

Παραγωγή

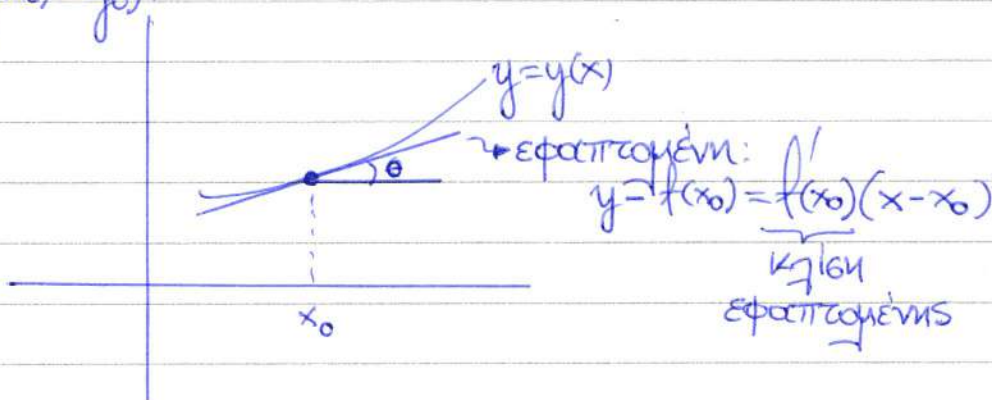
Μια κατηγορία προβλημάτων που καλείται ν' αντιμετωπιστεί κανείς, είναι αυτά που μια ποσότητα $y=y(x)$ (εξαρτημένη μεταβλητή) μεταβάλλεται αναφορικά με μια άλλη ποσότητα x (ανεξάρτητη μεταβλητή). Ο ρυθμός μεταβολής της y αναφορικά με την x εκφράζεται από την παραγωγή $y'(x)$ ή $\frac{dy}{dx}$.

Παράδειγμα

Σ' ένα κινούμενο σώμα ο ρυθμός μεταβολής $x=x(t)$, του διαστήματος που διανύει, αναφορικά με το χρόνο t , παριστάνει την ταχύτητα v του κινήτου, ($v=v(t)=\frac{dx(t)}{dt}$). Ακόμα ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας $v=v(t)$, αναφορικά με τον χρόνο, παριστάνει την επιτάχυνση $a=a(t)$ του κινούμενου σώματος.

Ερμηνεία (παραγωγή)

Εάν παραβεί κανείς γραφικά την $y=y(x)$, η παραγωγή της σ' ένα σημείο $x=x_0$, είναι η κλίση της εφαπτομένης της $y=y(x)$ στο σημείο $(x_0, y(x_0)=y_0)$.



Η εφαπτομένη της $y=y(x)$, έχει εξίσωση: $y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0)$. Ισοδύναμα, εάν θ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της $y=y(x)$ στο σημείο $(x_0, y(x_0))$, με τον άξονα Ox , τότε

$$y'(x_0) = \frac{dy(x_0)}{dx} = \tan \theta.$$

- Θέλουμε λοιπόν να υπολογίσουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης $y=f(x)$. Στον υπολογισμό αυτό αντιμετωπίζουμε τα εξής προβλήματα:
- η συνάρτηση δίνεται μεν αναλυτικά (γνωστός τύπος), αλλά ο τύπος της είναι αρκετά πολύπλοκος, οπότε ο άμεσος υπολογισμός της είναι πρακτικά αδύνατος (δύσκολος).
 - η f δίνεται μόνον σε μερικά διακριτά σημεία (άγνωστος ο τύπος της).

Μια άμεση λύση στα παραπάνω θα ήταν, να προσεγγίσουμε την $y=f(x)$, μ' ένα (προσεγγιστικό) πολυώνυμο $p_n(x)$, ή να υπολογίσουμε/εκτιμήσουμε την $f(x)$ με τη βοήθεια της $p'_n(x)$ (δηλαδή $f(x) \approx p'_n(x)$), ή τη βοήθεια του σχήματος Ηορντε.

