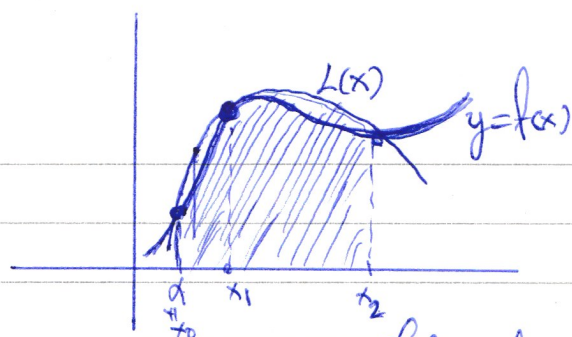


Μέθοδος Simpson



(A) Απλός τύπος $\frac{1}{3}$ -Simpson

Είδαμε προηγουμένως ότι, για να υπολογίσει κανείς το $\int_a^b f(x)dx$ ακριβέστερα, από το να χρησιμοποιήσει τον απλό κανόνα τραπεζίου, είναι να χρησιμοποιήσει τον σύνθετο κανόνα τραπεζίου.

Μια δεύτερη προσπάθεια για να πετύχει μεγαλύτερη (ίσως) ακρίβεια, είναι να χρησιμοποιήσει ένα πολυώνυμο παρεμβολής (Lagrange) μεγάλου βαθμού.

Έστω λοιπόν ότι έχουμε 3 σημεία παρεμβολής $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$. $x_0=a, x_1=\frac{a+b}{2}, x_2=b$. Έστω $L_2(x)$ το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange (που παρεμβάλλει τα σημεία) 2ου βαθμού:

$$L_2(x) = \underbrace{\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}}_{l_0(x)} f(x_0) + \underbrace{\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}}_{l_1(x)} f(x_1) + \underbrace{\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}}_{l_2(x)} f(x_2)$$

Τότε, θεωρούμε:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_2(x)dx = f(x_0) \int_a^b l_0(x)dx + f(x_1) \int_a^b l_1(x)dx + f(x_2) \int_a^b l_2(x)dx$$

Τώρα, εάν $h = \frac{b-a}{2}$ ($x_0=a, x_1=a+h, x_2=a+2h$) | ισοπέχοντα σημεία

$$\int_a^b l_0(x) = \frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \int_a^b (x-x_1)(x-x_2)dx =$$

$$= \frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \left(\frac{x^3}{3} - (x_1+x_2)\frac{x^2}{2} + x_1x_2x \right) \Big|_a^b =$$

$$= \frac{1}{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)(a-b)} \cdot \frac{(b-a)^3}{12} = \frac{(b-a)}{6} = \frac{h}{3}$$

Ανάλογα: $\int_a^b b_1(x) dx = \frac{4h}{3} \quad \text{ή} \quad \int_a^b b_2(x) dx = \frac{h}{3}$

Τελικά

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} f(x_0) + \frac{4h}{3} f(x_1) + \frac{h}{3} f(x_2)$$

$$= \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

$$= \frac{h}{3} (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$$

απλός κανόνας/τύπος $\frac{1}{3}$ -Simpson.

Σφάλμα ολοκλήρωσης

Εάν $f \in C^4([a, b])$ ή $h = \frac{b-a}{2}$, τότε το σφάλμα ολοκλήρωσης

$$R_3(f) = -\frac{(b-a)^5}{2^5 \cdot 90} f^{(4)}(\xi) \quad \xi \in (a, b).$$

Ένα άνω φράγμα του σφάλματος δίνεται από τη σχέση:

$$|R_3(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{2^5 \cdot 90} \|f^{(4)}\|_{\infty} = \frac{h^5}{90} \|f^{(4)}\|_{\infty} \quad (h = \frac{b-a}{2})$$

Παράδειγμα.

Να υπολογιστεί το $\int_1^2 (2+3x) dx$ με τη βοήθεια του απλού τύπου $\frac{1}{3}$ -Simpson.

