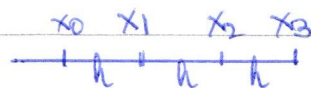


(Γ) Απλός τύπος $\frac{3}{8}$ -Simpson.



Μια παραλλαγή του απλού τύπου $\frac{1}{3}$ Simpson είναι ο λεγόμενος απλός τύπος $\frac{3}{8}$ Simpson ο οποίος προκύπτει ως εξής:
 Εάν έχουμε 4 ισαπέχοντα σημεία $x_i = x_0 + ih$ $i=0,1,2,3$ με $h = \frac{b-a}{3}$, ή τα σημεία παρεμβολής $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ ή εάν $L_3(x)$ το πολώνυμο παρεμβολής (που παρεμβάλλει τα σημεία) 3ου βαθμού. Τότε για προσέγγιση του $\int_a^b f(x) dx$ είναι το $\int_a^b L_3(x) dx$, δηλ.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_3(x) dx$$

Εάν κανείς υπολογίσει το $L_3(x)$ και κοστώπιν το $\int_a^b L_3(x) dx$ (κατά τρόπο ανάλογο με τους υπολογισμούς των προηγούμενων παραγράφων) καταλήγει στον τύπο:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3}{8} h \left\{ f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3) \right\}$$

$$h = \frac{b-a}{3}$$

ο οποίος ονομάζεται απλός τύπος $\frac{3}{8}$ Simpson.

Πρόβλημα

Εάν $f \in C^5([a,b])$, τότε το εφάλμα προσέγγισης δίνεται από τη σχέση:

$$3 \frac{h^5}{90} f^{(5)}(\xi), \quad \xi \in [a,b]$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το $\int_0^{1.5} x^4 dx$ (α) με τον τύπο $\frac{3}{8}$ Simpson

(β) $\frac{1}{3}$ Simpson ή (γ) σύνθετο κανόνα τραπεζίου $n=3$.

Να υπολογιστεί το σχετικό εφάλμα σε κάθε περίπτωση.

Λύση

$$\int_0^{1.5} x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_0^{1.5} = \frac{1.5^5}{5} = 1.51875 \text{ (ακριβής τιμή)}$$

(α) $h = \frac{1.5-0}{3} = 0.5$ ή $x_0=0, x_1=0+0.5 \cdot 1=0.5, x_2=1, x_3=1.5$

επομένως $\int_0^{1.5} f(x) dx \underset{x^4}{\approx} \frac{3}{8} h (f(x_0) + 3f(0.5) + 3f(1) + f(1.5))$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} (0 + 3 \cdot 0.5^4 + 3 \cdot 1^4 + 1.5^4)$$

$$= \frac{3}{16} (0.1875 + 3 + 5.0625) \approx 1.5469$$

Σχετικό
σφάλμα $\left| \frac{1.51875 - 1.5469}{1.51875} \right| = 1.8\%$

(ακριβής)

(β) $\frac{1}{3}$ Simpson

$$h = \frac{b-a}{2} = \frac{1.5}{2} = 0.75$$

$$x_0=0, x_1=0.75, x_2=1$$

$$\int_0^{1.5} f(x) dx \underset{x^4}{\approx} \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(0.75) + f(1.5))$$

$$= \frac{3/4}{3} (0 + 4 \cdot 0.75^4 + 1.5^4) = 1.5820$$

Σχετικό
σφάλμα $\left| \frac{1.51875 - 1.5820}{1.51875} \right| = 4.2\%$

$n=3$ (γ) σύνθετος τραπεζίου

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1.5-0}{3} = 0.5$$

$$\int_0^{1.5} f(x) dx \underset{x^4}{\approx} \frac{h}{2} (f(0) + 2f(0.5) + 2f(1) + f(1.5))$$

$$= \frac{1/2}{2} (0 + 0.125 + 2 + 5.0625)$$

σ. σφάλμα $= \left| \frac{1.51875 - 1.7968}{1.51875} \right| \approx 18.31\%$

Ανοικτοί τύποι Newton-Cotes.

Οι τύποι/κανόνες που αποδείξαμε μέχρι τώρα (τραπεζίου, Simpson) για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_a^b f(x) dx$, περιλαμβάνουν τα άκρα του διαστήματος $[a, b]$ (γι' αυτό κ' ονομάζονται κλειστοί). Μπορούν ν' αποδειχθούν τύποι (ένας από αυτούς δίνεται παρακάτω) που δεν περιλαμβάνουν τα σημεία (άκρα) a, b κ' ονομάζονται ανοικτοί τύποι Newton-Cotes.