Μειονεκτήματα της προσέγγισης αυτής είναι:

- μπορεί το $p_n(x)$ να προσεγγίζει "ικανοποιητικά" την $f(x)$, αυτό όμως δεν εγγυάται ότι ή $p'_n(x)$ προσεγγίζει ικανοποιητικά την $f'(x)$.
- Για τον υπολογισμό της $p'_n(x)$ είναι απαραίτητος ο υπολογισμός του $p_n(x)$ (συντελεστές), διαδικασία όχι απαραίτητη αν χρησιμοποιήσουμε πολυώνυμα παρεμβολής (Lagrange, Newton).

Αναπτύσσουμε παρακάτω τρεις κατηγορίες μεθόδων:

- Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών
(χρήση ορίου ή αναπτύγματος Τaylor).
- Μέθοδος προσδιορισμού συντελεστών
- Χρήση πολυωνύμων παρεμβολής

(I) Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών.

Η μέθοδος βασίζεται στον ορισμό της παραγωγού κ' χρησιμοποιούνται ισοπέχοντα σημεία ($x_i - x_{i-1} = h$, με h να επιλέγεται κατάλληλα).

Έστω, έστω $y = f(x)$ (παραγωγίσιμη) συνάρτηση κ' έστω ότι ψαχίμε την παραγωγή της στο σημείο $x = x_0$, δηλ. των $f'(x_0)$. Είναι γνωστό ότι:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Επομένως, θα μπορούσε να πει κανείς ότι (για κατάλληλο h)

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{με ψαχίμενη ακρίβεια})$$

Αποδεικνύονται λοιπόν (με τη βοήθεια του αναπαύματος Taylor) οι εξής τύποι:

Πρόταση ($x \in [a, b]$)
Εάν $y = f(x)$, είναι τουλάχιστον τρεις φορές παραγωγίσιμη στην περιοχή ενός σημείου $x = x_0$, τότε

(i) (α) $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ προς τα εμπρός διαφορές

(β) $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}$ προς τα πίσω διαφορές

(γ) $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ κεντρικές διαφορές

(ii) Το σφάλμα (αποκοπής) σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις είναι:

$$(α) - \frac{h}{2} f''(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_0+h)$$

$$(β) \frac{h}{2} f''(\xi), \quad \xi \in (x_0-h, x_0)$$

$$(γ) - \frac{h^2}{6} f'''(\xi), \quad \xi \in (x_0-h, x_0+h)$$

Απόδειξη.

Θα χρησιμοποιήσουμε, για ευκολία, το x αντί x_0 .

(α) Το ανάπτυγμα Taylor, για την $y=f(x)$, στο σημείο x , δίνεται από την σχέση:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \frac{h^2}{2} f''(\xi) \quad \xi \in (x, x+h)$$

Επομένως:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + \frac{h^2}{2} f''(\xi) \Rightarrow$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2} f''(\xi) \Rightarrow$$

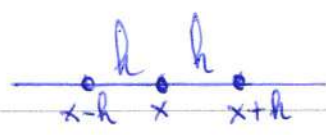
$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{πρόσέγγιση}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{σφάλμα}}$

Τελικά:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{με σφάλμα: } -\frac{h}{2} f''(\xi).$$

(β) Ανάλογα.



