

Τετραγωνική συνάρτηση spline

Μια συνάρτηση spline βαθμού $m=2$ καλείται τετραγωνική spline.
 Δηλαδή μια τετραγωνική spline είναι μια συνάρτηση της μορφής:

$$S_2(x) = \begin{cases} p_0(x) = \alpha_0 + b_0x + c_0x^2 & x \in [x_0, x_1] \\ p_1(x) = \alpha_1 + b_1x + c_1x^2 & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ p_{n-1}(x) = \alpha_{n-1} + b_{n-1}x + c_{n-1}x^2 & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

ή π.χ.:

$S_2(x) \in C^1([a, b])$, δηλαδή η $S_2(x)$ είναι συνεχής και έχει συνεχή 1^η παράγωγο $S_2'(x)$ παντού στο $[a, b]$ (ιδιαίτερα στα εσωτερικά σημεία $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$).

Εάν η $S_2(x)$ παρεμβάλλεται στα σημεία $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$, τότε έχουμε τις σχέσεις:

$$(i) \quad \begin{matrix} p_i(x_i) = y_i & i=0, 1, \dots, n-1 \\ p_{n-1}(x_n) = y_n \end{matrix} \quad \left. \begin{matrix} \text{παρεμβολή στα} \\ \text{σημεία } (x_i, y_i) \\ i=0, \dots, n \end{matrix} \right\}$$

$$(ii) \quad p_i(x_{i+1}) = p_{i+1}(x_{i+1}) \quad i=0, 1, \dots, n-2 \quad \left. \begin{matrix} \text{τα πολυώνυμα } p_i \\ \text{συμπίπτουν στα εσωτερικά} \\ \text{σημεία} \end{matrix} \right\}$$

$$(iii) \quad p_i'(x_{i+1}) = p_{i+1}'(x_{i+1}) \quad i=0, 1, \dots, n-2 \quad \begin{matrix} \text{οι παράγωγοι} \\ \text{συμπίπτουν στα} \\ \text{εσωτερικά σημεία (συνήθως/ση)} \end{matrix}$$

Παρατήρηση

(α) Για να προσδιορίσουμε το $S_2(x)$, χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε καθεμιά από τους 3 συντελεστές (α_i, b_i, c_i) των n πολυνόμων $p_i(x)$, $i=0, \dots, n-1$

Συν. πρέπει να προσδιορίσουμε $3n$ αγνώστους (επιμέτρους). Οι συνθήκες (i) (η $s_2(x)$ παρεμβάλλει τα (x_i, y_i)) μας δίνουν $(n+1)$ εξισώσεις. Οι συνθήκες (ii) (συνέπεια/συνέχεια στα εσωτερικά σημεία) δίνουν $(n-1)$ εξισώσεις. Τέλος, οι συνθήκες (iii) (ύπαρξη 1ης παραγώγου στα εσωτερικά σημεία), μας δίνουν $(n-1)$ εξισώσεις. Έχουμε δηλαδή $3n$ αγνώστους κ' $n+1 + n-1 + n-1 = 3n-1$ εξισώσεις. Άρα κάθε φορά, για τον προσδιορισμό της $s_2(x)$ χρειαζόμαστε μια επιπλέον συνθήκη.

(b) Για υπολογιστικούς σκοπούς, χρησιμοποιείται κ' ο τύπος:

$$s_2(x) = \begin{cases} p_0(x) = \alpha_0 + b_0(x-x_0) + c_0(x-x_0)(x-x_1) & x \in [x_0, x_1] \\ p_1(x) = \alpha_1 + b_1(x-x_1) + c_1(x-x_1)(x-x_2) & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots \\ p_{n-1}(x) = \alpha_{n-1} + b_{n-1}(x-x_{n-1}) + c_{n-1}(x-x_{n-1})(x-x_n) & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η τετραγωνική συνάρτηση spline $s_2(x)$ που παρεμβάλλεται στα σημεία $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$ με την επιπλέον συνθήκη $s_2'(-1) = 0$

Λύση

Η τετραγωνική συνάρτηση spline $s_2(x)$, έχει τη μορφή:

$$s_2(x) = \begin{cases} p_0(x) = \alpha_0 + b_0x + c_0x^2 & x \in [-1, 0] \\ p_1(x) = \alpha_1 + b_1x + c_1x^2 & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Για τον υπολογισμό των $\alpha_0, \alpha_1, b_0, b_1, c_0, c_1$, έχουμε:

Παρεμβολή
σημείων

$$s_2(-1) = 0 \quad \eta \quad p_0(-1) = 0 = \alpha_0 - b_0 + c_0 \quad (1)$$

$$s_2(0) = 1 \quad \eta \quad p_0(0) = \alpha_0 + 0b_0 + 0c_0 = 1 \Rightarrow \alpha_0 = 1 \quad (2)$$

$$S_2(0) = 1 \quad \eta \quad p_2(0) = 1 = \alpha_1 + 0b_1 + 0c_1 \Rightarrow \alpha_1 = 1 \quad (3)$$

(πολυώνυμα συμπίπτουν στο 0)

$$S_2(1) = 3 \quad \eta \quad p_2(1) = 3 = \alpha_1 + b_1 + c_1 \quad (4)$$

Παράγωγοι
συμπίπτουν
στο εσωτερικό σημείο

$$p'_0(0) = p'_1(0) \Leftrightarrow b_0 + c_0 \cdot 0 = b_1 + c_1 \cdot 0 \Rightarrow b_1 = b_0 \quad (5)$$

