

Ολοκλήρωση.

Ένα από τα προβλήματα που αντιμετωπίζει κανείς στον Απειροστικό λογισμό ή στις εφαρμογές του, είναι ο υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος

$$\int_a^b f(x) dx \quad (a < b)$$

όπου $f(x)$ γνωστή συνάρτηση.

Παρατήρηση

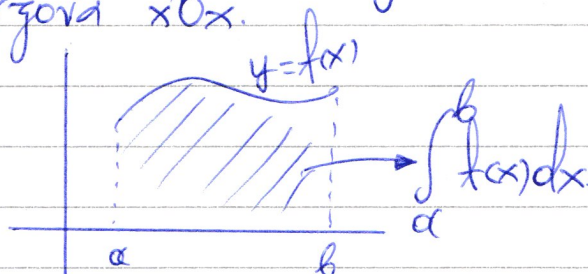
(1) Ο τρόπος υπολογισμού του παραπάνω ολοκληρώματος είναι ο εξής: υπολογίζουμε μια συνάρτηση $y=F(x)$ τ.ω $F'(x)=f(x)$, οπότε από το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού, έχουμε:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Πολλές φορές, η εύρεση μιας τέτοιας συνάρτησης $y=F(x)$ (αντιπαράγωγος) είναι συχνά διαδικασία επίπονη ή μερικές φορές αδύνατη. Μόνο ένας μικρός αριθμός ορισμένων ορισμένων ολοκληρωμάτων μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά.

Ένα επιπλέον πρόβλημα (στον υπολογισμό ορισμένων ολοκληρωμάτων) παρουσιάζεται όταν δεν είναι γνωστός ο αναλυτικός τύπος της $f(x)$, αλλά δίνονται πειραματικά δεδομένα/μέτρήσεις $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^n$ (με $y_k = f(x_k)$).

(2) Εάν η $f(x) \geq 0$, τότε είναι γνωστό ότι το $\int_a^b f(x) dx$ παριστάνει το εμβαδόν του (φραγμένου) χωρίου, που περικλείεται από το γράφημα της $y=f(x)$, τις ευθείες $x=a$ ή $x=b$ ή τον άξονα xOx .



Στην παράγραφο αυτή δίνουμε αριθμητικές μεθόδους για τον υπολογισμό ορισμένων ολοκληρωμάτων.

Η βασική ιδέα των μεθόδων αυτών είναι η εξής: Έστω ότι δίνονται $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^n$ σημεία μιας συνάρτησης $y=f(x)$ (τους οποίους ο αναγνώστης μπορεί να είναι γνωστός ή όχι) ή τα $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^n$ είναι πειραματικά δεδομένα (ή συνδέονται με μια σχέση $y=f(x)$). Για τον υπολογισμό του $\int_a^b f(x)dx$, προσεγγίζουμε την $y=f(x)$ με τη βοήθεια ενός πολυωνύμου παρεμβολής (συνήθως Lagrange ή spline) $p_n(x)$ ή υπολογίζουμε το $\int_a^b p_n(x)dx$. Το ολοκλήρωμα αυτό αποτελεί μια προσέγγιση (εκτίμηση) του $\int_a^b f(x)dx$.
 Δηλ. εάν $p_n(x) \approx \sum_{j=0}^n f(x_j) \ell_j(x)$ πολυώνυμο παρεμβολής της $y=f(x)$ τότε:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_n(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{j=0}^n f(x_j) \ell_j(x) \right) dx = \sum_{j=0}^n f(x_j) \underbrace{\int_a^b \ell_j(x) dx}_{w_j}$$

Οι ποσότητες w_j , ονομάζονται βάρη τις ολοκληρώσεις (ή είναι αυτές που πρέπει να υπολογιστούν, για την εύρεση του $\int_a^b p_n(x)dx$)