(γ) Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα, με όρους μέχρι 3^{ης} τάξης:

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(\xi_1) \quad \xi_1 \in (x, x+h)$$

ή

$$f(x-h) = f(x) - h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(\xi_2) \quad \xi_2 \in (x-h, x)$$

Αφαιρώντας τις δύο αυτές σχέσεις έχουμε:

$$f(x+h) - f(x-h) = 2h f'(x) + \frac{h^3}{6} (f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2))$$

$$2 \cdot \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2}$$

από θεώρημα μέσης τιμής

$$f'''(\xi), \quad \xi \in (x-h, x+h)$$

Επομένως:

$$f(x+h) - f(x-h) = 2h f'(x) + \frac{h^3}{3} f'''(\xi) \quad \eta'$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''(\xi)$$

Διαιρώντας

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad \text{με σφάλμα: } -\frac{h^2}{3} f'''(\xi)$$

Παρατήρηση

Το σφάλμα στις προς τα εμπρός (πίσω) διαφορές είναι τάξης $O(h)$ (δηλ. εξαρτάται από το h), ενώ στις κεντρικές διαφορές είναι τάξης $O(h^2)$ (εξαρτάται από το h^2). Επομένως, καθώς το $h \rightarrow 0$, το σφάλμα στις κεντρικές διαφορές μικραίνει.

(συνήθως) χρησιμοποιούμε, οπότε αναμένουμε καλύτερη εκτίμηση της παραγωγής.

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x^2$. Να βρεθεί η $f'(4)$, με τη βοήθεια των σημείων: (α) 3, 4, 5

(β) 3.75, 4, 4.25

(γ) 3.975, 4, 4.025

ή χρήση: (I) προς τα εμπρός διαφορών

(II) προς τα πίσω διαφορών

(III) κεντρικών διαφορών

Τι παρατηρείται;

Λύση

(I) προς τα εμπρός διαφορές

$$(α) f'(4) \approx \frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = \frac{175 - 96}{1} = 79$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ακριβής τιμή} \\ f(x) = 3x^2 + 4x \\ f(4) = 3 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 = 64 \end{array} \right\}$$

$$\text{σχετικό σφάλμα: } \left| \frac{64 - 79}{64} \right| \approx 23.4\%$$

$$(β) f'(4) \approx \frac{f(4.25) - f(4)}{4.25 - 4} = \frac{112.891 - 96}{0.25} = 67.564$$

$$6.6 = 0.055 \text{ ή } 5.5\%$$

$$(γ) f'(4) \approx \frac{f(4.025) - f(4)}{0.025} = \frac{97.6088 - 96}{0.025} = 64.352$$

$$6.6 = 0.55\%$$

(II) προς τα πίσω διαφορές

$$(α) f'(4) \approx \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = \frac{96 - 45}{1} = 51$$

$$6.6 = \left| \frac{64 - 51}{64} \right| \approx 20.3\%$$

$$(6) f'(4) \approx \frac{f(4.25) - f(3.75)}{0.25} = \frac{96 - 80.8594}{0.25} = 60.5624$$

$$6.6 = 5.37\%$$

$$(7) f'(4) \approx \frac{f(4) - f(3.975)}{0.025} = 63.652$$

$$6.6 \approx 0.94\%$$

(III) Κεντρικές διαφορές.

$$(α) f'(4) \approx \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{175 - 45}{2} = 65$$

$h=1$

$$6.6 = 1.5\%$$

$$(β) f'(4) \approx \frac{f(4.25) - f(3.75)}{0.5} = \frac{112.891 - 80.8594}{0.5} = 64.0632$$

$$(γ) f'(4) \approx \frac{f(4.025) - f(3.975)}{0.05} = \frac{97.6088 - 94.4087}{0.05} = 64.002$$

$$6.6 \approx 0.003\%$$

#

Παρατήρηση.

Στο παραπάνω παράδειγμα παρατηρούμε:

- (1) Καθώς το h μικραίνει, γίνονται "καλύτερες" οι εκτιμήσεις της $f'(4)$.
- (2) Οι προς τα εμπρός ή πίσω διαφορές δίνουν αναλόγως αποτελέσματα.
- (3) Οι κεντρικές διαφορές δίνουν τα "καλύτερα" αποτελέσματα.

Ακόμα,

με τις προς τα εμπρός (πίσω) διαφορές μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο στ' άκρα του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης ($f(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$), ενώ με τις κεντρικές διαφορές, σε εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού.