Επιπλέον συνθήκη

$$S'_2(-1) = 0 \quad \eta \quad b_0 - 2c_0 = 0 \Rightarrow b_0 = 2c_0 \quad (6)$$

Τώρα

$$\begin{array}{ll} (1), (2), (6) \Rightarrow & 1 - 2c_0 + c_0 = 0 \Rightarrow c_0 = 1 \\ \text{και} & (1), (6) \quad 1 - b_0 + c_0 = 0 \Rightarrow b_0 = 2 = b_1 \end{array}$$

$$(3), (4) \Rightarrow 1 + 2 + c_1 = 3 \Rightarrow c_1 = 0$$

Άρα, η τετραγωνική spline είναι ίση με:

$$S_2(x) = \begin{cases} 1 + 2x + x^2 & x \in [-1, 0) \\ 1 + 2x & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Παρατήρηση.

Εδώ έχουμε ότι το $p_1(x)$ είναι 1ου βαθμού (ή όχι 2ου). Σε μια συνάρτηση spline n βαθμού, τα πολυώνυμα $p_i(x)$ είναι το πολύ βαθμού n .

Παράδειγμα.

είναι η συνάρτηση:

$$S(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \in [-1, 0] \\ 2x+1 & x \in [0, 2] \end{cases}$$

η τετραγωνική συνάρτηση spline που παρεμβάγεται στα σημεία $(-1, 4)$, $(0, 1)$, $(2, 5)$;

Λύση

Έλεγχος

παρεμβόλης στα σημεία:

$$S(0) = 1, \quad S(0) = (0-1)^2 = 1 \quad \text{OK}$$

$$S(-1) = 4, \quad S(-1) = (-1-1)^2 = 4 \quad \text{OK}$$

$$S(2) = 5, \quad S(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \quad \text{OK}$$

(αρα η S παρεμβάγεται στα οδόντα σημεία)

$$\left. \begin{array}{l} p_0(x) = (x-1)^2 \\ p_1(x) = 1+2x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{το ποσό 2ου} \\ \text{βάθμους} \end{array}$$

Τα $p_0(x)$, $p_1(x)$ συμπίπτουν στο εσωτερικό σημείο $(0, 1)$.

$$p_0(0) = (0-1)^2 = 1 = 1+2 \cdot 0 = p_1(0) \quad \text{OK}$$

Τέλος, θα πρέπει να έχουν ίδια παράγωγο στο εσωτερικό σημείο $(0, 1)$

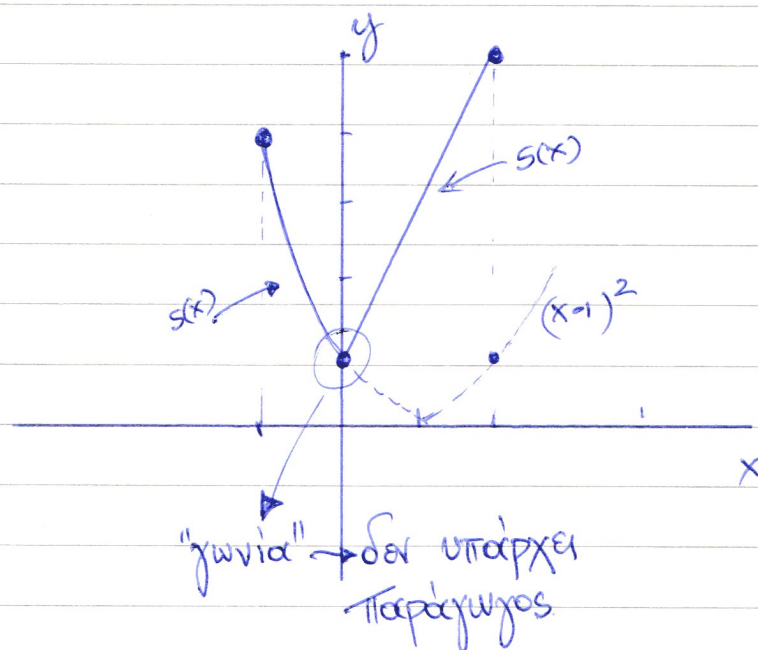
$$p_0(x) = (x-1)^2 \Rightarrow p_0'(x) = 2(x-1) \Rightarrow p_0'(0) = -2$$