Επειδή υπάρχουν διαφορετικοί τρόποι παρεμβολής (διαφορετικός βαθμός πολυωνύμων παρεμβολής ή διαφορετικός τρόπος επιλογής των σημείων $x_0, \dots, x_n$) υπάρχουν ή διαφορετικοί τρόποι (μέθοδοι) ολοκληρώσεως. Εάν τα σημεία $x_0, \dots, x_n$ είναι ισαπέχοντα, έχουμε τους λεγόμενους τύπους Newton-Cotes. Εάν τα $x_0, \dots, x_n$ δεν είναι ισαπέχοντα έχουμε τους τύπους Gauss. Οι τύποι Newton-Cotes διακρίνονται σε κλειστούς αν σε αυτούς περιλαμβάνονται τα a, b (συνήθως $x_0=a, x_n=b$), απλώς κλειστοί αν όχι.

Παρατήρηση.

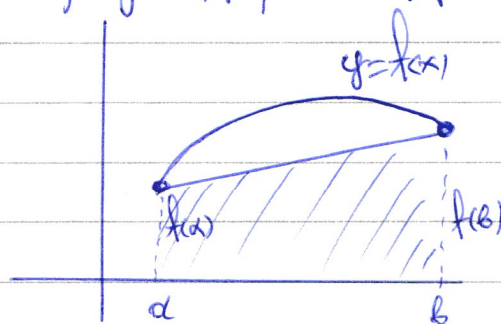
Στους τύπους ολοκληρώσεως γίνεται κάθε φορά προσπάθεια να εκτιμηθεί το σφάλμα ολοκληρώσεως (τουλάχιστον ένα άνω φράγμα του).

Μέθοδος Τραπεζίου

(Α) Απλός τύπος τραπεζίου.

Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση ή για χρήση ευκολίας $f \geq 0$
θέλουμε να υπολογίσουμε:

$$\int_a^b f(x) dx$$



Προσεγγίζουμε/Παρεμβάζουμε την $y=f(x)$ με ένα πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange 1^{ου} βαθμού, $L(x)$, που περνά (παρεμβάζει την $f(x)$) από τα σημεία $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ (ευθεία που διέρχεται από τα σημεία). Το:

$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) = \\ &= f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} (x-a). \end{aligned}$$

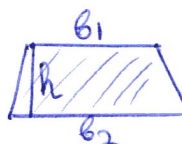
$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_1 &= b \end{aligned}$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b L(x) dx = \int_a^b \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} (x-a) \right) dx \\ &= f(a) x \Big|_a^b + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \left(\frac{x^2}{2} - ax \right) \Big|_a^b = \\ &= (b-a) f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \underbrace{\left(\frac{b^2}{2} - ab - \frac{a^2}{2} + a^2 \right)}_{\frac{1}{2}(b-a)^2} \Rightarrow \\ \int_a^b f(x) dx &\approx (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned}$$

Παρατήρηση

Το $(b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}$ είναι το συμβολόν του τραπεζίου με κορυ



$$E_{\text{трапеции}} = \frac{b_1 + b_2}{2} \cdot h$$

φες τα σημεία $(a, 0), (a, f(a)), (b, f(b)), (b, 0)$ (απ' όπου κ' το όνομα μέθοδος τραπέζιου).

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το $\int_1^2 (2+3x) dx$ με τη μέθοδο τραπέζιου.

Λύση

$$\int_1^2 (2+3x) dx \approx (2-1) \frac{f(1)+f(2)}{2} = \frac{5+8}{2} = 6.5$$

$a=1$
 $b=2$

Ακριβής υπολογισμός

$$\int_1^2 (2+3x) dx = 2x + \frac{3x^2}{2} \Big|_1^2 = 2 \cdot 2 + \frac{3 \cdot 2^2}{2} - 2 - \frac{3}{2} = 8 - \frac{3}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$$

Παρατήρηση

Ο απλός τύπος τραπέζιου δίνει ακριβή τιμή του ορισμένου ορίσματος για πολυώνυμα μέχρι 1ου βαθμού.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το $\int_0^2 (x^2-5x+6) dx$ με τη μέθοδο τραπέζιου

