

Παρεμβολή με συναρτήσεις splines

Πρόβλημα παρεμβολής.

Εάν μας δοθούν $(n+1)$ -σημεία (x_k, y_k) , $k=0, 1, \dots, n$ του γραφήματος μιας συνάρτησης $y=f(x)$ (δηλ. $y_k=f(x_k)$), κ' παρεμβαίνουμε τη συνάρτηση στα σημεία αυτά (κόμβοι) με τη βοήθεια ενός πολυωνύμου n -^{ου} βαθμού, τότε ο υπολογισμός (προσεγγιστικός) των τιμών της f ανάμεσα στους κόμβους περιέχει σφάλματα ($f(x)$, για $x_k \leq x \leq x_{k+1}$). Τα σφάλματα εξαρτώνται άμεσα από τον αριθμό των κόμβων κ' την επιλογή τους. Αν αυξήσουμε τον αριθμό των κόμβων για μεγαλύτερη ακρίβεια, οδηγούμαστε σε πολυώνυμο παρεμβολής μεγαλύτερου βαθμού. Η αύξηση όμως του βαθμού του, δημιουργεί ταλαντώσεις στο διάγραμμά του, με αποτέλεσμα στους μόνιμους κόμβους οι τιμές $f(x_k)$ κ' $p_n(x_k)$ να συμπίπτουν, αλλά μεταξύ των κόμβων το σφάλμα (διαφορά $p_n(x)$ κ' $f(x)$) να μην είναι αρκετά μικρό (αποδεκτό). Αν χρησιμοποιήσουμε πολυώνυμο μικρού βαθμού (λίγοι κόμβοι, λιγότερες ταλαντώσεις) ίσως η προσέγγιση να μην είναι η καλύτερη δυνατή (μικρό αποδεκτό σφάλμα).

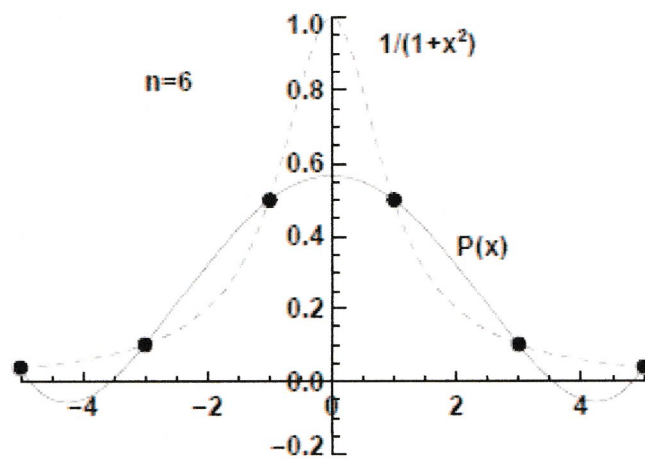
Παράδειγμα.

Εάν μας δίνεται η λεγόμενη συνάρτηση Λορέντζ: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

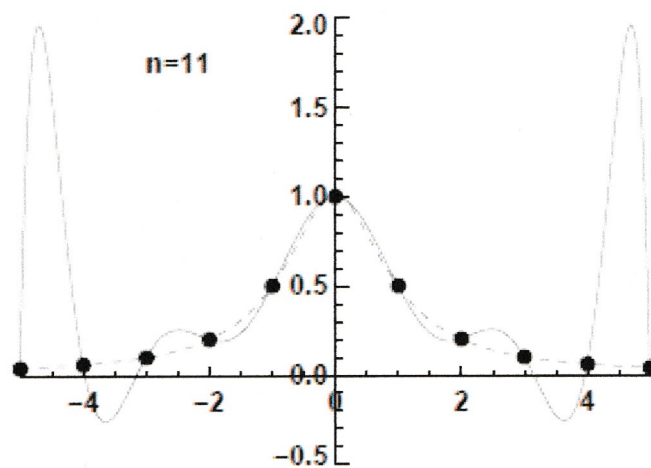
Τότε, από το διάγραμμά της κ' την παρεμβολή της από διαφορετικό κάθε φορά πολυώνυμο (δείτε διαγράμματα στη βελόδα που ακολουθεί) είναι φανερό ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των κόμβων αυξάνονται κ' οι ταλαντώσεις στα πολυώνυμα παρεμβολής. Ακόμα τα πολυώνυμα παρεμβολής με μικρό αριθμό κόμβων δεν δίνουν "καλές" προσεγγίσεις (π.χ. $n=6$).

