδιαφερόμαστε για διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης δηλ. για εξισώσεις της μορφής

$$y' = f(x, y), \quad a \leq x \leq b. \quad (f = \text{γνωστή συνάρτηση})$$

Η (γενική) λύση μιας τέτοιας δ.ε. εξαρτάται (εφ' όσον υπάρχει) από μία άγνωστη σταθερά C (άπειρες λύσεις). Πολλές φορές ενδιαφερόμαστε για μία (συγκεκριμένη) λύση που ικανοποιεί μία (δεδομένη) συνθήκη: $y(a) = y_0$.
Το πρόβλημα:
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad a \leq x \leq b$$

(δίν. επίλυσης της δ.ε. έτσι ώστε η λύση να ικανοποιεί τη συνθήκη αναγκάζεται πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ / initial value problem).

Μόνο ένας μικρός αριθμός συνήθων διαφορικών εξισώσεων μπορεί να λυθεί αναλυτικά (δίν. να γίνει γνωστός ο τύπος της, $y = y(x)$ λύσης). Σ' αρκετές όμως περιπτώσεις, μπορούμε με τη βοήθεια αριθμητικών μεθόδων (όπως αυτές που θ' αναπτύξουμε παρακάτω) να υπολογίσουμε προσεγγιστικές λύσεις. Ιδιαίτερα, επειδή πολλές φορές μας ενδιαφέρει η λύση μίας β.δ.ε. σε συγκεκριμένα σημεία, μπορούμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικές τιμές της λύσης στα σημεία αυτά.

Παρατήρηση

Πριν προσπαθήσει να λύσει κανείς ένα Π.Α.Τ, προσεγγιστικά, θα ήθελε να γνωρίζει αν το εν λόγω πρόβλημα έχει λύση ή όχι, ή αν η λύση αυτή είναι μοναδική. Αυτό γιατί, στις "Αριθμητικές μεθόδους" οι λύσεις προβλημάτων (που δεν λύνονται ή) δεν λύνονται μοναδικά είναι δύσκολο να προσεγγιστούν αριθμητικά. Αναφέρουμε παρακάτω δύο συνθήκες, ικανές, για την ύπαρξη ή το μοναδικότητα της λύσης ενός Π.Α.Τ.

Ορισμός

Έστω $f(x, y) \mid (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$. Η $f(x, y)$ ικανοποιεί μία συνθήκη Lipschitz (ως προς y), στο D αν υπάρχει $L > 0$ τ.ω. $\forall (x, y_1), (x, y_2) \in D$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad (L = \text{σταθερά Lipschitz})$$

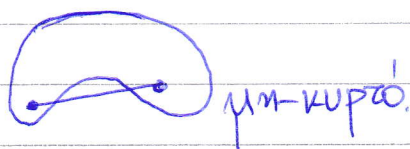
Παράδειγμα

Η $f(x, y) = y \cos x$, $(x, y) \in D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, -\infty < y < +\infty\}$ ικανοποιεί μία συνθήκη Lipschitz, γιατί:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |y_1 \cos x - y_2 \cos x| = |y_1 - y_2| \cdot \overbrace{|\cos x|}^{\leq 1} \leq \underbrace{1}_L |y_1 - y_2|$$

Ορισμός

Ένα σύνολο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ καλείται κυρτό (convex), αν για κάθε ζεύγος σημείων του συνόλου, το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία αυτά, ανήκει επίσης στο σύνολο.



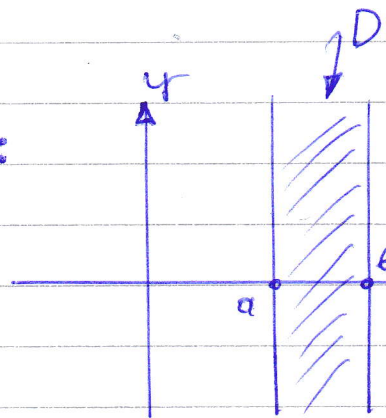
Μαθηματικά: $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$, το σημείο $((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2)$ ανήκει στο $D \quad \forall \lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$.