Κανόνες μέσου σημείου.

Για τον υπολογισμό του $\int_a^b f(x) dx$

χρησιμοποιούμε (όπως κ' πριν) ένα πολυώνυμο παρεμβολής $L_0(x)$, της $y=f(x)$, μηδενικού βαθμού, δηλ. $L_0(x)=c$ (το $L_0(x)$ συμφωνεί με την $y=f(x)$ σ' ένα σημείο). Χρησιμοποιούμε σαν σημείο το μέσον $x_0 = \frac{a+b}{2}$, επομένως:

$$L_0(x_0) = c = f(x_0) \Rightarrow L_0(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\text{Οπότε} \quad \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_0(x) dx = \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

τύπος που ονομάζεται κανόνες μέσου σημείου.

Παρατήρηση

- ① Το $(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου με πλάτος $(b-a)$ κ' μήκος $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. (Θεωρούμε ότι $f(x) \geq 0$).
- ② Σφάλμα Εάν $f \in C^2[a, b]$, το σφάλμα προσέγγισης δίνει

των περιπτώσεων είναι ίσο με: $\frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$, $\xi \in [a, b]$.

(3) Σύνθετος κανόνας μέσου σημείου.

Ο παραπάνω κανόνας μπορεί να γενικευθεί στην περίπτωση $n+1$ ισαπέχοντων σημείων $x_j = a + jh$, $j=0, 1, \dots, n$ & $h = \frac{b-a}{n}$:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx h f(x_0 + \frac{h}{2}) + h f(x_1 + \frac{h}{2}) + \dots + h f(x_{n-1} + \frac{h}{2}) \\ &= h \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j + \frac{h}{2}). \end{aligned}$$

Σφάλμα: $\frac{b-a}{24} h^2 f''(\xi)$, $\xi \in (a, b)$

Παράδειγμα.

Να υπολογιστεί το $\int_1^2 (2+3x) dx$ με τον κανόνα μέσου σημείου:

Λύση

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ b &= 2 \\ x_0 &= \frac{1+2}{2} = 1.5 \end{aligned} \quad \int_1^2 (2+3x) dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (2-1) f(1.5) = 2 + 3 \cdot 1.5 = 6.5$$

$$x_0 = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

Ακριβής
απόκ.

$$\int_1^2 (2+3x) dx = 2x + \frac{3x^2}{2} \Big|_1^2 = 4 + 6 - 2 - \frac{3}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$$

Παρατήρηση

Ο κανόνας μέσου σημείου δίνει ακριβείς τιμές ολοκληρωμάτων, για πολυώνυμα μέχρι $1^{\text{ου}}$ βαθμού.

Παράδειγμα.

Να υπολογιστεί το: $\int_0^1 x^2 dx$ με (α) απλό κανόνα μέσου σημείου
(β) σύνθετο κανόνα μέσου σημείου $n=2$.

- (δ) ατρήσιμ κανόνα Τραπεζίου (ε) σύνθετο κανόνα Τραπεζίου $n=2$
 (ε) ατρήσιμ κανόνα $\frac{1}{3}$ Simpson (στ) σύνθετο κανόνα $\frac{1}{3}$ Simpson $n=4$
 (ζ) ατρήσιμ κανόνα $\frac{3}{8}$ Simpson. Τι παρατηρείται;

Λύση

$$I = \int_0^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3} \approx 0.333...$$

(α) Ατρήσιμ μέσος σημείου
 $a=0, b=1 \quad x_0 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$

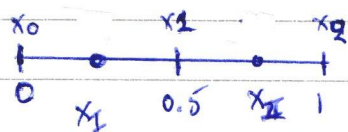
$$I \approx (1-0) f(0.5) = 0.5^2 = 0.25$$

$$\text{σχετικό σφάλμα} = \left| \frac{0.333 - 0.25}{0.333} \right| \approx 25\%$$

(β) Σύνθετος μέσος σημείου

$$h = \frac{b-a}{2} \quad x_I = 0.25, \quad x_{II} = 0.75$$

$$h = \frac{1}{2}$$



$$I \approx h (f(0.25) + f(0.75))$$

$$= 0.5 (0.0625 + 0.5625) = 0.3125$$

$$\text{σχετικό σφάλμα} = \left| \frac{0.333 - 0.3125}{0.333} \right| \approx 6.1\%$$

(γ) Ατρήσιμ Τραπεζίου

$$I \approx (1-0) \frac{f(0) + f(1)}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\text{σχετικό σφάλμα} = \left| \frac{0.333... - 0.5}{0.333...} \right| \approx 50\%$$