$$p_1(x) = 1+2x \Rightarrow p_1'(x) = 2 = p_1'(0)$$

$$\left\{ p_0'(0) \neq p_1'(0) \right.$$

Αρα η $S(x)$ δεν είναι η ζητούμενη τετραγωνική spline

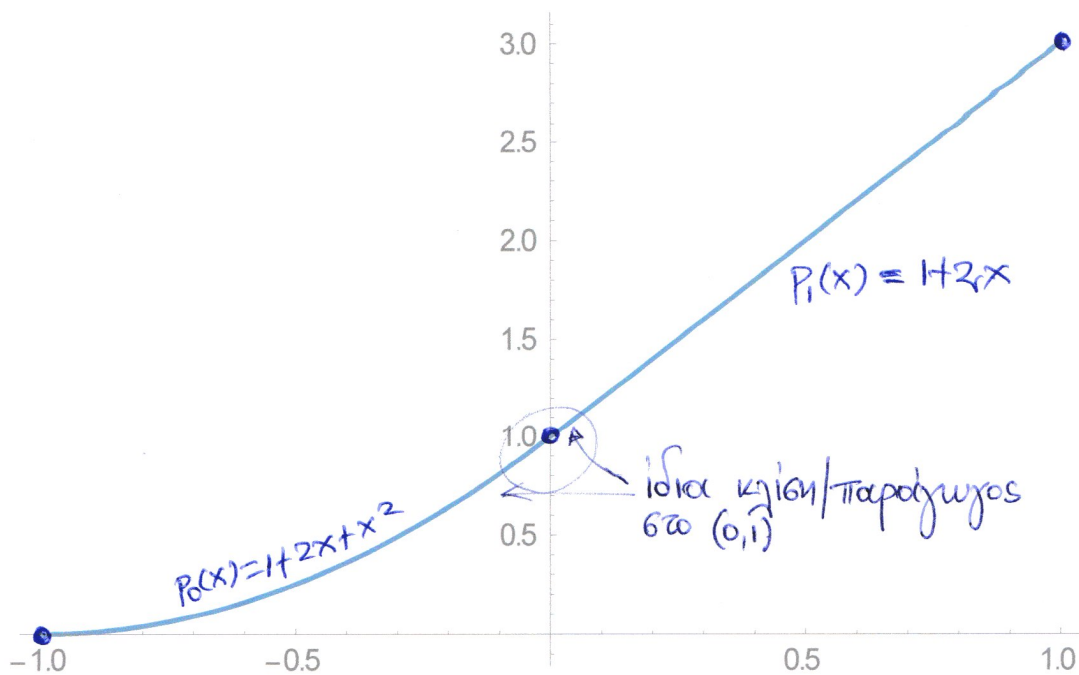
#



Παράδειγμα

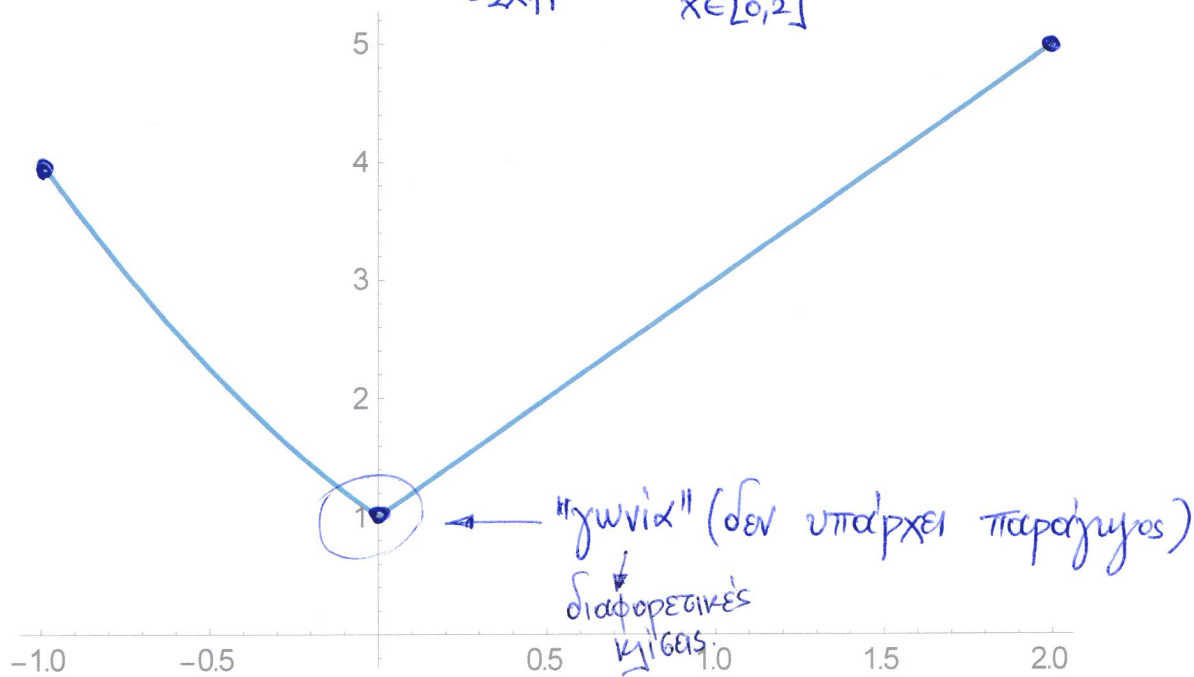
$$S_2(x) = \begin{cases} 1+2x+x^2 & x \in [-1, 0) \\ 1+2x & x \in [0, 1] \end{cases}$$

98
17



Παράδειγμα

$$S(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \in [-1, 0) \\ 2x+1 & x \in [0, 2] \end{cases}$$



Κυβική συνάρτηση spline

Μια συνάρτηση spline βαθμού $m=3$ καλείται κυβική spline.
 Δηλ. μια κυβική spline είναι μια συνάρτηση της μορφής:

$$s_3(x) = \begin{cases} p_0(x) = a_0 + b_0x + c_0x^2 + d_0x^3 & x \in [x_0, x_1) \\ p_1(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3 & x \in [x_1, x_2) \\ \vdots & \vdots \\ p_{n-1}(x) = a_{n-1} + b_{n-1}x + c_{n-1}x^2 + d_{n-1}x^3 & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

2' 6.10

$s_3(x) \in C^2([a, b])$, δηλαδή η $s_3(x)$ είναι συνεχής κ'έχει
 συνεχείς παραγώγους 1^{ης} κ' 2^{ης} τάξης ($s'_3(x), s''_3(x)$) παντού στο $[a, b]$ (ιδίαιτερα στα εσωτερικά σημεία $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$).