Παρατήρηση

Στα Π.Α.Τ. θεωρούμε σύνολα της μορφής:

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty\}$$

που είναι προφανώς κυρτά.



Πρόταση

Έστω ότι η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι ορισμένη σε ένα κυρτό σύνολο $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Αν $\exists L > 0$ τ.ω:

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq L \quad \forall (x, y) \in D$$

τότε, η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz στο D (ως προς y).

Παράδειγμα (συνέχεια)

Εάν $f(x, y) = y \cos x$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, -\infty < y < +\infty\}$, τότε:

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial y} (y \cos x) \right| = |\cos x| \leq \textcircled{1} = 1$$

Επομένως, η $f(x,y)=y \cos x$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz (ως προς y) με $L=1$

Θεώρημα (ύπαρξης ή μοναδικότητας λύσης Π.Α.Τ.)
Έστω η $f(x,y)$ είναι ορισμένη ή συνεχής στο $D=\{(x,y) \mid \alpha \leq x \leq \beta, -\infty < y < +\infty\}$.

Αν η $f(x,y)$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz στο D , ως προς y , τότε το Π.Α.Τ.:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(\alpha) = y_0 \end{cases} \quad -\alpha \leq x \leq \beta$$

έχει μοναδική λύση.

Παράδειγμα
Το Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y' = y \cos x \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1$$

έχει μοναδική λύση. Πράγματι, εάν $f(x,y)=y \cos x$, είδαμε προηγουμένως (σε καθενα από τα δύο παραδείγματα) ότι η $f(x,y)$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz (ως προς y) με $L=1$. Το θεώρημα εγγυόμαστε ότι, το Π.Α.Τ. έχει μοναδική λύση.

Παρατήρηση.

Η δ.ε $y' = y \cos x$ είναι χωριζόμενων μεταβλητών. Οπότε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} dy &= \cos x dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \cos x dx \Rightarrow \ln y = \sin x + C \\ &\Rightarrow y(x) = C \cdot e^{\sin x} \end{aligned}$$

Αντίστοιχα:

$$y(0) = 1 = C \cdot e^{\sin 0} = C \Rightarrow C = 1$$

Επομένως, $y(x) = e^{\sin x}$ είναι η (μοναδική) λύση του Π.Α.Τ.

Παρατήρηση (καλά-ορισμένο / well posed).

Ένα 2^ο σημείο που πρέπει να προσέξει κανείς όταν ασχολείται μ' ένα Π.Α. είναι να είναι καλά-ορισμένο: μικρές αλλαγές στο πρόβλημα να συνεπάγονται μικρές αλλαγές στη λύση του. Ο λόγος είναι ο εξής: τα προβλήματα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ) προκύπτουν από την παρατήρηση (πραγματικών) φυσικών φαινομένων (πραγματικά προβλήματα). Κατά την αναστατάσταση του φαινομένου το αρχικό πρόβλημα έχει υποστεί κάποιο είδος "διαταραχής" (όχι ακριβείς μέτρήσεις λόγω οργάνων μέτρησης, "απλοποιήσι" εν μέρει του αρχικού προβλήματος κ.α). Με τη βοήθεια των αριθμητικών μεθόδων προσπαθούμε να λύσουμε το "διαταραγμένο" πρόβλημα (perturbed). Εάν το πρόβλημα είναι καλά ορισμένο, τότε περιμένουμε ότι η αριθμητική λύση του "διαταραγμένου" προβλήματος να προσεγγίζει τη λύση του αρχικού (πραγματικού) προβλήματος.

Ορισμός
το Π.Α.Τ

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & a \leq x \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

είναι καλά-ορισμένο εάν

(i) έχει μοναδική λύση $y = y(t)$.