(δ) Σύνθετος Τραπεζίου

$$h = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$I \approx \frac{h}{2} (f(0) + 2f(0.5) + f(1))$$

$$= \frac{1}{4} (0 + 0.5 + 1) = 0.375$$

$$\text{σχετικό σφάλμα} = \left| \frac{0.333... - 0.375}{0.333...} \right| \approx 12.6\%$$

(ε) απλός $\frac{1}{3}$ Simpson
 $h = \frac{1}{2}$

$$I \approx \frac{1}{3} (f(0) + 4f(0.5) + f(1))$$

$$= \frac{4 \cdot 0.25 + 1}{6} = \frac{1}{3}$$

σχετικό σφάλμα = 0

(στ) εὐνόμος $\frac{1}{3}$ Simpson
 $n=4$ $h=\frac{1}{4}=0.25$

$x_0=0, x_1=0.25$

$x_2=0.5, x_3=0.75, x_4=1$

$$I \approx \frac{1}{3} (f(0) + 4f(0.25) + 2f(0.5) + 4f(0.75) + f(1))$$

$$= \frac{0.25 + 0.5 + 2 \cdot 0.25 + 1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

σχετικό σφάλμα = 0

(ζ) απλός $\frac{3}{8}$ Simpson
 $h = \frac{1}{3}$

$x_0=0, x_1=\frac{1}{3}, x_2=\frac{2}{3}, x_3=1$

$$I \approx \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} (f(0) + 3f(\frac{1}{3}) + 3f(\frac{2}{3}) + f(1))$$

$$= \frac{1}{8} (0 + 3 \cdot \frac{1}{3^2} + 3 \cdot \frac{4}{3^2} + 1) = \frac{1}{3}$$

σχετικό σφάλμα = 0

Παρατήρηση

- (α) Οι απλοί τύποι δίνουν λιγότερο ακριβή αποτελέσματα από τους εὐνόμους
- (β) Οι κανόνες του Simpson δίνουν ακριβή αποτελέσματα, γιατί το πολυώνυμο παρεμβολής της $f(x)=x^2$ (στ' ανώτατα σημεία) συμπίπτει με την $f(x)$ (δηλ. $L_2(x)=x^2=L_3(x)$).

Παραμετρική θεωρία κανόνων ολοκλήρωσης

(A) Μέθοδος προσδιορισμένων συντελεστών.

Οι άλλοι/κανόνες ολοκλήρωσης που περιγράψαμε μέχρι τώρα (Τραπεζίου, Simpson, μέγος σημείου), μπορούν να θεωρηθούν ειδικές περιπτώσεις αυτής της μορφής:

$$\text{(κλειστοί)} \quad \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \sum_{j=0}^n w_j \cdot f(x_0 + jh) + R_n, \quad R_n = \text{σφάλμα} \quad (1)$$

$$\text{(ανοικτοί)} \quad \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \sum_{j=1}^{n-1} w_j f(x_0 + jh) + R_n \quad (2)$$

όπου $w_j, j=0,1,2,\dots,n$ είναι συντελεστές (προς προσδιορισμό) ή τα (δεδομένα) $f(x_0 + jh), j=0,1,2,\dots,n$ δοσμένες/γνωστές τιμές της συνάρτησης που θέλουμε να ολοκληρώσουμε.

π.χ

Ⓘ κανόνας μέγος σημείου:

$$\int_a^b f(x) dx = \underbrace{(b-a)}_w f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R \quad R = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$$

$x_0 = a, h = \frac{b-a}{2}, x_1 = b$

Ⓜ απλός κανόνας τραπεζίου

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) + R & R &= -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi) \\ &= \underbrace{\frac{b-a}{2}}_{w_1} f(a) + \underbrace{\frac{b-a}{2}}_{w_2} f(b) + R \end{aligned}$$

Για καθέναν από τους τύπους ολοκλήρωσης, επιλέγονται κατάλληλα τα βάρη w_j , έτσι ώστε οι σχέσεις ① ή ② να

παρέχουν μηδενικό εφάλμα R_n , για πολώνυμα όσο το δυνατόν μεγαλύτερο βαθμού (ή, λόγω γραμμικότητας της πράξης της ολοκλήρωσης, αυτό είναι ισοδύναμο με το μηδενικό του R_n για όσο το δυνατόν περισσότερα μονώνυμα από τα $1, x, x^2, \dots$).
 Έτσι με διαδοχική αντικατάσταση, στους τύπους ① ή ②, με $f(x)=1$, $f(x)=x$, $f(x)=x^2, \dots$, παίρνουμε ένα γραμμικό σύστημα ως προς τα w_j , με καθόριστες εξισώσεις, η λύση του οποίου δίνει τα w_j .