Εάν η $s_3(x)$ παρεμβάλλεται στα σημεία $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$, τότε έχουμε τις σχέσεις:

$$(i) \quad \begin{aligned} p_i(x_i) &= y_i & i=0, 1, \dots, n-1 \\ p_{n-1}(x_n) &= y_n \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{παρεμβολή στα} \\ \text{σημεία } (x_i, y_i) \\ i=0, \dots, n \end{array} \right.$$

$$(ii) \quad p_i(x_{i+1}) = p_{i+1}(x_{i+1}) \quad i=0, 1, \dots, n-2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{τα } p_i \text{ συμπίπτουν στα} \\ \text{εσωτερικά σημεία.} \end{array} \right.$$

$$(iii) \quad p'_i(x_{i+1}) = p'_{i+1}(x_{i+1}) \quad i=0, 1, \dots, n-2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{οι παραγώγοι 1^{ης} τάξης} \\ \text{συμπίπτουν στα εσωτερικά} \\ \text{σημεία} \end{array} \right.$$

$$(iv) \quad p''_i(x_{i+1}) = p''_{i+1}(x_{i+1}) \quad i=0, 1, \dots, n-2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{οι παραγώγοι 2^{ης} τάξης} \\ \text{συμπίπτουν στα} \\ \text{εσωτερικά σημεία.} \end{array} \right.$$

Παρατήρηση

- (α) Για να προσδιορίσουμε την $s_3(x)$ χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε καθέναν από τους 4 συντελεστές (a_i, b_i, c_i, d_i) των n πολυωνύμων $p_i(x)$ $i=0,1,\dots,n-1$ δηλ. πρέπει να υπολογίσουμε $4n$ αγνώστους (συντελεστές). Οι συνθήκες
- (i) (η $s_3(x)$ περιλαμβάνει τα σημεία (x_i, y_i)) μας δίνουν $(n+1)$ εξισώσεις. Οι
 - (ii) (συνέχεια/συνέχεια στα εσωτερικά σημεία) μας δίνουν $(n-1)$ εξισώσεις.
 - Οι (iii) (υπαρξη παραγώγου 1ης τάξης στα εσωτερικά σημεία) μας δίνουν $(n-1)$ εξισώσεις. Τέλος, οι (iv) (υπαρξη 2ης τάξης παραγώγου στα εσωτερικά σημεία) μας δίνουν $(n-1)$ εξισώσεις.
- Έχουμε δηλ. $4n$ αγνώστους χ' $n+1+n-1+n-1+n-1=4n-2$ εξισώσεις. Άρα, κάθε φορά για τον προσδιορισμό της $s_3(x)$ χρειαζόμαστε 2 επιπλέον συνθήκες. Εάν αυτές είναι:

$$(I) \left. \begin{array}{l} p_0''(x_0) = 0 \\ p_{n-1}''(x_n) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{έχουμε την φυγική κυβική spline}$$

$$(II) \left. \begin{array}{l} p_0'(x_0) = f'(x_0) \\ p_{n-1}'(x_n) = f'(x_n) \end{array} \right\} \text{ έχουμε την πλήρη κυβική spline.}$$

$f = \text{γνωστή}$

- (β) Για υπολογιστικούς σκοπούς χρησιμοποιούμε τη μορφή:

$$s_3(x) = \begin{cases} p_0(x) = a_0 + b_0(x-x_0) + c_0(x-x_0)^2 + d_0(x-x_0)^3 & x \in [x_0, x_1] \\ p_1(x) = a_1 + b_1(x-x_1) + c_1(x-x_1)^2 + d_1(x-x_1)^3 & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots \\ p_{n-1}(x) = a_{n-1} + b_{n-1}(x-x_{n-1}) + c_{n-1}(x-x_{n-1})^2 + d_{n-1}(x-x_{n-1})^3 & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η κυβική συνάρτηση spline που περιλαμβάνει στα σημεία $(5,5)$, $(7,2)$ χ' $(9,4)$. Θεωρείστε τη φυγική (κυβική) spline.