Λύση

$$\int_0^2 (x^2-5x+6) dx \approx (2-0) \frac{f(0)+f(2)}{2} = 6+0 = 6$$

$a=0$
 $b=2$

Ακριβής τιμή: $\int_0^2 f(x) dx = \frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 6x \Big|_0^2 = \frac{8}{3} - 10 + 12 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}$

Σχετικό σφάλμα (απόστο)	$\left \frac{\frac{14}{3} - 6}{\frac{14}{3}} \right = 28.5\%$
-------------------------------	---

Παράδειγμα
Να υπολογισθεί το $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x dx$ με τη μέθοδο Τραπεζίου.

Λύση

$\alpha = \pi/6$
 $\beta = \pi/2$
 $f(x) = \sin x$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x dx \approx \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}_{\pi/3} \frac{f(\pi/6) + f(\pi/2)}{2} = \frac{\pi}{3} \frac{\frac{1}{2} + 1}{2} = \frac{\pi}{3} \frac{3}{4} \approx 0,785398$$

Ακριβής υπολογισμός: $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866025$

Σχετικό σφάλμα: $\left| \frac{0,866025 - 0,785398}{0,866025} \right| = 0,093$ ή 9,3%
(απόλυτο)

Σφάλμα σγκλήρωσης (γνωστός ο αναγωγικός τύπος της $y=f(x)$)
Εάν $f(x) \in C^2([a,b])$ τότε το σφάλμα σγκλήρωσης $R_2(f)$:

$$R_2(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi) \quad \text{για κάποιο } \xi \in (a,b) \text{ (άγνωστο)}$$

Ένα άνω φράγμα του σφάλματος δίνεται από τη σχέση:

$$|R_2(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_{\infty} = \frac{h^3}{12} \|f''\|_{\infty}$$

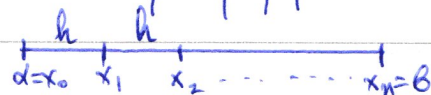
όπου $h=b-a$ ή $\|f''\|_{\infty} = \max_{x \in [a,b]} \{ |f''(x)| \}$.

(B) Σύνθετος τύπος Τραπεζίου.

Παρατήρηση.

Δίδουμε ότι το εμβαδόν ογκύρωσης με τον απλό τύπο τραπεζίου ($R_2(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi)$), εξαρτάται από το μήκος $h=b-a$ του διαστήματος $[a,b]$. Έτσι όταν το μήκος του $[a,b]$ είναι μεγάλο εφαρμόζεται ο χειρότερος σύνθετος τύπος τραπεζίου. Η φιλοσοφία πίσω από αυτόν τον τύπο είναι η εξής:

(α) Χωρίζουμε το διάστημα $[a,b]$ σε n υποδιαστήματα, καθενα μήκους $h = \frac{b-a}{n}$, με τη βοήθεια των ισαπέχοντων σημείων (ομοιόμορφη διαμέριση) $x_j = a + jh$, $j=0, \dots, n$ (πλ. σημεία).



(β) Σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[x_j, x_{j+1}]$, $j=0, \dots, n-1$ εφαρμόζουμε τον τύπο του (απλού) τραπεζίου.

Έχουμε λοιπόν:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx \approx \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} L_1^{(j)}(x) dx$$

← Lagrange 1ου βαθμού στο $[x_j, x_{j+1}]$

$$\stackrel{\substack{\text{απλός} \\ \text{τύπος τραπεζίου}}}{=} \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) \frac{f(x_j) + f(x_{j+1}))}{2} = \sum_{j=0}^{n-1} h \frac{f(x_j) + f(x_{j+1}))}{2}$$

$$x_j = a + jh \\ x_{j+1} = a + (j+1)h$$

$$= \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

$$= \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n)) \quad h = \frac{b-a}{n}$$

σύνθετος κανόνας τύπος τραπεζίου.