(ii) $\exists \varepsilon_0 > 0$ ή $\kappa > 0$ τ.ω αν $\varepsilon: \varepsilon_0 > \varepsilon > 0$, τότε
εάν $d(x)$ συνεχής ή $|d(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b]$
ή εάν $|d_0| < \varepsilon$,

το Π.Α.Τ

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = f(x, y) + \underbrace{d(x)}_{\leftarrow \text{εφάλλα (διαταραχή)}} & a \leq x \leq b \\ z(a) = y_0 + \underbrace{d_0}_{\leftarrow \text{εφάλλα (διαταραχή)}} \end{cases}$$

"διαταραγμένο" πρόβλημα

έχει λύση $z = z(x)$ τ.ω

$$|z(x) - y(x)| < \kappa \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$$

Πρόταση.

Εάν $f(x,y)/D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty\}$, ή f ορισμένη στο D και συνεχής εάν η $f(x,y)$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz στο D , ως προς το y , τότε το Π.Α.Τ.:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ a \leq x \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

είναι καλά ορισμένο.

Παράδειγμα.

Το Π.Α.Τ. $\begin{cases} y' = y \cos x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, -\infty < y < +\infty\}$

είναι καλά ορισμένο, αφού όπως είδαμε παραπάνω ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz, ως προς y , με $L=1$.

Παράδειγμα

Δείξτε ότι το Π.Α.Τ.: $\begin{cases} y' = \frac{2}{x}y + x^2 e^x \\ y(1) = 0 \end{cases}$ $1 \leq x \leq 2$

είναι καλά ορισμένο.

Λύση.

Εάν $f(x,y) = \frac{2}{x}y + x^2 e^x$, τότε η f πρέπει να ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz.

1ος Τρόπος

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \left| \frac{2}{x}y_1 + x^2 e^x - \frac{2}{x}y_2 - x^2 e^x \right| = \frac{2}{x} |y_1 - y_2| \quad \Rightarrow$$

Αλλά $x \in [1,2]$, οπότε $\frac{2}{x} \leq \left(\frac{2}{1}\right) = 2$.

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq 2 |y_1 - y_2|$$

Ενν. η $f(x,y)$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz με $L=2$.

2ος τρόπος

$$1 \leq x \leq 2 \quad g(x) = \frac{2}{x} \downarrow$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2}{x} y + x^2 e^x \right) \right| = \left| \frac{2}{x} \right| \leq \frac{2}{1} = 2 = L.$$

άρα, από πρόταση, η $f(x, y)$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz με $L=2$

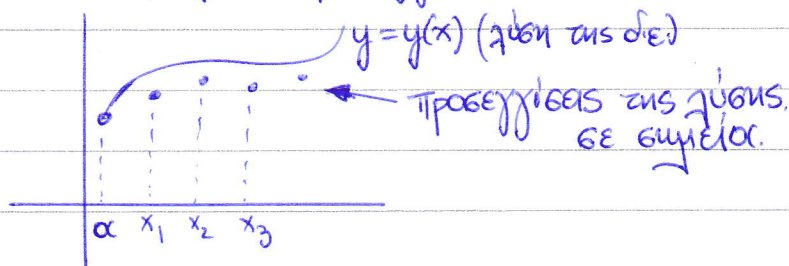
#

Α) Μέθοδος Euler (1^{ης} τάξης)

Π.Α.Τ

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \\ \alpha \leq x \leq \beta \end{cases} \quad y \in \mathbb{R}$$

Η πιο στοιχειώδης μέθοδος επίλυσης ενός Π.Α.Τ είναι η λεγόμενη μέθοδος του Euler (1^{ης} τάξης). Είναι μέθοδος που σπάνια χρησιμοποιείται στην πράξη. Την αναπτύξαμε εδώ, για να γίνει κατανοητός ο τρόπος κατασκευής μεθόδων επίλυσης Π.Α.Τ. Με την μέθοδο, δεν λαμβάνουμε μια συνεχή προσέγγιση της λύσης $y = y(x)$, αλλά προσεγγίσεις της y σε συγκεκριμένα σημεία (κόμβοι). Με τη βοήθειά τους η χρησιμοποίηση παρεμβολής μπορούμε να έχουμε προσέγγιση (συνεχή) της λύσης.