Λύση

Η κυβική συνάρτηση spline $s_3(x)$, θα έχει τη μορφή:

$$s_3(x) = \begin{cases} p_0(x) = \alpha_0 + b_0(x-5) + c_0(x-5)^2 + d_0(x-5)^3 & x \in [5, 7] \\ p_1(x) = \alpha_1 + b_1(x-7) + c_1(x-7)^2 + d_1(x-7)^3 & x \in [7, 9] \end{cases}$$

Η $s_3(x)$ παρεμβάσσεται στα σημεία:

$$p_0(5) = 5 \Rightarrow \alpha_0 = 5 \quad (1)$$

$$p_1(7) = 2 \Rightarrow \alpha_1 = 2 \quad (2)$$

$$p_1(9) = 4 \Rightarrow \alpha_1 + 2b_1 + 4c_1 + 8d_1 = 4 \quad (3)$$

Σύμφωνα στο
εσωτερικό
σημείο

$$p_0(7) = p_1(7) \Rightarrow \alpha_0 + 2b_0 + 4c_0 + 8d_0 = \alpha_1 \quad (4)$$

Σύμφωνα
1^η $\neq$ παρ/χου
στο εσωτερικό
σημείο.

$$\left\{ \begin{array}{l} p'_0(x) = b_0 + 2c_0(x-5) + 3d_0(x-5)^2 \Rightarrow p'_0(7) = b_0 + 4c_0 + 12d_0 \\ p'_1(x) = b_1 + 2c_1(x-7) + 3d_1(x-7)^2 \Rightarrow p'_1(7) = b_1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$b_0 + 4c_0 + 12d_0 = b_1 \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p''_0(x) = 2c_0 + 6d_0(x-5) \Rightarrow p''_0(7) = 2c_0 + 12d_0 \\ p''_1(x) = 2c_1 + 6d_1(x-7) \Rightarrow p''_1(7) = 2c_1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$2c_0 + 12d_0 = 2c_1 \quad (6)$$

Επειδή πρόκειται για φυσική spline:

$$p''_0(5) = 0 \Rightarrow 2c_0 = 0 \Rightarrow c_0 = 0 \quad (7)$$

$$p''_1(9) = 0 \Rightarrow 2c_1 + 12d_1 = 0 \quad (8)$$

Με τη βοήθεια πινάκων έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 12 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε:

$$a_0 = 5 \quad b_0 = -\frac{17}{8} \quad c_0 = 0 \quad d_0 = \frac{5}{32}$$

$$a_1 = 2 \quad b_1 = -\frac{1}{4} \quad c_1 = \frac{15}{16} \quad d_1 = -\frac{5}{32}$$

Άρα η φυσική κυβική spline είναι ίση με:

$$s_3(x) = \begin{cases} 5 + (-\frac{17}{8})(x-5) + \frac{5}{32}(x-5)^3 & x \in [5, 7] \\ 2 - \frac{1}{4}(x-7) + \frac{15}{16}(x-7)^2 - \frac{5}{32}(x-7)^3 & x \in [7, 9] \end{cases}$$