Παράδειγμα (μέσω σημείου)
 έχουμε

$$\int_a^b f(x) dx = w \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R \quad \text{με } w \text{ προς προσδιορισμό}$$

$$\text{εάν } f(x)=1, R=0 \quad \text{ή} \quad (f(x)=1 \Rightarrow f\left(\frac{a+b}{2}\right)=1)$$

$$\int_a^b 1 dx = (b-a) = w \cdot 1 \Rightarrow w = b-a$$

$$\text{ή} \quad \int_a^b f(x) dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R \quad \left(\begin{array}{l} \text{γνωστός τύπος} \\ \text{μέσω σημείου} \end{array}\right)$$

Παράδειγμα (απλός τύπος τραπεζίου)

$$\int_a^b f(x) dx = w_1 f(a) + w_2 f(b) + R \quad \text{με } w_1, w_2 \text{ για προσδιορισμό}$$

$$\text{εάν } f(x)=1, R=0 \quad \text{ή} \quad f(x)=1 \Rightarrow f(a)=1=f(b)$$

$$\int_a^b 1 dx = w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 \Rightarrow w_1 + w_2 = b-a \quad \text{①}$$

$$\text{εάν } f(x)=x, R=0 \quad \text{ή} \quad f(x)=x \Rightarrow f(a)=a, f(b)=b$$

$$\int_a^b x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2} = a w_1 + b w_2 \quad \text{②}$$

$$\textcircled{i} \Rightarrow w_1 = (b-a) - w_2 \quad \text{ή αντικαθιστώντας στην } \textcircled{ii} :$$

$$\alpha \{(b-a) - w_2\} + b w_2 = \frac{b^2 - a^2}{2} \Rightarrow \alpha(b-a) + (b-a) w_2 = \frac{(b+a)(b-a)}{2}$$

$$w_2 = \frac{b+a}{2} - \alpha = \frac{b-a}{2} \quad \text{ή} \quad w_1 = (b-a) - \frac{b-a}{2} = \frac{b-a}{2}$$

Επομένως,

$$\int_a^b f(x) dx = \underbrace{\frac{b-a}{2} f(a) + \frac{b-a}{2} f(b)}_{(b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}} + R \quad \text{ο γνωστός κανόνας (απλός) τραπεζίου}$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστούν τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ έτσι ώστε ο τύπος:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \alpha f(-1) + \beta f(1) + \gamma f'(-1) + \delta f'(1)$$

να είναι ακριβής, με βαθμό ακρίβειας 3 (δηλ. μέχρι η' μονώνυμα της μορφής x^3).

Λύση

Εάν $f(x) = 1$, τότε: $f'(x) = 0$

$$\int_{-1}^1 1 dx = x \Big|_{-1}^1 = 2 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 0 + \delta \cdot 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 2 \quad \textcircled{i}$$

Εάν $f(x) = x$, $f'(x) = 1$

$$\int_{-1}^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 = 0 = \alpha(-1) + \beta \cdot 1 + \gamma + \delta \Rightarrow -\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \quad \textcircled{ii}$$

Όταν $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3} = \alpha \cdot 1 + \beta - 2\gamma + 2\delta \quad \textcircled{iii}$$

Τέλος, εάν $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_{-1}^1 = 0 = -\alpha + b + 3\gamma + 3\delta \quad \textcircled{iv}$$

$\textcircled{iv} - \textcircled{ii} \Rightarrow 2\gamma + 2\delta = 0 \Rightarrow \gamma = -\delta$ & αντικαθιστώντας στην $\textcircled{iii}$ (με χρήση της $\textcircled{i}$):

$$\frac{2}{3} = 2 + 4\delta \Rightarrow \delta = -\frac{1}{3} \text{ οπότε } \gamma = \frac{1}{3}$$

Η $\textcircled{ii}$ γίνεται $0 = -\alpha + b + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = b$, οπότε από την $\textcircled{i}$,
 $2\alpha + 1 = 2 \Rightarrow \alpha = b = 1$.

Άρα

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= 1 \cdot f(-1) + 1 \cdot f(1) + \frac{1}{3} f'(-1) - \frac{1}{3} f'(1) \\ &= f(-1) + f(1) + \frac{1}{3} f'(-1) - \frac{1}{3} f'(1) \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \text{έχει βαθμό} \\ \text{ακρίβειας 3} \end{array} \right)$$

#

Β) Ολοκλήρωση κατά Gauss.