Παρατήρηση (βήματα κ' προς τα εμπρός διαφορές)

Το βήμα προσέγγισης εώς προς τα εμπρός διαφορές $\varepsilon(h) = -\frac{h}{2} f''(\xi)$
 $\xi \in (x, x+h)$

εξαρτάται από το h . θεωρητικά, θα περίμενε κανείς, όσο μικρότερο είναι το h τόσο καλύτερη θα είναι η προσέγγιση. Στην πράξη όμως, όταν το h είναι μικρότερο από την αποδεκτή προσέγγιση του υπολογισμού, μηδενίζεται η διαφορά $f(x+h) - f(x)$ οπότε $f'(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$.

π.χ αν οι υπολογισμοί γίνονται με προσέγγιση 10^{-6} κ' $h = 10^{-7}$ τότε $f(x+h) = f(x)$.

Υπάρχει μία βέλτιστη τιμή του h (h_{opt}) που δίνει την καλύτερη δυνατή προσέγγιση. Η τιμή αυτή είναι ίση με:

$$h_{opt} = 2 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}$$

ε = καθορισμένη προσέγγιση υπολογισμών

$$M = \max_{\xi \in [a, b]} |f''(\xi)|$$

Παράδειγμα

Εάν $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, να βρεθεί η $f'(\frac{\pi}{3})$. Δίνεται:
 $\varepsilon = 10^{-6}$, $h < 0.1$

Λύση

$$|f''(x)| = |-\sin x| = \sin x \leq \sin(\frac{\pi}{3} + 0.1) = M = 0.9116155$$

$$\text{ε' } h_{opt} = 2 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{M}} \approx \dots = 6.624 \times 10^{-4}$$

Επομένως,

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sin(\frac{\pi}{3} + 0.0006624) - \sin \frac{\pi}{3}}{0.0006624} \approx 0.4997131$$

Γνωστό, $f'(x) = \cos x$ κ' $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = 0.5$

$$\text{βήματα: } |0.5 - 0.4997131| = 2.869 \times 10^{-4}$$

Παρατήρηση.

1) Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν κ' για τις περιπτώσεις προς τα πλάω κ' κεντρικών διαφορών.

2) Το σφάλμα (αποκοπή) περιορίζεται περισσότερο, αν χρησιμοποιηθούν περισσότερα σημεία.

π.χ. αν θεωρήσουμε τα πέντε σημεία $x-2h, x-h, x, x+h, x+2h$, τότε αποδεικνύεται ότι:

$$f'(x) \approx \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h}$$

Αναφορικά με τη δύοτη παράγωγο, $f''(x)$, αποδεικνύεται το παρακάτω αποτέλεσμα.

Πρόταση.

(α) $f''(x) \approx \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$ προς τα εμπρός διαφορές

(β) $f''(x) \approx \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2}$ προς τα πλάω διαφορές

(γ) $f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$ κεντρικές διαφορές.

Απόδειξη.

(γ) Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor, με όρους μέχρι 4^{ης} τάξης:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\xi_1)$$

$\xi_1 \in (x, x+h)$

$$κ' \quad f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(x) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\xi_2)$$

$\xi_2 \in (x-h, x)$

Προσθέτοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις, έχουμε:

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{12} \cdot \frac{f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)}{2}$$

$f^{(4)}(\xi)$ από Θ.ΜΤ
 $\xi \in (x-h, x+h)$

Επομένως:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$$

πρόσέγγιση
σφάλμα.

(α)(β) Αποδεικνύονται ανάλογα.

#

Παράδειγμα

Έστω $f(x) = \frac{1}{x}$. Να υπολογισθεί η $f''(1)$, χρησιμοποιώντας τον τύπο των κεντρικών διαφορών με $h=0.1$, 0.01 ή 0.001 . Να βρεθεί το σφάλμα σε κάθε περίπτωση.

Λύση.