#

Σφάλμα παρεμβολής

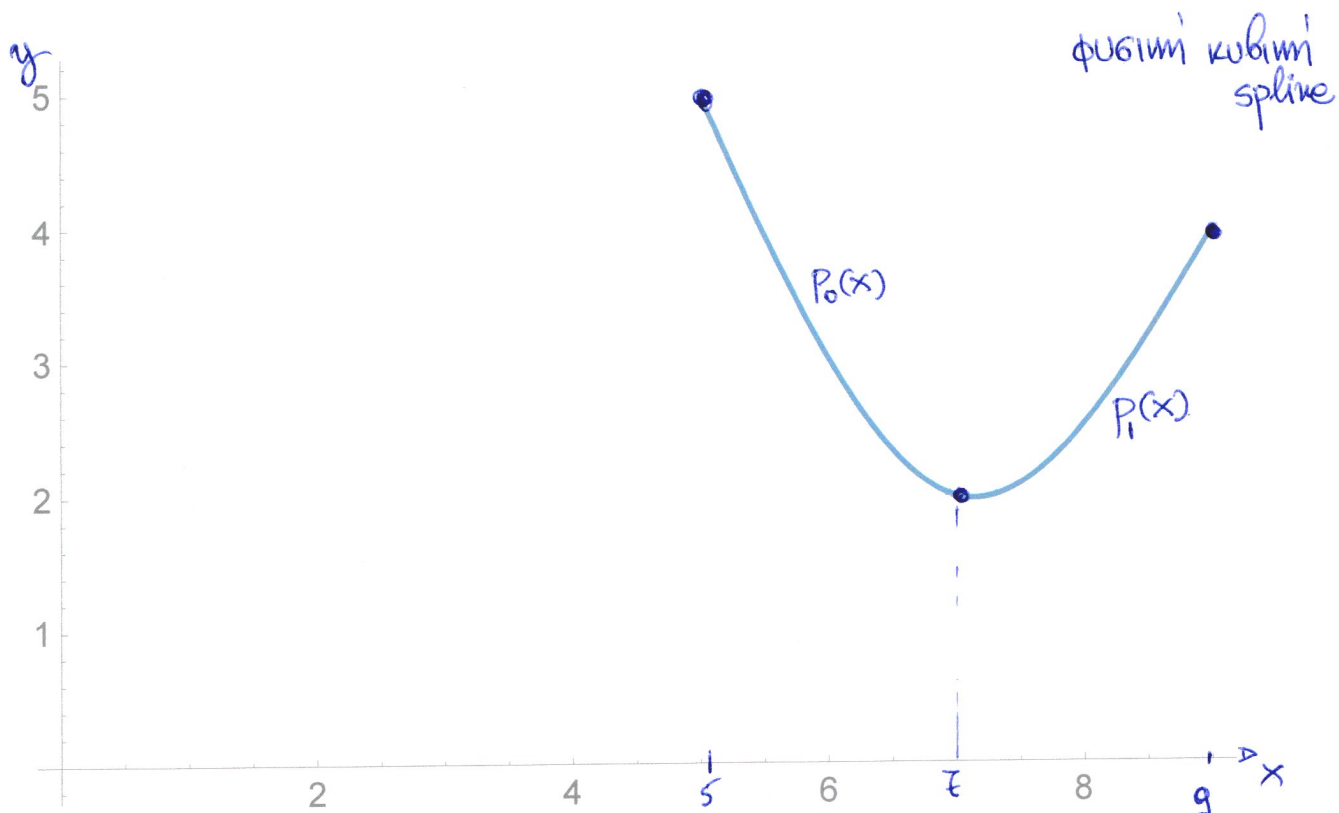
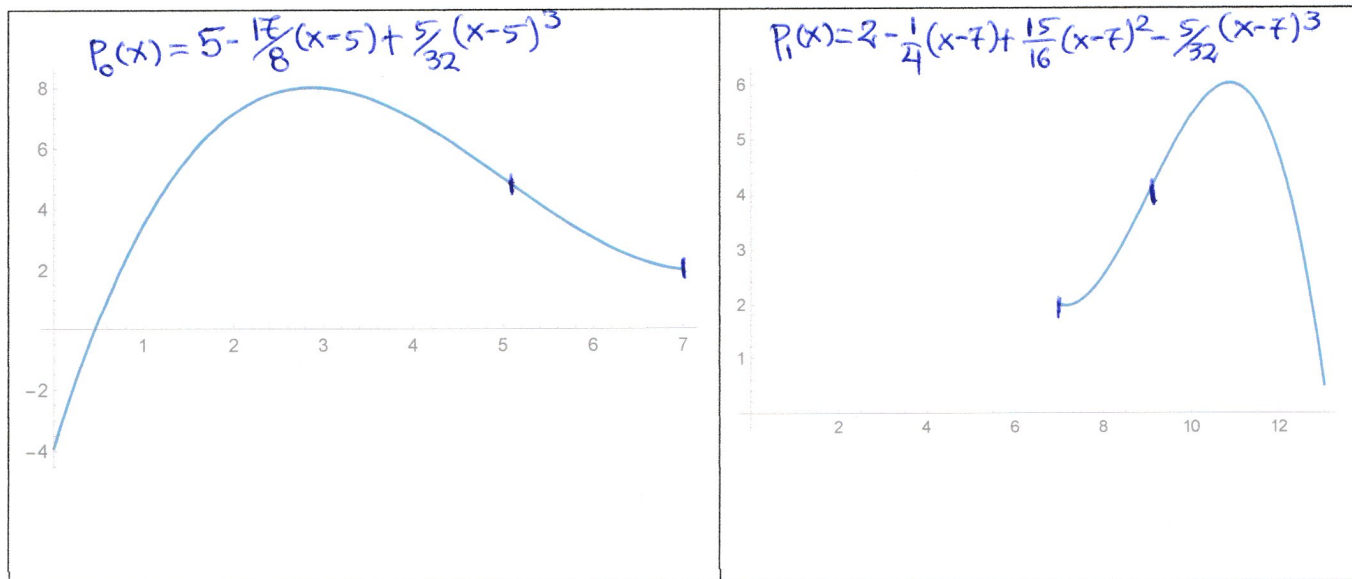
Εάν $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ τω $f \in C^4([a, b])$, $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ διαμέριση του $[a, b]$ ή $s_3(x)$ η φυσική κυβική spline που παρεμβάλλεται ανάμεσα στα f ως προς την διαμέριση, $h = \max_i |x_{i+1} - x_i|$. Τότε:

$$\|f - s_3\|_{\infty} \leq \frac{5}{384} h^4 \|f^{(4)}\|_{\infty}$$

Παράδειγμα

κubini spline $\rightarrow$ σημεία $(5,5), (7,2)$ κ' $(9,4)$

18
22



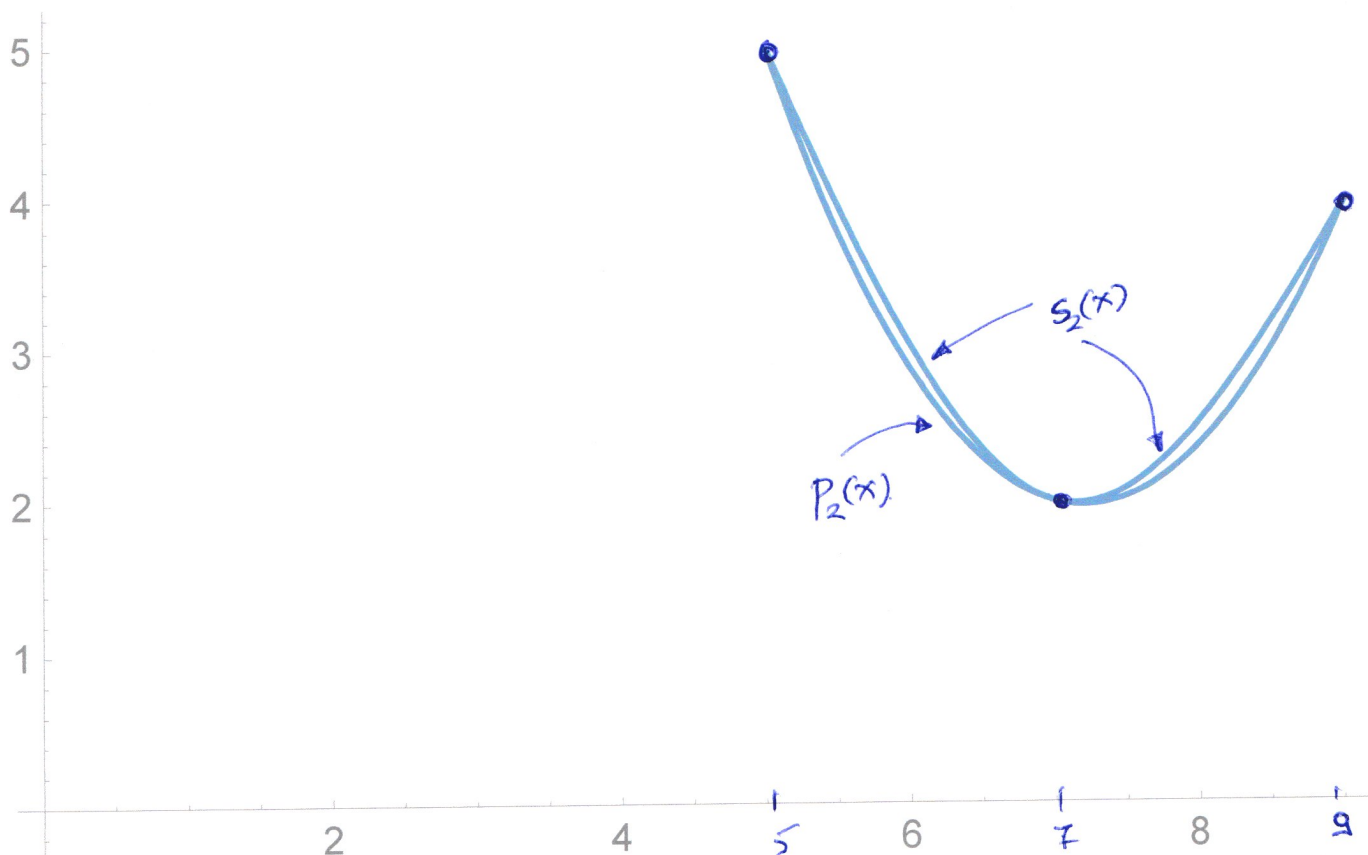
Παράδειγμα (συνέχεια)

Εάν δώσουμε το προηγούμενο παρεμβολής Newton, που παρεμβάλλει τα $(5,5), (7,2), (9,4)$ τότε:

x	$f(x)$	
$x_0=5$	5	$=\alpha_0$
$x_1=7$	2	$\left[f[x_1, x_0] = \frac{2-5}{7-5} = -\frac{3}{2} = \alpha_1 \right]$
$x_2=9$	4	$\left[f[x_2, x_1] = \frac{4-2}{9-7} = 1 \right]$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{1 + \frac{3}{2}}{9-5} = \frac{5}{8} = \alpha_2$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } p_2(x) &= \alpha_0 + \alpha_1(x-5) + \alpha_2(x-5)(x-7) = \dots \\ &= \frac{5}{8}x^2 - 9x + \frac{375}{8} \end{aligned}$$



Παράδειγμα.

Εάν $s_3(x)$ είναι η πηχρής κυβική spline που παρεμβάγεται ως f στα σημεία $x_0=0$, $x_1=1$ ή $x_2=2$ ή

$$s_3(x) = \begin{cases} p_0(x) = 1 + bx + 2x^2 - 2x^3 & x \in [0, 1] \\ p_1(x) = 1 + \alpha(x-1) - 4(x-1)^2 + 7(x-1)^3 & x \in [1, 2] \end{cases}$$

να βρεθούν οι $f'(0)$ ή $f'(2)$

Λύση

Αφού η $s_3(x)$ είναι πηχρής κυβική spline: $p'_0(0) = f'(0)$
 $p'_1(2) = f'(2)$

Αλλά $p'_0(x) = b + 4x - 6x^2 \Rightarrow p'_0(0) = b = f'(0)$

$p'_1(x) = \alpha - 8(x-1) + 21(x-1)^2 \Rightarrow p'_1(2) = \alpha + 13 = f'(2)$

Αρα, πρέπει να προσδιορίσουμε τα α, b .

Η $s_3(x)$ είναι κυβική spline, επομένως $p_0(1) = p_1(1)$

Αλλά

$$\left. \begin{aligned} p_0(1) &= 1 + b + 2 - 2 = 1 + b \\ p_1(1) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b + 1 = 1 \Rightarrow b = 0$$

Ανόμε $p'_0(1) = p'_1(1)$. Αλλά $p'_0(x) = b + 4x - 6x^2 \Rightarrow p'_0(1) = b - 2 = -2$ ($b=0$)
 $p'_1(x) = \alpha - 8(x-1) + 21(x-1)^2 \Rightarrow p'_1(1) = \alpha$
 $\Rightarrow \alpha = -2$