Εάν θέσουμε να γενικεύσουμε παραπέρα, τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών, ή να έχουμε μία σειρά από μεθόδους (που αρκετές φορές δίνουν πιο ακριβή αποτελέσματα ολοκλήρωσης, από εκείνα των κλειστών/ανοικτών τύπων), θεωρούμε ότι:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) + R_n \quad (1), \quad R_n = \text{σφάλμα ολοκλήρωσης.}$$

όπου $w_j, j=0, \dots, n$ είναι $(n+1)$ βάρη/συντελεστές που πρέπει να προσδιοριστούν ή $x_j, j=0, \dots, n$ $(n+1)$ σημεία παρεμβολής που πρέπει ή αυτά να προσδιοριστούν ($2(n+1) = 2n+2$ άγνωστοι συνολικά). Τα x_j λαμβάνονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε η σχέση (1) να είναι ακριβής (δηλ. $R_n = 0$) για πολώνυμα όσο το δυνατόν μεγαλύτερου βαθμού. (συνήθως για μονώνυμα $1, x, x^2, \dots, x^{2n+1}$ / $2n+2$ συνολικά).

Παρατήρηση

Οι τύποι ολοκλήρωσης που προκύπτουν, δίνουν αρκετές φορές πιο ακριβή αποτελέσματα γιατί δεν είναι απαραίτητο τα σημεία x_j να είναι ισοπέχοντα ή να περιλαμβάνουν τ' άκρα a ή b (βείτε προβλήματα ακρίβειας που εμφανίζονται σε τέτοιες περιπτώσεις, στη βιβλίο που ακολουθεί).

(I) Μέθοδος Gauss 2 σημείων.

Οι παραπάνω μέθοδοι (1) ονομάζονται μέθοδοι Gauss. Η απλούστερη από αυτές είναι η μέθοδος Gauss δύο σημείων, που περιγράφεται παρακάτω.

Έστω ότι για ευκολία θέσουμε να υπολογίσουμε το:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \quad (\text{δηλ. } a=-1, b=1)$$

Θέσουμε να προσδιορίσουμε βάρη/συντελεστές c_1, c_2 ή σημεία

x_1, x_2 τέτοια ώστε: $\int_{-1}^1 f(t) dt = C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2)$ (2)

για f πολώνυμα/μονώνυμα όσο το δυνατόν μεγαλύτερου βαθμού.

Επειδή έχουμε 4 αγνώστους ($n=1, 2(n+1)=2(1+1)=4$), θέλουμε η (2) να ισχύει για n μονώνυμα $1, x, x^2, x^3$.
Επομένως, εάν $f(x)=1$: ($f(x)=1 \Rightarrow f(x_1)=1=f(x_2)$)

$$\int_{-1}^1 1 dx = x \Big|_{-1}^1 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 + C_2 = 2 \quad (i)$$

Εάν, $f(x)=x$:

$$\int_{-1}^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 = 0 = C_1 x_1 + C_2 x_2 \quad (ii)$$

Όταν $f(x)=x^2$:

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3} = C_1 x_1^2 + C_2 x_2^2 \quad (iii)$$

Τέλος, $f(x)=x^3$:

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 = 0 = C_1 x_1^3 + C_2 x_2^3 \quad (iv)$$

Έτσι προκύπτει ένα, μη-γραμμικό, σύστημα, η λύση του οποίου είναι:

$$C_1 = C_2 = 1 \quad \eta \quad x_1 = -x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.5774$$

Επομένως,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 1 \cdot f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1 \cdot f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

(ακριβώς για $1, x, x^2, x^3$)

Παρατήρηση.

(α) Από τα παραπάνω προκύπτει ότι: (για τυχόντα $y=f(x)$)

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

(β) Εάν θέλουμε να υπολογίσουμε (γενικότερα) το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$

τότε με αλλαγή μεταβλητής από x σε t :

$$x = \frac{\beta - \alpha}{2}t + \frac{\beta + \alpha}{2} \quad \text{έχουμε}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{-1}^1 \underbrace{\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) f\left(\frac{\beta - \alpha}{2}t + \frac{\alpha + \beta}{2}\right)}_{g(t)} dt \quad \underline{\underline{(\alpha)}}$$

$$= \frac{\beta - \alpha}{2} \left(g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right).$$

Παράδειγμα.

Δίνεται το $\int_{-1}^1 \frac{1}{x+2} dx$. Να υπολογισθεί με τον κανόνα δύο σημείων των Gauss.