Μια προσέγγιση στο παραπάνω πρόβλημα είναι κ' η εξής: εάν είναι γνωστός ο αναλυτικός τύπος της $f(x)$, τότε με τη βοήθεια προγραμματισμού (κατάλληλου προγράμματος H/Y), γίνονται δοκιμές

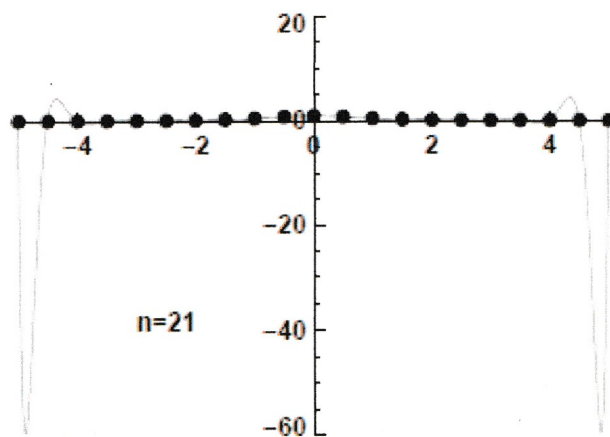
Συνάρτηση Lorentz $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$



Παρεμβολή με
 $n=6$ κόμβους
"Ταλαντώση" σε σημεία
που δεν είναι κόμβοι



Παρεμβολή με
 $n=11$ κόμβους,
Ταλαντώση έξω από
το διάστημα
[-4,4]



Παρεμβολή με
"άπειρους" κόμβους
Οι ταλαντώσεις
μεγαλώνουν.

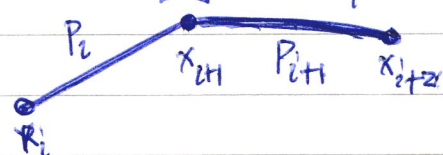
με διαφορετικούς συνδυασμούς κόμβων k' ταυτόχρονα μελετάμε το (απόλυτο) σφάλμα $|f(x) - p_n(x)|$. Επιλέγεται τελικά το δείγμα που ελαχιστοποιεί το σφάλμα. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι, όσο μικρότερο είναι το διάστημα παρεμβολής $[a, b]$, τόσο μικρότερα είναι (ίσως) η μεταβολή της $f(x)$, επομένως απαιτούνται λιγότεροι κόμβοι. (κομύτερη, ίσως, προσέγγιση).

Εάν δεν είναι γνωστός ο αναλυτικός τύπος της $f(x)$, (ή έχουμε αποτελέσματα μετρήσεων/πειραματικών δεδομένων), τότε υπάρχει δυσκολία στην επιλογή του "καταλληλότερου" δείγματος κόμβων. Δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το σφάλμα παρεμβολής, οπότε δεν έχουμε κάποιο κριτήριο για την επιλογή του (ακόμα ή η διάταξη τους παίζει ρόλο στην επιλογή).

Μία δεύτερη προσέγγιση στο πρόβλημα είναι k' η εξής: αντί να χρησιμοποιήσει κανείς ένα πολυώνυμο "μεγάλου" βαθμού, παρεμβάλει τη συνάρτηση $f(x)$ (ή τα δεδομένα των μετρήσεων) με περισσότερα του ενός πολυώνυμα $p_i(x)$, μικρού σχετικού βαθμού (συνήθως μικρότερου ή ίσου του τρίτου). Σ' αυτή την περίπτωση κάνουμε όπως λέμε κατά τμήματα πολυωνυμική παρεμβολή (piece-wise interpolation).

Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι δίνονται τα σημεία $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$. Αναζητούμε n πολυώνυμα $p_i(x)$, $i=0, 1, 2, \dots, n-1$, σχετικού μικρού βαθμού (≤ 3) τώ να παρεμβάλουν τα τεμάχια των σημείων/κόμβων (x_i, y_i) και (x_{i+1}, y_{i+1}) , δηλ.

$$\begin{cases} p_i(x_i) = y_i \\ p_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \end{cases}$$



Τα γραφήματα των πολυωνύμων θα πρέπει να συνδέονται k' ν' αποτελούν μια συνεχή συνάρτηση, δηλ. στα εσωτερικά σημεία/κόμβους θα πρέπει να ισχύει:

$$p_i(x_{i+1}) = p_{i+1}(x_{i+1}) \quad i=0, 1, 2, \dots, n-2$$

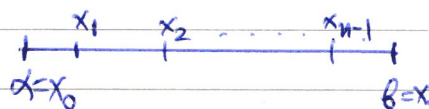
Η καμπύλη $S_n(x)$ που προκύπτει από τη σύνδεση όλων αυτών των καμπύλων (γραφήματα πολυωνύμων) θα πρέπει να είναι

μια ομαλή/λεία (smooth) συνάρτηση στα σημεία συνέδεσης/συρραφής (εσωτερικοί κόμβοι) δηλ. να υπάρχουν οι παράγωγοι της $S_n(x)$ μέχρι και ορισμένης τάξης ($1^{η}$ ς, $2^{η}$ ς τάξης παράγωγοι).