Παρατήρηση (πλεονεκτήματα σύνθετου κανόνα τραπεζίου)

- (i) Με χρήση του σύνθετου κανόνα τραπεζίου, μειώνεται η τιμή του h , επομένως ή του εσφαλματος στρογγύλευσης.
- (ii) Αποφεύγουμε να χρησιμοποιούμε πολυώνυμα παρεμβολής μεγάλου βαθμού (όσο μεγαλώνει ο βαθμός, μεγαλώνουν οι ταλαντώσεις των πολυωνύμων παρεμβολής, οπότε ίσως αυξάνεται το εφάλμα στρογγύλευσης).

Σφάλμα στρογγύλευσης

Εάν $f(x) \in C^2[a,b]$, τότε το εφάλμα στρογγύλευσης με το σύνθετο τύπο τραπεζίου είναι:

$$R_2(f) = -\frac{(b-a)}{12} h^3 f''(\xi) \quad \text{για κάποιο } \xi \in [a,b]$$

Ένα άνω φράγμα του εσφαλματος δίνεται από τη σχέση:

$$|R_2(f)| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \|f''\|_{\infty}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Να υπολογισθεί το $\int_0^2 (x^2 - 5x + 6) dx$ με το σύνθετο τύπο τραπεζίου

(i) $n=2$ (τρία σημεία).

(ii) $n=4$

Λύση

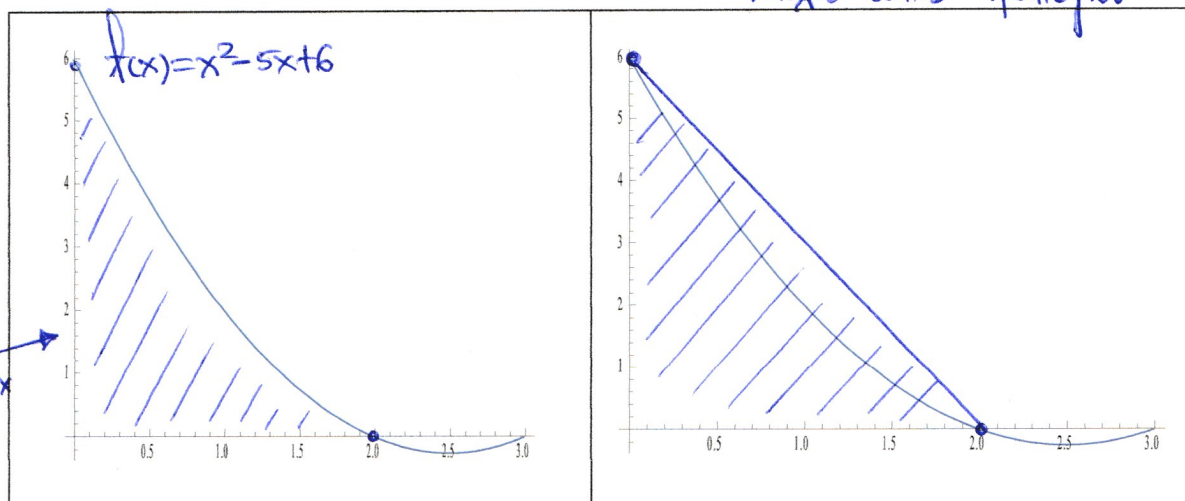
(i) Εδώ $h = \frac{2-0}{2} = 1$ & $x_j = 0 + j \cdot h = j \quad j=0,1,2$
 άρα $x_0=0, x_1=1, x_2=2$.

$$\int_0^2 (x^2 - 5x + 6) dx \approx \frac{h}{2} (f(0) + 2f(1) + f(2)) = \frac{1}{2} (6 + 2 \cdot 2 + 0) = 5$$

Σχετικό εφάλμα (απόλυτο) $\left| \frac{14\frac{1}{3} - 5}{14\frac{1}{3}} \right| = 0,07 \text{ ή } 7\%$

(Είδαμε: σχετικό εφάλμα με αυτόν τύπο τραπεζίου 28.5%)