Έστω λοιπόν ότι έχουμε τα σημεία $x_0, x_1, \dots, x_n$ (κόμβοι) η
έστω ότι είναι ισοπέχοντα: $(x_0 = \alpha, x_n = \beta)$

$$x_i = \alpha + i h = \quad i = 0, 1, \dots, n$$

όπου $h = \frac{\beta - \alpha}{n}$ βήμα

Για την κατασκευή της μεθόδου του Euler, θα χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα Taylor για τη συνάρτηση $y = y(x)$ (δηλ. την πραγματική λύση του Π.Α.Τ.).

Έστω λοιπόν ότι η $y = y(x)$ (πραγματική λύση) είναι δύο φορές παραγωγίσιμη (με συνεχείς παραγώγους) στο $[\alpha, \beta]$. Τότε, το ανάπτυγμα Taylor για την $y = y(x)$:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + (x_{i+1} - x_i) y'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} y''(\xi_i)$$

$\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$

Αλλά, $h = x_{i+1} - x_i$ η $y' = f(x, y)$ οπότε $y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$, οπότε

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h f(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_i)$$

Η μέθοδος Euler δίνει τον όρο $\frac{h^2}{2} y''(\xi_i)$ ^{εάν} εφόσον κ' κατασκευάζει εκτιμήσεις y_i των (πραγματικών) τιμών $y(x_i)$, δηλ. $y_i \approx y(x_i)$.
Έχουμε λοιπόν τον αναδρομικό τύπο:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad i=0, \dots, n-1.$$

Παράδειγμα.

Να βρεθεί με τη μέθοδο του Euler, η προσεγγιστική λύση του Π.Α.

$$\begin{cases} y' = y - x \\ y(0) = 2 \\ 0 \leq x \leq 0.5 \end{cases}$$

Ⓘ με $h=0.25$

Ⓜ με $h=0.1$

Λύση.

Εδώ $f(x, y) = y - x$ κ' $\frac{\partial f}{\partial y} = 1 = L$ δηλ. το Π.Α.Τ. έχει μονο
 (η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz με $L=1$) ^{ορισμένο} _{οιμή λύση κ' είναι καλή}

Ⓘ $x_0=0$, $x_1=0+0.25=0.25$ κ' $x_2=0.5$ $y_0=2$

$i=0$ $y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = y_0 + 0.25(y_0 - x_0) = 2 + 0.25(2 - 0) = 2.5$

$i=1$ $y_2 = y_1 + 0.25(y_1 - x_1) = 2.5 + 0.25(2.5 - 0.25) = 3.0625.$

Ⓜ $h=0.1$: $x_0=0$, $x_1=0.1$, $x_2=0.2$, $x_3=0.3$, $x_4=0.4$, $x_5=0.5$

$i=0$ $y_1 = y_0 + h(y_0 - x_0) = 2 + 0.1(2 - 0) = 2.2$

$i=1$ $y_2 = y_1 + h(y_1 - x_1) = 2.2 + 0.1(2.2 - 0.1) = 2.41$

$i=2$ $y_3 = y_2 + h(y_2 - x_2) = 2.41 + 0.1(2.41 - 0.2) = 2.631$

$$i=3: \quad y_4 = y_3 + h(y_3 - x_3) = 2.631 + 0.1(2.631 - 0.3) = 2.864$$

$$i=4: \quad y_5 = y_4 + h(y_4 - x_4) = 2.864 + 0.1(2.864 - 0.4) = 3.110.$$

Παρατήρηση

(I) Ολικό σφάλμα

Σαν ολικό σφάλμα (αποκοπής) στο σημείο x_k ορίζεται

$$|y(x_k) - y_k|$$

όπου $y(x_k)$ η τιμή της (πραγματικής) λύσης στο x_k
 y_k μία προσέγγιση της τιμής αυτής