Λύση

$$\int_1^2 (2+3x) dx \approx \frac{h}{3} (f(1) + 4f(1.5) + f(2))$$

$$= \frac{1}{2} (5 + 4 \cdot 6.5 + 8) = \frac{39}{6}$$

$$= 6.5 \quad (= \text{ακριβή τιμή})$$

$$\alpha=1, \beta=2$$

$$h = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$x_0=1, x_1=1+0.5=1.5$$

$$x_2=2$$

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το $\int_0^1 (x^3+x-2)dx$ με χρήση του απλού τύπου $\frac{1}{3}$ Simpson.

Λύση

$$\left. \begin{array}{l} \alpha=0, \quad h=\frac{1-0}{2}=0.5 \\ b=1, \quad x_0=0, x_1=0.5 \\ \quad \quad \quad x_2=1 \\ f(x)=x^3+x-2 \end{array} \right\} \int_0^1 (x^3+x-2)dx \approx \frac{h}{3} (f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2))$$

$$= \frac{1/2}{3} (-2+4(-1.375)+0) = -\frac{5}{4}$$

Ακριβής τιμή: $\int_0^1 (x^3+x-2)dx = \left. \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 2x \right|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{4}$ ✓ ίσα

Παρατήρηση

Ο απλός τύπος $\frac{1}{3}$ -Simpson δίνει ακριβή τιμή των ορισμένων ολοκληρωμάτων μέχρι 3^{ου} βαθμού.

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x dx$ με τη βοήθεια του απλού τύπου $\frac{1}{3}$ -Simpson.

Λύση

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \pi/6, \quad b = \pi/2 \\ h = \frac{\pi/2 - \pi/6}{2} = \pi/6 \\ x_0 = \pi/6, \quad x_1 = \pi/3 (=2\pi/6) \\ f(x) = \sin x \quad x_2 = \pi/2 (= \pi/6 + 2\pi/6) \\ f(\pi/6) = 1/2, \quad f(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \\ \quad \quad \quad f(\pi/2) = 1 \end{array} \right. \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x dx \approx \frac{h}{3} (f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2))$$

$$= \frac{\pi/6}{3} (f(\pi/6)+4f(\pi/3)+f(\pi/2))$$

$$= \frac{\pi}{18} \left(\frac{1}{2} + 4 \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right)$$

$$= \frac{\pi}{36} (3+4\sqrt{3}) \approx 0.866399$$

Σχετικό σφάλμα

$$\left| \frac{0.866025 - 0.866399}{0.866025} \right| \approx 0.00043$$

(ακριβής τιμή)

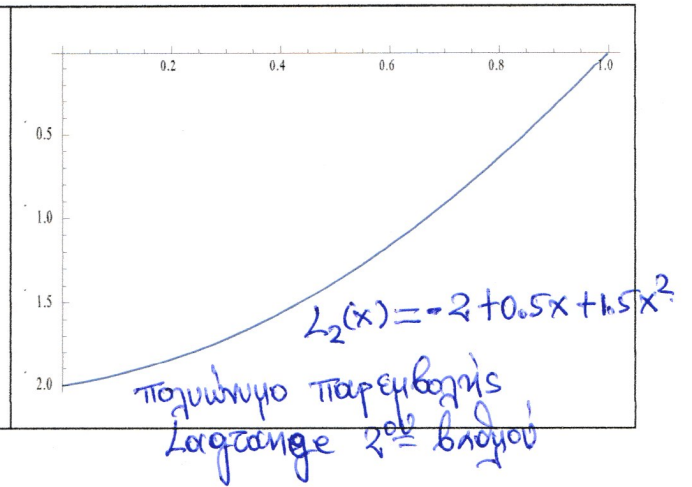
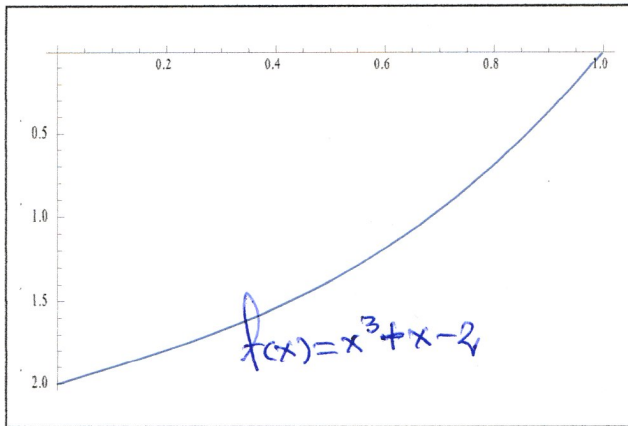
Παρατήρηση

Ο υπολογισμός ^{εδώ} με τον αττικό τύπο $\frac{1}{8}$ -Simpson είναι ακριβέστερος με αυτόν με τον αττικό τύπο του Τραπεζίου (εκεί α.β.β 9,3%).