Απλός τύπος Τραπεζίου



$\int_0^2 (x^2 - 5x + 6) dx$
ακριβής
αγν

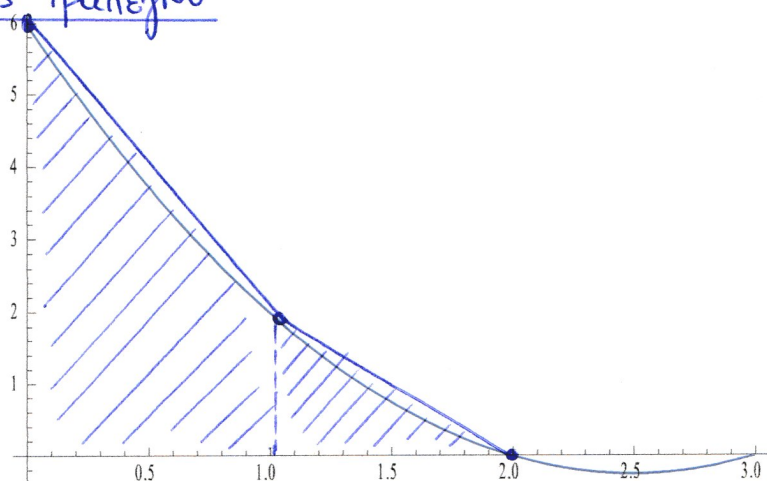
Σύνθετος τύπος Τραπεζίου

$n=2$

$x_0=0$

$x_1=1$

$x_2=2$



$n=4$

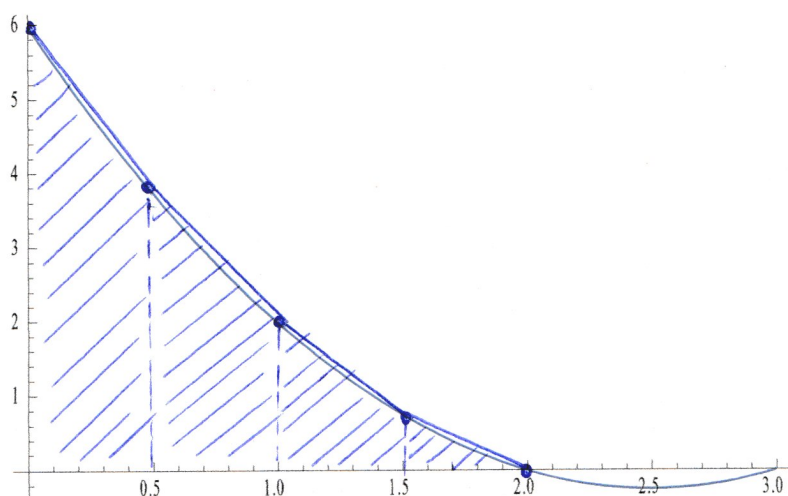
$x_0=0$

$x_1=0.5$

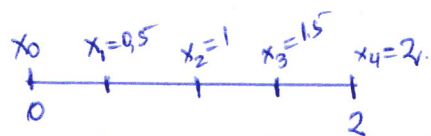
$x_2=1$

$x_3=1.5$

$x_4=2$



$$h = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$



$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \int_0^2 (x^2 - 5x + 6) dx &\approx \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)) \\ &= \frac{1/2}{2} (6 + 2 \cdot 3.75 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0.75 + 0) = \dots = \frac{19}{4} \end{aligned}$$

Σχετικό σφάλμα: $\left| \frac{\frac{14}{3} - \frac{19}{4}}{\frac{14}{3}} \right| = 0.017 \text{ ή } 1.7\%$

n	σχετικό σφάλμα
1	26.5%
2	7%
4	1.7%

Βλέπουμε ότι, όσο αυξάνεται ο αριθμός των σημείων παρεμβολής αυξάνεται ή η ακρίβεια προσέγγισης (μειώνεται το σφάλμα).