ακριβώς
ή μη

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-1-1} = -x^{-2} \Rightarrow f''(x) = -(-2)x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

$f''(1) = 2.$

(i) Αν $h=0.1$

$$f'(1) \approx \frac{f(1+0.1) - f(1-0.1)}{0.1^2} = \dots = 2.020202$$

$$\text{σφάλμα: } |2 - 2.020202| = 0.020202.$$

$$(ii) \text{ αν } h=0.01 \quad f'(1) \approx \frac{f(1+0.01) - 2f(1) + f(1-0.01)}{0.01^2} = \dots = 2.000200$$

$$\text{σφάλμα} = 0.000200$$

$$(iii) \text{ αν } h=0.001 \quad f'(1) \approx \frac{f(1+0.001) - 2f(1) + f(1-0.001)}{0.001^2} = 2.000002$$

$$\text{σφάλμα} = 0.000002.$$

#

(II) Μέθοδος προσδιορισμού συντελεστών.

Παρατήρηση.

Οι τύποι των πεπερασμένων διαφορών, της 1^{ης} παραγράφου, μπορούν να θεωρηθούν ειδικές περιπτώσεις του τύπου:

$$f'(x_i) \approx \alpha f(x_{i-1}) + \beta f(x_i) + \gamma f(x_{i+1}) \quad (1)$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$x_i = x_{i-1} + h$$

όπου α, β, γ (αγνωστοί κάθε φορά προς προσδιορισμό) συντελεστές.

Π.χ κεντρικές διαφορές.

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} = -\frac{1}{2h} f(x_{i-1}) + 0 f(x_i) + \frac{1}{2h} f(x_{i+1})$$

$$\text{εδώ } \alpha = -\frac{1}{2h}, \beta = 0, \gamma = \frac{1}{2h}.$$

Μπορούμε λοιπόν να αποδείξουμε επιπλέον (των πεπερασμένων διαφορών) τύπους εύρεσης προσεγγίσεων της 1^{ης} παραγράφου (2^{ης} κ.π.) της μορφής (1) (με χρήση όσων διηγείων θέλουμε).

Η παραπάνω μέθοδος καλείται μέθοδος προσδιορισμού των συντελεστών.

Ο προσδιορισμός των συντελεστών (βαρών) βασίζεται στο εξής:

Θεωρούμε ότι η (1) δίνει ακριβή αποτελέσματα για τα μονώμερα $1, x, x^2, \dots$ (ο αριθμός εξαρτάται από τον αριθμό των άγνωστων συντελεστών). Εφαρμόζοντας την (1) στα $1, x, x^2, \dots$ προκύπτει σύστημα η λύση του οποίου δίνει τα $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Παράδειγμα.

Να προσδιοριστεί κανόνας παραγωγής της μορφής

$$f'(x_0) \approx \alpha f(x_0) + \beta f(x_0 + h).$$

Λύση

Στον παραπάνω κανόνα πρέπει να προσδιορίσουμε τα α, β (2 άγνωστοι)

Θεωρούμε ότι ο κανόνας δίνει ακριβή αποτελέσματα (δηλ. ισχύει με "="), για $f(x)=1$ ή $f(x)=x$.

Αν $f(x)=1 \Rightarrow f'(x)=0$ ή ο κανόνας γίνεται:

$$f'(x_0)=0 = \alpha \underbrace{f(x_0)} + b \underbrace{f(x_0+h)} \Rightarrow \alpha + b = 0 \quad (i)$$

Αν, $f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$ ή ο κανόνας γίνεται:

$$f'(x_0)=1 = \alpha f(x_0) + b f(x_0+h) \Rightarrow$$

$$1 = \alpha x_0 + b(x_0+h) = \alpha x_0 + b x_0 + h b$$

$$1 = \underbrace{(\alpha+b)}_{0(i)} x_0 + h b \Rightarrow$$

$$b = \frac{1}{h} \quad (ii)$$

Επομένως: (i) $\Rightarrow \alpha = -b = -\frac{1}{h}$

$$\text{ή } f'(x_0) \approx -\frac{1}{h} f(x_0) + \frac{1}{h} f(x_0+h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

(γνωστός τύπος προς τα εμπρός διαφορών) #

Παρατήρηση

Ένας ισοδύναμος τρόπος υπολογισμού των συντελεστών $\alpha, b, \gamma, \dots$ είναι με τη βοήθεια του ανάπτυγματος Taylor. Με τον τρόπο αυτό υπολογίζεται ή το σφάλμα.