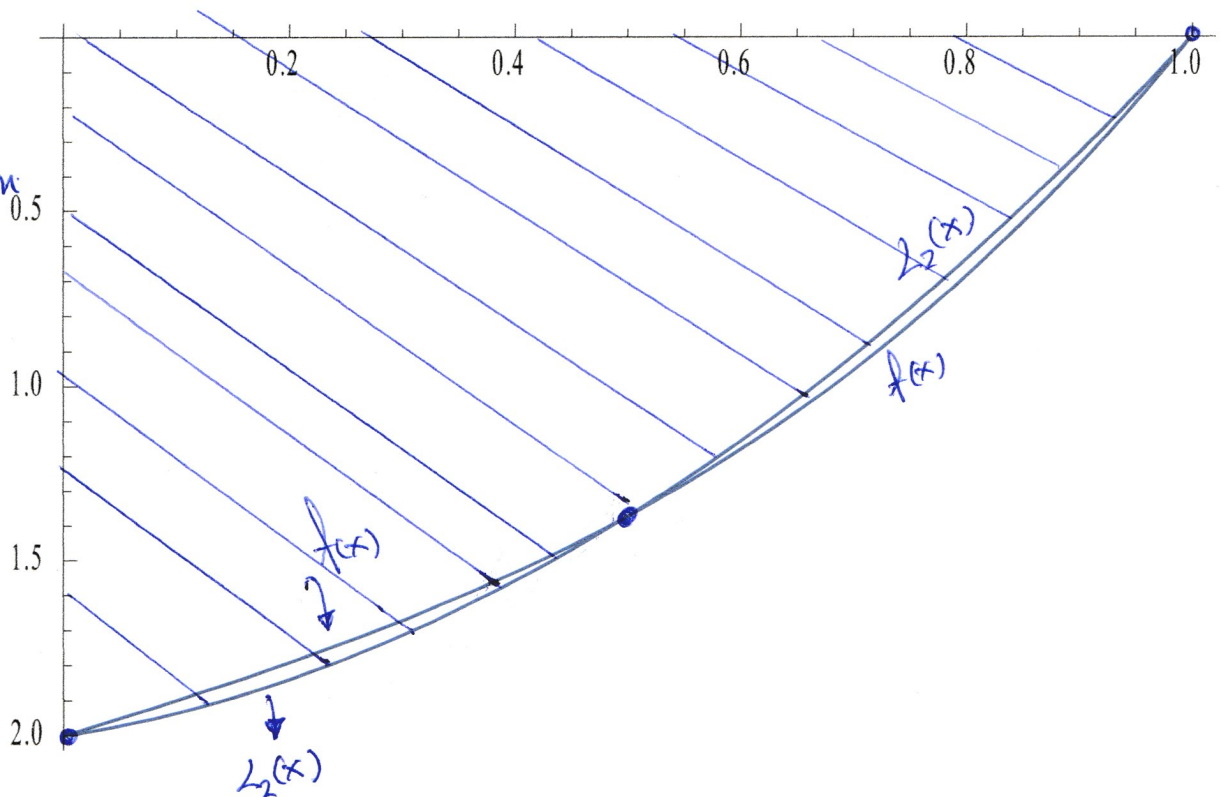
$$f(x) = x^3 + x - 2$$

$$\int_0^1 (x^3 + x - 2) dx$$

5/5



από
απλός
 $\frac{1}{3}$ Simpson



Παρατήρηση

Για να εφαρμοστεί ο τύπος, πρέπει $n=2m$, δηλ. n άρτιος.