Λύση.

(ακριβής τιμή) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x+2} dx = \ln(x+2) \Big|_{-1}^1 = \ln 3 - \ln 1 \approx 1.09861.$

κανόνας δύο σημείων $\int_{-1}^1 \frac{1}{x+2} dx \approx f(-0.5774) + f(0.5774) \approx 1.09091$

Σχετικό σφάλμα: $\left| \frac{1.09861 - 1.09091}{1.09861} \right| \approx 0.007 \quad \text{ή} \quad 0.7\%$

Παράδειγμα.
Δίνεται το

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx.$$

- (α) Να προσδιοριστεί η ακριβής τιμή του
(β) Να υπολογιστεί το σφάλμα με τη βοήθεια της μεθόδου Gauss 2 σημείων

Λύση.

(α) Το $\int x^2 e^{-x} dx = \int x^2 (-e^{-x})' dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int x (-e^{-x})' dx$
 $= -x^2 e^{-x} - 2 x e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2 x e^{-x} - 2 e^{-x} + C$
 $= -e^{-x} (x^2 + 2x + 2) + C.$

Επομένως, $\int_{-1}^1 x^2 e^{-x} dx = -e^{-x} (x^2 + 2x + 2) \Big|_{-1}^1 = e^1 - 5$
 $\approx 0.160603.$

(β) $\alpha=0$ $\beta=1$ Αλλαγή μεταβλητής:
 $x = \frac{\beta-\alpha}{2}t + \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}.$

Επομένως:

$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \frac{\beta-\alpha}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{\beta-\alpha}{2}t + \frac{\alpha+\beta}{2}\right) dt =$
 $= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right) dt \quad \text{Gauss}$
 $= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \underbrace{f\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right)}_{g(t)} dt \quad \text{0.5774}$
 $= \frac{1}{2} \left\{ g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\} =$
 $= \frac{1}{2} \left\{ f\left(\frac{1}{2} \cdot 0.5774 + \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2} \cdot 0.5774 + \frac{1}{2}\right) \right\}$
 $= \dots \approx 0.159412$

(σχετικό σφάλμα: $\left| \frac{0.160603 - 0.159412}{0.160603} \right| = 0.007 \approx 0.7\%$)

Παράδειγμα
Έστω ότι έχουμε το $\int_1^3 (x^6 - x^2 \sin 2x) dx$ (ακριβής τιμή ≈ 317.3442)

(α) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα με τον απλό κανόνα τραπεζίου.

(β) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα με τον απλό κανόνα $\frac{1}{3}$ Simpson

(γ) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα με τη μέθοδο Gauss 2 σημείων

Λύση

(α) $a=1, b=3$

$$\int_1^3 f(x) dx \approx \frac{3-1}{2} (f(1) + f(3)) =$$

$$= (1^6 - 1 \sin 2 + 3^6 - 3^2 \sin 6) \approx 731.6054 (!!!)$$

$$(β) \int_1^3 f(x) dx \approx \frac{\frac{3-1}{2}}{3} (f(1) + 4f(2) + f(3)) \approx 333.2381$$

(γ) $a=1, b=3$ αλλαγή μεταβλητής: $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2} = \frac{3-1}{2}t + \frac{3+1}{2} \Rightarrow$
 $x = t+2 \Rightarrow dx = dt$

$$\int_1^3 (x^6 - x^2 \sin 2x) dx = \int_{-1}^1 \underbrace{\left\{ (t+2)^6 - (t+2)^2 \sin 2(t+2) \right\}}_{g(t)} dt$$

$$\approx g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\right)$$

≈ 306.8199 (δίν. με τη μέθοδο Gauss έχουμε μεγαλύτερη ακρίβεια).

#

(II) Μέθοδος Gauss των σημείων.

εφαρμόζονται αναλόγως (με την περίπτωση των 2 σημείων), εάν έχουμε:

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3) \quad (3)$$

να είναι ακριβής για πολυώνυμα/μονώνυμα όσο το δυνατόν μεγαλύτερου βαθμού (π.χ μονώνυμα $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$) τότε προκύπτει

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right).$$

$$\begin{cases} \frac{5}{9} \approx 0.55556 \\ \frac{8}{9} \approx 0.88889 \\ \sqrt{\frac{3}{5}} \approx 0.77459 \end{cases}$$

Παρατήρηση

(α) Για ταχύδα $f(x)$ έχουμε:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

(β) Εάν θέλουμε να προσεγγίσουμε το $\int_a^b f(x) dx$, τότε κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής:

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{εφαρμόζουμε όπως} \\ \text{πριν} \end{array} \right)$$

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το $\int_0^\pi \sin x dx$ με τη μέθοδο Gauss των σημείων.