(II) Τοπικό σφάλμα

Σαν τοπικό σφάλμα (αποκοπής) στο σημείο x_k ορίζουμε:

$$|y(x_k) - \bar{y}_k|$$

όπου $y(x_k)$ η τιμή της (πραγματικής) λύσης στο x_k

$$\bar{y}_k = y(x_{k-1}) + h f(x_{k-1}, y(x_{k-1}))$$

δηλ. η προσέγγιση που προκύπτει από τη μέθοδο Εύλης σ' ένα βήμα, με εκκίνηση το $(x_{k-1}, y(x_{k-1}))$, θεωρώντας ότι γνωρίζουμε την πραγματική τιμή της λύσης $y(x_{k-1})$ στο x_{k-1} (δχι χρήση του (x_{k-1}, y_{k-1})).

Παράδειγμα (συνέχεια)

Στο ΠΑΤ

$$\begin{cases} y' = y - x \\ y(0) = 2 = y_0 \\ 0 \leq x \leq 0.5 \end{cases}$$

Για την (πραγμαστική) λύση: $y' = y - x$ ή $y' - y = -x$ είναι γραμμική 1ης τάξης με $p(x) = -1$ ή $q(x) = -x$.

Εάν $\mu(x) = e^{-\int -1 dx} = e^{-x}$, η γενική λύση:

$$y = \frac{\int \mu(x)q(x)dx + c}{\mu(x)} = \frac{\int -xe^{-x}dx + c}{e^{-x}}$$

Αλλά, $\int -xe^{-x}dx = \int x(e^{-x})'dx = xe^{-x} - \int e^{-x}dx = xe^{-x} + e^{-x} + c$

Άρα:

$$y(x) = \frac{xe^{-x} + e^{-x} + c}{e^{-x}} = x + 1 + ce^x \quad \text{δηλ.} \quad y(x) = x + 1 + ce^x$$

Τώρα: $y(0) = 2 = ce^0 + 0 + 1 \Rightarrow c = 1$.

Τελικά, η (πραγμαστική) λύση του Π.Α.Τ είναι:

$$y(x) = e^x + x + 1$$

Σφάλμα

(i) Εάν $h = 0.1$, το σλικό σφάλμα στο $x_5 = 0.5$ είναι:

$$|y(0.5) - y_5| = |3.148721 - 3.110| \approx 0.038721$$

$$(y(0.5) = e^{0.5} + 0.5 + 1)$$

(ii) Εάν $h = 0.25$, το σλικό σφάλμα στο $x_5 = 0.5$ είναι:

$$|y(0.5) - y_5| = |3.148721 - 3.0625| \approx 0.086221$$

Από (i) ή (ii) βλέπουμε ότι, όσο μικραίνει το h μικραίνει και το σλικό σφάλμα (άρκει το h να μην είναι πολύ μικρό ή εμφανίζονται προβλήματα/σφάλματα στρουχλυοποίησης).

Ακόμα, για το τοπικό σφάλμα στο σημείο $x=0.2$ έχουμε
αφ' $h=0.1$

$$\bar{y}_2 = y(x_1) + h(y(x_1) - x_1) = 2.205171 + 0.1(2.205171 - 0.1) = 2.4156881$$

$$y(x_1) = y(0.1) = e^{0.1} + 0.1 + 1 = 2.205171$$

Άρα, τοπικό σφάλμα στο σημείο $x=0.2$

$$|y(x_2) - \bar{y}_2| = |y(0.2) - \bar{y}_2| = |2.421403 - 2.4156881| = 0.0057149$$