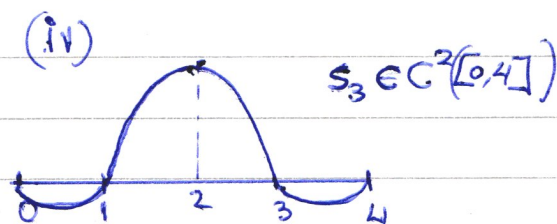
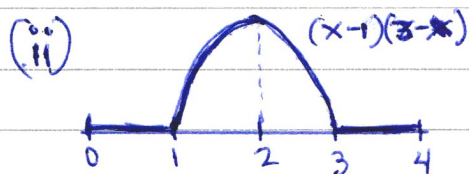
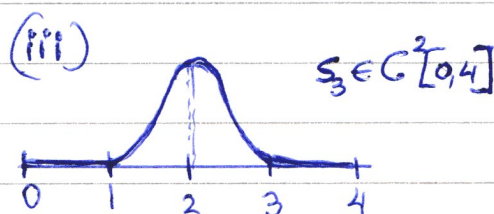
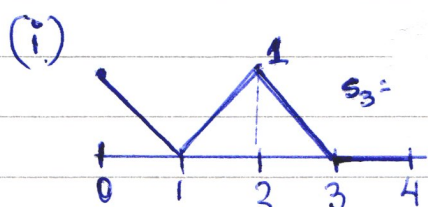
Τελικά $f'(0) = 0$ ή $f'(2) = \alpha + 13 = -2 + 13 = 11$

#

Παράδειγμα.

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x-1 & x \in [1, 2] \\ 3-x & x \in [2, 3] \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

Μία από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις ανήκει στην κυβική spline $s_3(x)$ που παρεμβάλλεται της $f(x)$ στα σημεία $x_0=0, x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4$ (θεωρούμε συνοριακές συνοδικές παραγώγων 2^{ης} τάξης στα σημεία 0, 4). Ποιά είναι; (απορρίπτει δικαιολογώντας, τις υπολογίστε).



Λύση

Η (i) δεν είναι γιατί δεν παρεμβάλλει το σημείο $(0, f(0)=0)$, γιατί $s_3(0)=1$.

Η (ii) δεν είναι γιατί στα σημεία $x_1=1$ ή $x_3=3$ δεν υπάρχει η 1^η παράγωγος $s'_3(x)$ (το γραφικό έχει γωνίες, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει παράγωγος).

Η (iii) δεν είναι γιατί: αν $s_3(x)$ είναι η κυβική spline σ' αυτή των περιπτώσεων τότε:

$$s_3(x) = \begin{cases} p_0(x) = 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ p_1(x) = a_1 + b_1(x-1) + c_1(x-1)^2 + d_1(x-1)^3 & 1 \leq x \leq 2 \\ p_2(x) = a_2 + b_2(x-3) + c_2(x-3)^2 + d_2(x-3)^3 & 2 \leq x \leq 3 \\ p_3(x) = 0 & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Η $s_3(x)$ παρεμβάλλει τα σημεία $x_0=0, x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4$.
 οπότε:

$$p_1(1) = p_0(1) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

$$p_2(3) = \alpha_2 = p_4(3) = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$

Οι παραγώγοι ^{1st τάξης} στα σημεία x_1, x_2, x_3 υπάρχουν κ' είναι κ' συνεχείς:

$$p'_1(x) = b_1 + 2c_1(x-1) + 3d_1(x-1)^2$$

$$p'_1(1) = p'_0(1) = 0 \Rightarrow b_1 = 0$$

$$p'_2(x) = b_2 + 2c_2(x-3) + 3d_2(x-3)^2$$

$$p'_2(3) = b_2 = p'_3(3) = 0 \Rightarrow b_2 = 0$$

Ακόμα, οι παραγώγοι ^{2nd τάξης} στα x_1, x_2, x_3 υπάρχουν κ' είναι κ' συνεχείς:

$$p''_1(x) = 2c_1 + 6d_1(x-1) \Rightarrow p''_1(1) = p''_0(1) = 0 \Rightarrow 2c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$p''_2(x) = 2c_2 + 6d_2(x-3) \Rightarrow p''_2(3) = p''_3(3) = 0 \Rightarrow 2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

Επομένως

$$s_3(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \\ d_1(x-1)^3 & x \in [1,2] \\ d_2(x-3)^3 & x \in [2,3] \\ 0 & x \in [3,4] \end{cases}$$

Αλλά

$$p_1(2) = p_2(2) \Rightarrow d_1(2-1)^3 = d_2(2-3)^3 \Rightarrow d_1 = -d_2 \text{ κ' } p_1(2) = 1 = d_1$$

Επομένως, η κυβική splines

$$s_3(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \\ d_1(x-1)^3 & x \in [1,2] \\ -d_1(x-3)^3 & x \in [2,3] \\ 0 & x \in [3,4] \end{cases}$$

98
24

Αλλά τότε:
$$\left. \begin{aligned} p_2'(x) &= 3(x-1)^2 \Rightarrow p_2'(2) = 3 \\ p_3'(x) &= -3(x-3)^2 \Rightarrow p_3'(2) = -3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &p_2'(2) \neq p_3'(2) \text{ άρα} \\ &\eta \ S_3(x) \text{ δεν είναι} \\ &\eta \ \text{μιασμένη spline} \end{aligned}$$

Επομένως, η μιασμένη spline είναι η (iv).