Παράδειγμα. (συνέχεια)

Θέλουμε

$$f'(x_0) \approx \alpha f(x_0) + b f(x_0+h)$$

(Χρήση ανάπτυγματος Taylor)

Λύση.

Από το ανάπτυγμα Taylor:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{h^2}{2} f''(\xi)$$

Από: $f'(x_0) = a f(x_0) + b f(x_0+h)$

$$= a f(x_0) + b \left(f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{h^2}{2} f''(\xi) \right) \Rightarrow$$

$$f'(x_0) = (a+b) f(x_0) + b h f'(x_0) + b \frac{h^2}{2} f''(\xi)$$

Εξισώνοντας τα μέλη, προκύπτει το σύστημα:

$$\left. \begin{array}{l} a+b=0 \\ b h=1 \Rightarrow b=\frac{1}{h} \end{array} \right\} \Rightarrow a=-\frac{1}{h}$$

Άρα: $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \approx$ σφάλμα $- b \frac{h^2}{2} f''(\xi) =$

$$= -\frac{1}{h} \frac{h^2}{2} f''(\xi)$$

$$= -\frac{h}{2} f''(\xi) \quad \#$$

Παράδειγμα

Να προσδιορισθεί κανόνας παραγωγής της μορφής:

$$f'(x_0) \approx a f(x_0) + b f(x_0+h) + \gamma f(x_0+2h)$$

Λύση

Ο κανόνας θα πρέπει να είναι ακριβής για μονώνυμα της μορφής: $1, x, x^2$ (επειδή υπάρχουν 3 άγνωστοι συντελεστές a, b, γ).

$$\text{Αν } f(x)=1 \Rightarrow f'(x)=0 \quad \text{κ'}$$

$$f'(x_0)=0 = \alpha \underbrace{f(x_0)}_{\text{"}} + b \underbrace{f(x_0+h)}_{\text{"}} + \gamma \underbrace{f(x_0+2h)}_{\text{"}} \Rightarrow$$

$$\alpha + b + \gamma = 0 \quad \textcircled{i}$$

$$\text{Αν } f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1 \quad \text{κ'}$$

$$f'(x_0)=1 = \alpha f(x_0) + b f(x_0+h) + \gamma f(x_0+2h) \quad \underline{\underline{f(x)=x}}$$

$$= \alpha x_0 + b(x_0+h) + \gamma(x_0+2h) =$$

$$= \underbrace{(\alpha+b+\gamma)}_{\text{" } 0 \text{ (i)}} x_0 + (b+2\gamma)h = 1$$

$$\text{Άρα } (b+2\gamma)h = 1 \quad \textcircled{ii}$$

$$\text{Αν } f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x \quad \text{κ'}$$

$$f'(x_0)=2x_0 = \alpha f(x_0) + b f(x_0+h) + \gamma f(x_0+2h) \quad \underline{\underline{f(x)=x^2}}$$

$$= \alpha x_0^2 + b(x_0+h)^2 + \gamma(x_0+2h)^2$$

$$= \underbrace{(\alpha+b+\gamma)}_{\text{" } 0} x_0^2 + 2hx_0(b+2\gamma) + h^2(b+4\gamma)$$

$$\text{Απ' όπου προκύπτει: } 2hx_0(b+2\gamma) = 2x_0 \Rightarrow (b+2\gamma)h = 1 \quad (\text{ιδία με πριν})$$