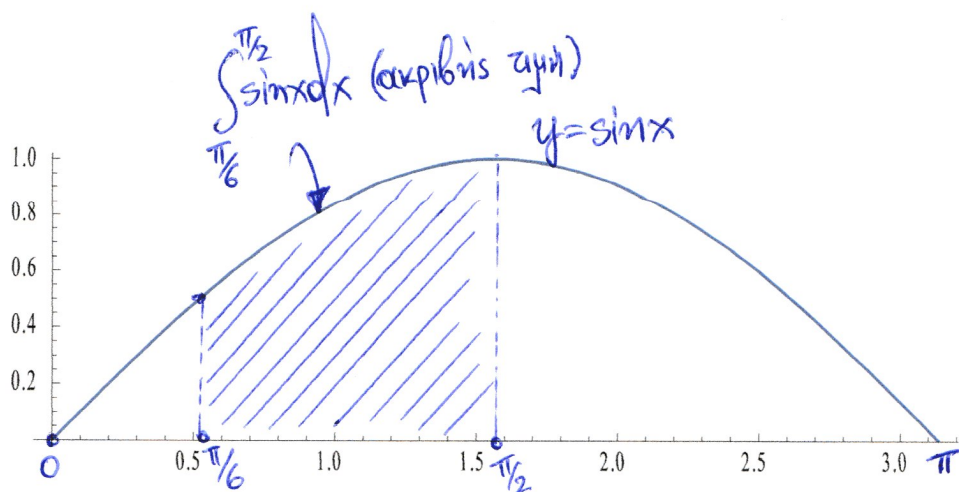
Παράδειγμα
Να υπολογιστεί το $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x dx$ με το σύνθετο τύπο τραπεζίου ή $n=2$ (3 σημεία).

Λύση.
 $\alpha = \pi/6, \beta = \pi/2, h = \frac{\pi/2 - \pi/6}{2} = \frac{\pi}{6}$ ή $x_0 = \pi/6, x_1 = 2\pi/6 = \pi/3$
 $f(x) = \sin x$ $x_2 = 3\pi/6 = \pi/2$

ΟΤΩΣ:
$$\begin{aligned} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x dx &\approx \frac{h}{2} (f(\pi/6) + 2f(\pi/3) + f(\pi/2)) = \\ &= \frac{\pi/6}{2} (\sin \pi/6 + 2 \sin \pi/3 + \sin \pi/2) = \frac{\pi}{12} \left(\frac{1}{2} + 2 \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{\pi}{12} \frac{3+2\sqrt{3}}{2} \approx 0.846149 \end{aligned}$$

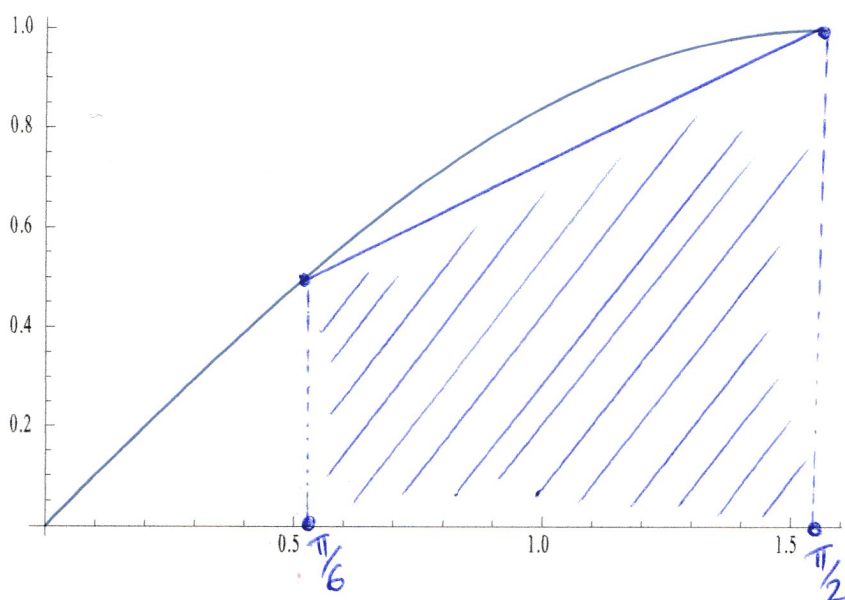
Σχετικό σφάλμα: $\left| \frac{0.866025 - 0.846149}{0.866025} \right| \approx 0.023 \text{ ή } 2.3\%$