Μέθοδος Taylor 2^{ης} τάξης

$$\text{Π.Α.Τ.} \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(a) = y_0 \\ a \leq x \leq b, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Για να έχουμε ίσως καλύτερες προσεγγίσεις της λύσης ενός Π.Α.Τ. (από εκείνες της μεθόδου του Ευλεία 1^{ης} τάξης), θεωρούμε την εξής γενίκευση

θεωρούμε ότι η λύση $y = y(x)$ του Π.Α.Τ. είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη. Θεωρώντας το ανάπτυγμα Taylor, για την $y = y(x)$, μέχρι 3^{ης} τάξης, έχουμε:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + (x_{i+1} - x_i) y'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} y''(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{3!} y''(\xi)$$

ε' για ισοπέχοντα σημεία $x_i = a + ih$ $i = 0, 1, \dots, n$ $\xi \in (x_i, x_{i+1})$
 $h = \frac{b-a}{n}$

Ανόμε, $y'(x_k) = f(x_k, y_k)$ η'

$$y''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} (y') = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f = f_x + f_y \cdot f$$

↓
κανόνας
αλυσίδας

έχουμε:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h y'(x_i) + \frac{h^2}{2} (f_x(x_i, y(x_i)) + f_y(x_i, y(x_i)) \cdot f(x_i, y(x_i))) + \frac{h^3}{3} y''(\xi)$$

Η μέθοδος Taylor 2^{ης} τάξης, θεωρεί τον όρο $\frac{h^3}{3} y''(\xi)$ ως εφέλα ή κατασκευάζει εκτιμήσεις y_i των (πραγματικών) τιμών $y(x_i)$, δηλ. $y_i \approx y(x_i)$. Έχουμε, λοιπόν, τον αναδρομικό τύπο:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} (f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i) \cdot f(x_i, y_i)) \\ y(a) = y_0. \end{cases}$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η προσεγγιστική λύση του Π.Α.Τ.:

$$\begin{cases} y' = y - x^2 + 1 \\ y(0) = \frac{1}{2} \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

- (α) με τη μέθοδο του Ευλεία κ' $h=0.2$
- (β) με τη μέθοδο Τάιλορ 2^{ης} τάξης κ' $h=0.2$.
- (γ) Να βρεθεί η πραγματική (ακριβής) λύση του Π.Α.Τ.
- (δ) Να υπολογιστούν τα συνολικά σφάλματα στο (α) κ' (β).
Τι παρατηρείτε;

Λύση

Εδώ $f(x,y) = y - x^2 + 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 1 = L$, δηλαδή η $f(x,y)$ ικανοποιεί

ενόηκη Lipschitz με $L=1$, οπότε το παραπάνω Π.Α.Τ. είναι καλά ορισμένο κ' έχει μοναδική λύση.

(α) $h=0.2$ κ' $x_0=0, x_1=0.2, x_2=0.4, \dots, x_{10}=2$.

$$i=0 \quad y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = y_0 + 0.2 (y_0 - x_0^2 + 1) = \frac{1}{2} + 0.2 \left(\frac{1}{2} - 0^2 + 1 \right) = 0.8$$

$$i=1 \quad y_2 = y_1 + 0.2 (y_1 - x_1^2 + 1) = 0.8 + 0.2 (0.8 - 0.2^2 + 1) = 1.152$$

Αντίστοιχα: $y_3 = 1.55040$, $y_4 = 1.98848$, $y_5 = 2.45818$

$$y_6 = 2.94981, \quad y_7 = 3.45177, \quad y_8 = 3.95013$$

$$y_9 = 4.42815, \quad y_{10} = 4.86578$$

(β) Εδώ: $y_{i+1} = y_i + h y' + \frac{h^2}{2} y'' = y_i + h f + \frac{h^2}{2} (f_x + f_y \cdot f)$

$$\text{η } f(x,y) = y - x^2 + 1 \Rightarrow f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = -2x$$

$$f_y = 1$$

Επομένως:

$$y_{i+1} = y_i + 0.2(y_i - x_i^2 + 1) + \frac{h^2}{2} \underbrace{\left(\underbrace{-2x_i}_{f_x} + \underbrace{1}_{f_y} \cdot (y_i - x_i^2 + 1) \right)}_{y_i - x_i^2 - 2x_i + 1}$$