κ'

$$h^2(b+4\gamma) = 0 \Rightarrow b+4\gamma = 0 \quad \textcircled{iii}$$

$$\text{Τώρα: (iii)} \Rightarrow b = -4\gamma \quad \text{κ' από (ii)} \quad (-4\gamma+2\gamma)h = 1 \Rightarrow$$

$$\gamma = -\frac{1}{2h}, \text{ οπότε } b = -4\gamma = \frac{4}{2h}$$

$$\text{Τέλος } \alpha + b + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha + \frac{4}{2h} - \frac{1}{2h} = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{2h}$$

Η ζητούμενη σχέση είναι ίση με:

$$f'(x_0) \approx \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)}{2h}$$

#

(III) Χρήση πολυωνύμων παρεμβολής

Οι μέθοδοι που αναπτύξαμε μέχρι τώρα χρησιμοποιούνται:

(α) όταν είναι γνωστός ο αναλυτικός τύπος της $f(x)$

(β) τα σημεία $x_0, x_1, x_2, \dots$ είναι ισοπέχοντα.

Εάν δεν δίνεται ο (αναλυτικός) τύπος της $f(x)$, είτε τα σημεία $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots$ δεν είναι ισοπέχοντα τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μεθόδους που βασίζονται στα πολυώνυμα παρεμβολής.

(A) Παράγωγιση με πολυώνυμα Lagrange

Έστω ότι μας δίνονται τα σημεία $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ ή δέχουμε να υπολογίσουμε την $f'(x)$, $x \in [x_0, x_n]$.

Το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange δίνεται:

$$L_n(x) = l_0(x) \cdot f(x_0) + l_1(x) \cdot f(x_1) + \dots + l_n(x) \cdot f(x_n)$$

όπου

$$l_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}$$

Τότε:

$$f'(x) \approx L'_n(x) = l'_0(x) f(x_0) + l'_1(x) f(x_1) + \dots + l'_n(x) f(x_n)$$

ή γενικά, $f^{(k)}(x) \approx L_n^{(k)}(x)$, $k=1, 2, \dots$

Περίπτωση $n=2$. (συντεταγμένες $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$)

$$\text{Το } L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

Επομένως

$$L_2'(x) = \frac{(x-x_1) + (x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0) + (x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0) + (x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

Αν τα σημεία είναι ισοπέχοντα: $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$.

$$L_2'(x) = \frac{2x - x_1 - x_2}{2h^2} f(x_0) - \frac{2x - x_0 - x_1}{h^2} f(x_1) + \frac{2x - x_0 - x_1}{2h^2} f(x_2)$$

$$L_2''(x) = \frac{2f(x_0)}{2h^2} - \frac{2f(x_1)}{h^2} + \frac{2f(x_2)}{2h^2}$$

Παράδειγμα:

Δίνονται τα σημεία $(1,1), (3,4), (5,9)$, μαζί $y=f(x)$.
Να υπολογιστεί $\text{I} \quad f'(2)$ $\text{II} \quad f''(2)$.

Λύση

Τα σημεία είναι ισοπέχοντα: $x_0=1, x_1=3=1+2, x_2=5=3+2$.
Χρησιμοποιώντας τον τύπο που δίνεται παραπάνω:

$$\begin{aligned} f'(x) \approx L_2'(x) &= \frac{2x-3-5}{2 \cdot 2^2} f(x_0) + \frac{2x-1-5}{2^2} f(x_1) + \frac{2x-1-3}{2 \cdot 2^2} f(x_2) = \\ &= \frac{2x-8}{8} \cdot 1 - \frac{2x-6}{4} \cdot 4 + \frac{2x-4}{8} \cdot 9 = \\ &= \frac{2x-8-16x+48+18x-36}{8} = \frac{4x+4}{8} = \frac{x+1}{2} \end{aligned}$$