(B) Σύνθετος τύπος $\frac{1}{3}$ Simpson

Παρατήρηση

Δίδουμε ότι το εσθμα ολοκλήρωσης με τον ατγό τύπο $\frac{1}{3}$ του Simpson είναι $-\frac{(b-a)}{h} f^{(4)}(\xi)$, $\xi \in (a,b)$, εταρτάται από το $h = \frac{b-a}{n}$, δηλ. το μήκος του διαστήματος $[a,b]$. Εάν λοιπόν το $[a,b]$ είναι μεγάλο, για να πετύχαμε (ίσως) μεγαλύτερη ακρίβεια στον (προσεγγιστικό) υπολογισμό του $\int_a^b f(x)dx$, χρησιμοποιούμε τον λεγόμενο σύνθετο τύπο $\frac{1}{3}$ του Simpson.

(α) Χωρίζουμε το διάστημα $[a,b]$ σε m υποδιαστήματα, καθενα μήκους $2h$, με $h = \frac{b-a}{2m}$, με τη βοήθεια των ισαπέχοντων σημείων (ομοιομορφη διαμερίση) $x_j = a + jh$, $j=0,1,\dots,n$ ($n+1$ σημεία)

(β) Σε κάθε ένα από αυτά τα m διαστήματα (το καθε διαστήμα περιλαμβάνει 3 σημεία, για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange 2ου βαθμού) $[x_{2j-2}, x_{2j}]$, $j=0,1,\dots,m$ εφαρμόζουμε τον ατγό τύπο $\frac{1}{3}$ Simpson:

$$\int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(x_{2j-2}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j}))$$

Τέλος,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{j=0}^m \int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} f(x) dx = \frac{h}{3} \sum_{j=0}^m (f(x_{2j-2}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j}))$$

$$= \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)).$$

Παρατήρηση.

Στον σύνθετο κανόνα $\frac{1}{3}$ Simpson τα $f(x_0), f(x_n)$ έχουν συντελεστή 1,
 τα $f(x_1), f(x_3), f(x_5), \dots$ (περιττές τάξεις) έχουν συντελεστή 4
 τα $f(x_2), f(x_4), f(x_6), \dots$ (άρτιες τάξεις) — — — — — 2.

Σφάλμα ολοκλήρωσης

Εάν $f \in C^{(4)}([a, b])$, τότε το σφάλμα ολοκλήρωσης με το σύνθετο κανόνα $\frac{1}{3}$ Simpson είναι:

$$R_{n+1}(f) = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\xi) \quad \text{για κάποιο } \xi \in (a, b)$$

Ένα άνω φράγμα του σφάλματος είναι:

$$|R_{n+1}(f)| \leq \frac{(b-a)}{180} h^4 \|f^{(4)}\|_{\infty}$$

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το $\int_0^1 x^4 dx$ με τη βοήθεια:

(α) απλού τύπου $\frac{1}{3}$ Simpson (β) σύνθετου τύπου $\frac{1}{3}$ Simpson με $n=4$ (δηλ 5 σημεία)

Λύση

(α) $a=0, b=1, h=\frac{b-a}{2}=\frac{1}{2}=0.5, x_0=0, x_1=0.5, x_2=1$
 $f(x)=x^4, f(0)=0, f(0.5)=0.5^4, f(1)=1$

$$\int_0^1 x^4 dx \approx \frac{h}{3} (0 + 4 \cdot 0.5^4 + 1) = \frac{1/2}{3} (1 + 0.25) = \frac{5}{24} \approx 0.2083$$

$\left[\int_0^1 x^4 dx = 0.20 \right]$ σχετικό σφάλμα $\left| \frac{0.20 - 0.2083}{0.20} \right| = 0.0415$ ή 4,15%

(β) Εδώ $h=\frac{1-0}{4}=\frac{1}{4}, x_0=0, x_1=0.25, x_2=0.5, x_3=0.75, x_4=1$

Αποτέ: $\int_0^1 x^4 dx \approx \frac{h}{3} (f(0) + 4f(0.25) + 2f(0.5) + 4f(0.75) + f(1))$
 $= \frac{1/4}{3} (0 + 0.015625 + 0.125 + 1.265625 + 1)$