Λύση.

(ακριβώς
 την) $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = \cos 0 - \cos \pi = 2$

Εδώ $a=0, b=\pi$, αλλαγή μεταβλητής $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2} = \frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}$
 $dx = \frac{\pi}{2} dt$

ΕΠΟΜΕΝΩΣ: $\int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)}_{g(t)} dt$ Gauss
3ων βυθίων

$$\begin{aligned} &\approx \frac{5}{9} g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} g(0) + \frac{5}{9} g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \\ &= \frac{5}{9} \sin\left(-\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{8}{9} \sin\frac{\pi}{2} + \frac{5}{9} \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \dots \approx 2.0014 \end{aligned}$$

Σχετικό σφάλμα $\left| \frac{2 - 2.0014}{2} \right| = 0.0007$
ή 0.07%

Ο (απλός) κανόνας $\frac{1}{3}$ Simpson θα δώσει:

$f(x) = \sin x$ $\frac{\frac{\pi}{2} - 0}{3} \left(f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(\pi) \right) = \frac{\pi}{6} 4 \cdot \sin\frac{\pi}{2} \approx 2.0933$

Σχετικό σφάλμα $\left| \frac{2 - 2.0933}{2} \right| \approx 4.67\%$

#

$$\int_a^b G(x) dx \approx \frac{(b-a)}{2} \left(G(a) + 2G\left(\frac{a+b}{2}\right) + G(b) \right)$$

Τελικά

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx \approx \frac{(b-a)(c-d)}{16} \left\{ f(a,c) + 2f\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + f(a,d) + \right.$$

$$+ 2f\left(\frac{a+b}{2}, c\right) + 4f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + f(b,c) +$$

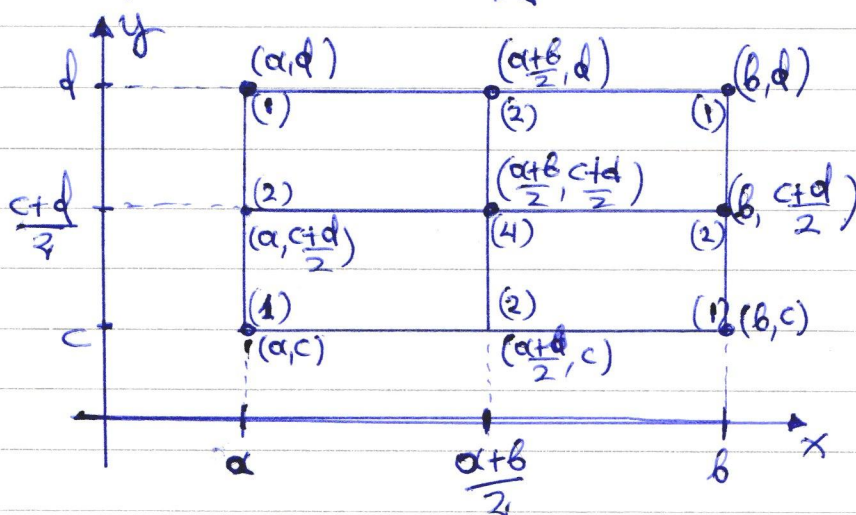
$$2f\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + f(b,d) \Big\}$$

$$= \frac{(b-a)(c-d)}{16} \left\{ f(a,c) + f(a,d) + f(b,c) + f(b,d) + \right.$$

$$2\left(f\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, c\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, d\right)\right)$$

$$+ 4f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \Big\}$$

Το παραπάνω "πλέγμα" δείχνει τα σημεία/κόμβους στα οποία πρέπει να υπολογίσουμε τις τιμές της f (για να προσεγγίσουμε το $\iint f(x,y) dA$) ή, μεθα σε παρένθεση, το αντίστοιχο βάρος που πρέπει να πολλαπλασιάσουμε κάθε τιμή από αυτές.



Παράδειγμα
Να υπολογισθεί το $\int_{2.1}^{2.5} \left(\int_{1.2}^{1.4} xy^2 dy \right) dx$.