εάν $i=0$:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + 0.2(y_0 - x_0^2 + 1) + \frac{0.2^2}{2}(y_0 - x_0^2 - 2x_0 + 1) \\ &= \frac{1}{2} + 0.2(\frac{1}{2} - 0^2 + 1) + \frac{0.04}{2}(\frac{1}{2} - 0^2 - 2 \cdot 0 + 1) = \dots \approx 0.83 \end{aligned}$$

εάν $i=1$:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + 0.2(y_1 - x_1^2 + 1) + \frac{0.2^2}{2}(y_1 - x_1^2 - 2x_1 + 1) \\ &= 0.83 + 0.2(0.83 - 0.2^2 + 1) + \frac{0.04}{2}(0.83 - 0.2^2 - 2 \cdot 0.2 + 1) = \dots = 1.215 \end{aligned}$$

Ανάλογα:

$y_3 = 1.65208$	$y_4 = 2.13233$	$y_5 = 2.64865$
$y_6 = 3.1935$	$y_7 = 3.74864$	$y_8 = 4.30615$
$y_9 = 4.84630$	$y_{10} = 5.34768$	

(δ) Η $y' = y - x^2 + 1$ ή $y' - y = -x^2 + 1$ γραμμική 1ης τάξης
 ε' εάν $y(x) = e^{\int p(x) dx} = e^{-x}$, η γενική λύση:
 $y = \frac{\int (-x^2 + 1)e^{-x} dx + C}{e^{-x}}$

Αλλά, $\int (-x^2 + 1)e^{-x} dx = \int -x^2 e^{-x} dx + \int e^{-x} dx = \int -x^2 e^{-x} dx - e^{-x}$

ε' $\int -x^2 e^{-x} dx = \int x^2 (e^{-x})' dx = x^2 e^{-x} - 2 \int x e^{-x} dx = x^2 e^{-x} + 2 \int x (e^{-x})' dx$
 $= x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} - 2 \int e^{-x} dx = x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + 2e^{-x} + C =$
 $(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$

Τέλος, $\int (-x^2+1)e^{-x} dx = (x^2+2x+2)e^{-x} - e^{-x} + C = (x^2+2x+1)e^{-x} + C$

Άρα, γενική λύση: $y = \frac{(x^2+2x+1)e^{-x} + C}{e^{-x}} = Ce^{+x} + (x+1)^2$

Αλλά, $y(0) = \frac{1}{2} = C \cdot e^0 + (0+1)^2 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$, οπότε η ακριβής

(πραγματική) λύση του Π.ΑΤ είναι: $y(x) = (x+1)^2 - \frac{1}{2}e^{+x}$

⓪ $y(2) = (2+1)^2 - \frac{1}{2}e^{+2} = 5.30547$

με τη Taylor 2^{ης} τάξης $y_{10}^{(T)} = 5.34768$, άρα συνολικό σφάλμα

$$|y(2) - y_{10}^{(T)}| = |5.30547 - 5.34768| = 0.04221$$

με την Euler (1^{ης} τάξης) $y_{10}^{(E)} = 4.86578$, άρα συνολικό σφάλμα

$$|y(2) - y_{10}^{(E)}| = |5.30547 - 4.86578| = 0.43969$$

Παρατηρούμε ότι, με τη μέθοδο Taylor 2^{ης} τάξης, το σφάλμα είναι αρκετά μικρότερο (εδώ 10 φορές απ' ό,τι με τη μέθοδο Euler).

#