Επομένως:

$$f'(2) = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Απόφα, $f''(x) = \frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{h^2} = \frac{1 - 2 \cdot 4 + 9}{4} = \frac{2}{4} = 0.5$

#

(B) Παραχώριση με πολυώνυμα Newton

Έστω κ' πάρι τα, σημεία $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ κ' θέλουμε να υπολογίσουμε τω $f(x)$, $x \in [x_0, x_n]$.
Το πολυώνυμο παρεμβολής Newton δίνεται από τη σχέση:

$$P_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-x_0) + \alpha_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + \alpha_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

όπου: $\alpha_j = [x_0, \dots, x_j]$ οι διακριγμένες διαφορές.
 $j=0, 1, \dots, n$.

Τώρα:

$$P'_n(x) = \alpha_1 + \alpha_2 [(x-x_0) + (x-x_1)] + \alpha_3 [(x-x_0)(x-x_1) + (x-x_0)(x-x_2) + (x-x_1)(x-x_2) + \dots]$$

Για $n=2$

ος γνωστόν το πολυώνυμο παρεμβολής υπολογίζεται:

x	$f(x)$	α_0	α_1	α_2
x_0	$f(x_0)$	α_0	$[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$	$[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}$
x_1	$f(x_1)$			
x_2	$f(x_2)$		$[x_2, x_1] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$	

$$\begin{aligned} \text{2}^{\circ} \quad p_2'(x) &= \alpha_1 + \alpha_2 (2x - x_0 - x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} (2x - x_0 - x_1) \end{aligned}$$

Για ισαπέχοντα σημεία:

$$p_2'(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{2h^2} (2x - x_0 - x_1)$$

2^η Παράγωγος:

$$p_2''(x) = 2\alpha_2 = 2 \cdot \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Για ισαπέχοντα:

$$p_2''(x) = \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h^2}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Δίνονται τα σημεία (1,1), (3,4), (5,9), του γραφήματος, με $y=f(x)$.

Να υπολογιστεί: I $f'(2)$ II $f''(2)$

Λύση

Τα σημεία είναι ισαπέχοντα: $x_0=1$, $x_1=3=1+2$, $x_2=5=3+2$.
Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο:

$$\begin{aligned} p_2'(4) &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{2h^2} (2x - x_0 - x_1) \\ &= \frac{4-1}{2} + \frac{9-2 \cdot 4 + 1}{2 \cdot 2^2} (2 \cdot 4 - 1 - 4) = \frac{3}{2} = 1.5 \end{aligned}$$

x	$f(x)$	α_0
1	1	
3	4	
5	9	

$$\alpha_1 = \frac{4-1}{3-1} = \frac{3}{2}$$

$$f[5,3] = \frac{9-4}{5-3} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \frac{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}}{5-1} = \frac{1}{4}$$

$$p_2''(4) = 2\alpha_2 = 2 \cdot \frac{1}{4} = 0.5$$

#

Παρατήρηση

(1) Το πολυώνυμο παρεμβολής Newton, στα παραπάνω σημεία, είναι:

$$p_2(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-x_0) + \alpha_2(x-x_0)(x-x_1)$$

$$= 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)(x-3) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$$

$$\text{Επομένως, } p_2'(x) = \frac{2}{4}x + \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad p_2''(x) = \frac{2}{4} = 0.5 \quad (= p_2'(2))$$

$$p_2'(4) = \frac{2}{4} \cdot 4 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad (\text{ίδια αποτελ.})$$

Για τον υπολογισμό της $p_2'(x)$ ή $p_2''(x)$ δεν είναι απαραίτητο όπως είδαμε να γνωρίζουμε πλήρως το πολυώνυμο, αλλά τα σημεία παρεμβολής.

(2) Οι εκτιμήσεις ή με τα δύο πολυώνυμα παρεμβολής (Newton, Lagrange) είναι ίσες αφού στην ουσία το πολυώνυμο παρεμβολής στα δοθέντα σημεία είναι μονοσήμαντα ορισμένο.