Λύση

(ακριβώς)
συν)

$$\int_{2.1}^{2.5} \left(\int_{1.2}^{1.4} xy^2 dy \right) dx = \left(\int_{2.1}^{2.5} x dx \right) \left(\int_{1.2}^{1.4} y^2 dy \right)$$

$$= \frac{x^2}{2} \Big|_{2.1}^{2.5} \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{1.2}^{1.4} = \frac{1}{6} (2.5^2 - 2.1^2) (1.4^3 - 1.2^3) \approx 0.3116$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα τραπεζίου (ως προς x ή y).

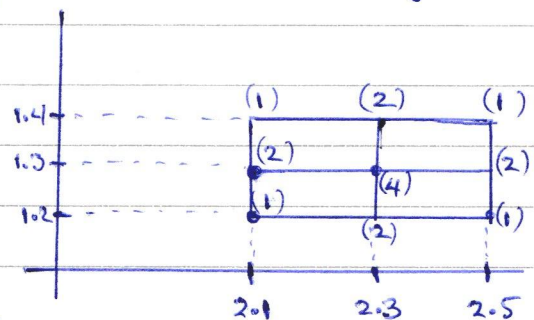
Εδώ $f(x,y) = xy^2$:

$$f(2.1, 1.2) = 3.024, \quad f(2.1, 1.3) = 3.549$$

$$f(2.1, 1.4) = 4.116, \quad f(2.3, 1.2) = 3.312$$

$$f(2.3, 1.3) = 3.887, \quad f(2.3, 1.4) = 4.508$$

$$f(2.5, 1.2) = 3.6, \quad f(2.5, 1.3) = 4.225, \quad f(2.5, 1.4) = 4.9$$



Ηρα

$$\int_{2.1}^{2.5} \left(\int_{1.2}^{1.4} xy^2 dy \right) dx \approx \frac{(2.5-2.1)(1.4-1.2)}{16} \left\{ f(2.1, 1.2) + 2f(2.1, 1.3) + \right.$$

$$+ f(2.1, 1.4) + 2f(2.3, 1.2) + 4f(2.3, 1.3) + 2f(2.3, 1.4) + f(2.5, 1.2) + 2f(2.5, 1.3)$$

$$+ f(2.5, 1.4) \Big\} = \dots = 0.31188$$

$$\text{εχέσις σφάλμα} = \left| \frac{0.3116 - 0.31188}{0.3116} \right| = 0.08\%$$

Ορισμός.

Η μέση τιμή της συνάρτησης $u=f(x,y)$, στο ορθογώνιο χωρίο R , $R=\{(x,y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx}{(b-a)(d-c)}$$

Παράδειγμα

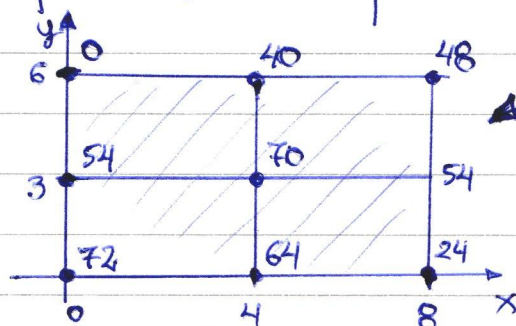
Η θερμοκρασία μιας θερμαινόμενης ορθογώνιας επιφάνειας τηλάρας δίνεται από τη συνάρτηση:

$$T(x,y) = 2xy + 2x - x^2 - 2y^2 + 72$$

Εάν η τηλάρα έχει μήκος 8m (διεύθυνση x) ή πλάτος 6m (διεύθυνση y), να υπολογιστεί η μέση θερμοκρασία.

Λύση.

Εάν θεωρήσουμε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων, η τοποθέτησή μας της τηλάρας όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



τηλάρα

Στους κόμβους φαίνεται η θερμοκρασία της τηλάρας

π.χ. $T(0,0) = 72$

$T(0,3) = -2 \cdot 3^2 + 72 = 54$

τότε η μέση θερμοκρασία: $\bar{T} = \frac{\int_0^8 \left(\int_0^6 T(x,y) dy \right) dx}{8 \times 6}$

Το $\int_0^8 \int_0^6 T(x,y) dy dx$ με τη μέθοδο του τραπέζιου είναι 160 με

$$\int_0^8 \left(\int_0^6 T(x,y) dy \right) dx \approx \frac{8 \times 6}{16} (72 + 2 \cdot 54 + 0 + 2 \cdot 64 + 4 \cdot 70 + 2 \cdot 40 + 24 + 2 \cdot 54 + 48) = \frac{48}{16} \times 848$$

ε' η μέση τιμή

$$\bar{T} = \frac{\frac{48}{16} \cdot 848}{8 \times 6} = \frac{848}{16} = 53$$

#