≈ 0.20052

σχετικό σφάλμα: $\left| \frac{0.2 - 0.20052}{0.2} \right| = 0.0026$ ή 0.26%

Παρατήρηση

Βλέπουμε παραπάνω, ότι ο υπολογισμός με το σύνθετο τύπο $1/3$ Simpson είναι ακριβέστερος, απ' ότι με τον απλό τύπο $1/3$ Simpson

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί, με τη σύνθετη μέθοδο $1/3$ Simpson, η τιμή $h=0.2$ το

$\int_{-0.2}^{0.6} \sin x dx.$

Να δοθεί επίσης για εκτίμηση του σφάλματος.

Λύση.

Εδώ $a=-0.2$, $b=0.6$, $h=0.2$ ή $x_0=-0.2$, $x_1=0$, $x_2=0.2$, $x_3=0.4$, $x_5=0.6$.

$f(x) = \sin x$

ή!

x_k	-0.2	0	0.2	0.4	0.6
$f(x_k)$	-0.19866	0	0.19866	0.38942	0.56464

$$\eta) \int_{-0.2}^{0.6} \sin x dx \approx \frac{h}{3} (f(-0.2) + 4f(0) + 2f(0.2) + 4f(0.4) + f(0.6))$$

αντικαθιστώντας $\rightarrow \text{---} = 0.154732$
από τον πίνακα

Το σφάλμα $R_6(f) = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$ $\xi \in (-0.2, 0.6)$.

$\alpha = -0.2, b = 0.6, h = 0.2$ $f(x) = \cos x, f'(x) = -\sin x$
 $f''(x) = -\cos x, f^{(4)}(x) = \sin x$

$\|f^{(4)}\|_{\infty} = \max_{x \in (-0.2, 0.6)} \underbrace{|\sin x|}_{f^{(4)}} = \sin(0.6) = 0.56464$ 

Άρα, τελικά ένα άνω φράγμα του σφάλματος:

$$|R_6(f)| \leq \frac{(0.6 - (-0.2))}{180} \cdot (0.2)^4 \cdot 0.56464 = 4.015 \times 10^{-6}$$

#

Παράδειγμα

Πόσα διαστήματα απαιτούνται, τουλάχιστον, ώστε το σφάλμα ογκύρωσης, με τη σύνθετη μέθοδο $\frac{1}{3}$ Simpson, του

$$\int_{-0.2}^{0.6} \frac{1}{x+2} dx$$

να είναι $\leq 10^{-8}$

Λύση
Εδώ

$\alpha = -0.2, b = 0.6$ $\eta) f(x) = \frac{1}{x+2}, f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$
 $f''(x) = +\frac{2}{(x+2)^3}, f'''(x) = -\frac{6}{(x+2)^4}$
 $f^{(4)}(x) = \frac{24}{(x+2)^5}$

$$n' \quad g(x) = \frac{1}{(x+2)^5} \downarrow \text{ στο } (-0.2, 0.6) \quad \frac{5}{10}$$

$$H \quad \|f\|_{\infty}^{(4)} = \max_{x \in (-0.2, 0.6)} \left\{ \frac{24}{(x+2)^5} \right\} = \frac{24}{(-0.2+2)^5} = 1.27$$

Ένα άνω φράγμα του σφάλματος είναι:

$$\frac{(0.6 - (-0.2))}{180} h^4 \cdot 1.27 \leq 10^{-8} \quad \left. \vphantom{\frac{(0.6 - (-0.2))}{180} h^4 \cdot 1.27 \leq 10^{-8}} \right\} \Rightarrow$$

$$\text{ε' } h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.6 - (-0.2)}{n}$$

$$\frac{0.8^5 \cdot 1.27}{180 n^4} \leq 10^{-8} \Rightarrow n^4 \geq \frac{10^8 \cdot (0.8)^5 \cdot 1.27}{180} \approx 231196 \Rightarrow$$

$$n \geq \sqrt[4]{231196} \approx 31.93$$

δηλ. $n=32$ διαστήματα

Προσοχή: στον σύνθετο κανόνα $\frac{1}{3}$ Simpson, το n = άρτιος