(με απρό από τραπεζίου σφάλμα: 2.3%)



Αριθμός τριών Trapezίου

$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x dx$



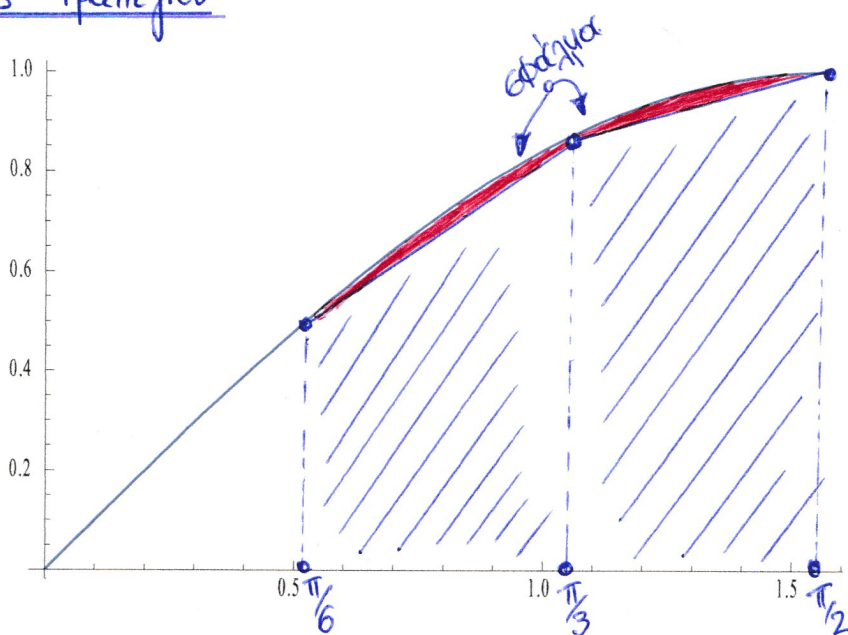
Συνθετός τριών Trapezίου

$n=2$

$x_0 = \pi/6$

$x_1 = \pi/3$

$x_2 = \pi/2$



Παράδειγμα

Ποιος ο ελάχιστος αριθμός υποδιασχημάτων που απαιτούνται για να προσεγγίσουμε το

$$\int \cos x dx$$

χρησιμοποιώντας το εύνθετο κανόνα τραπεζίου, με σφάλμα μικρότερο του 10^{-6} .

Λύση

Εδώ $f(x) = \cos x \in C^2([0,1])$, ή είναι γνωστό ότι το σφάλμα ολοκλήρωσης με το εύνθετο τύπο τραπεζίου, για n ισοπέχοντα βήματα, $(a=0, b=1)$

$$R_{n+1}(f) = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi) \quad \xi \in [0,1] \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}.$$

Απόλα

$$f'(x) = -\sin x \quad \text{ή} \quad f''(x) = -\cos x \quad \text{οπότε}$$

$$\|f''\|_{\infty} = \max_{x \in [0,1]} \{ |-\cos x| \} = 1$$

Ένα άνω φράγμα του σφάλματος:

$$|R_{n+1}(f)| \leq \frac{1-0}{12} h^2 \|f''\|_{\infty} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n^2} < 10^{-6}$$

$$\Rightarrow n^2 > \frac{10^6}{12} \Rightarrow n > 288,7$$

δηλ. 289 διαστήματα ή
290 βήματα παρεμβολής.