Ορισμός

Εάν $S_n(x) | x \in [\alpha, \beta]$ μια συνάρτηση, κατά τμήματα πολυωνυμική της μορφής:

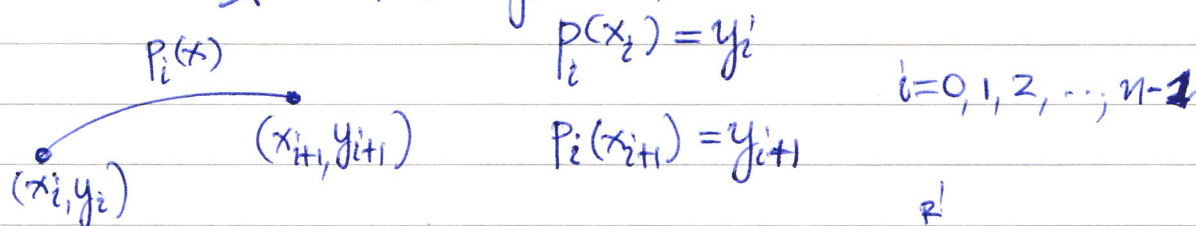
$$S_n(x) = \begin{cases} P_0(x) & x \in [x_0, x_1) \\ P_1(x) & x \in [x_1, x_2) \\ \vdots & \vdots \\ P_{n-1}(x) & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$



τ.ω.:

(i) κάθε πολυώνυμο $P_i(x)$, $i=0, 1, 2, \dots, n-1$ είναι βαθμού $\leq m$ (όχι απαραίτητα όλα του ίδιου βαθμού)

(ii) το $S_n(x)$ παρεμβάλλει τα σημεία $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ δηλ. $S_n(x_i) = y_i$ $i=0, \dots, n$



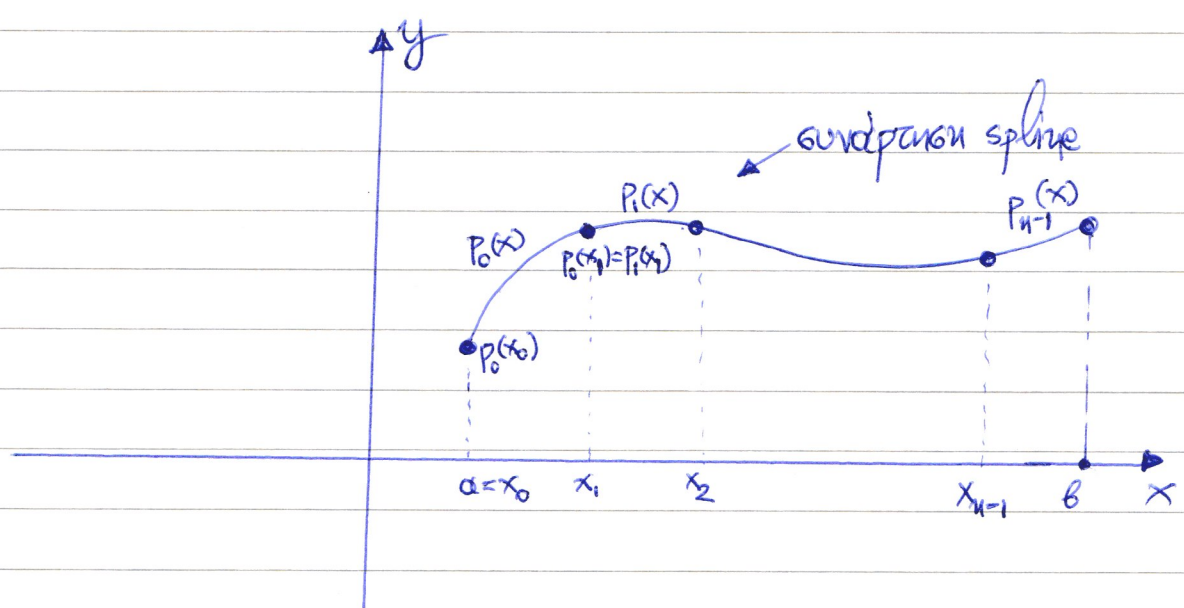
(iii) το $S_n(x) \in C^{m-1}[\alpha, \beta]$, δηλαδή το $S_n(x)$ έχει συνεχείς παραγώγους $S_n'(x), S_n''(x), \dots, S_n^{(m-1)}(x)$ στο $[\alpha, \beta]$

τότε το $S_n(x)$ καλείται συνάρτηση spline βαθμού m.

Παρατήρηση.

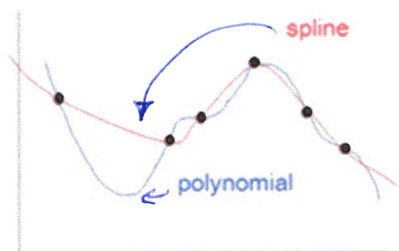
Ενδιαφέρουσες περιπτώσεις συναρτήσεων splines είναι οι ακόλουθες:

- (i) εάν $m=1$: έχουμε γραμμική συνάρτηση spline (linear)
 (ii) εάν $m=2$: — " — — " — — " — τετραγωνική — " — — " —
 (iii) εάν $m=3$: — " — — " — — " — κυβική — " — — " — (cubic).

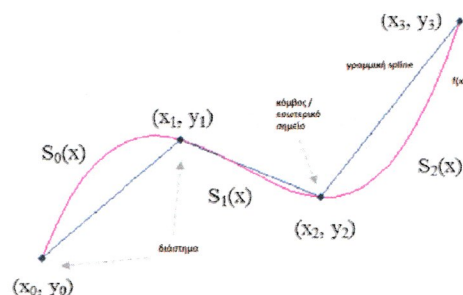


Παρατήρηση.

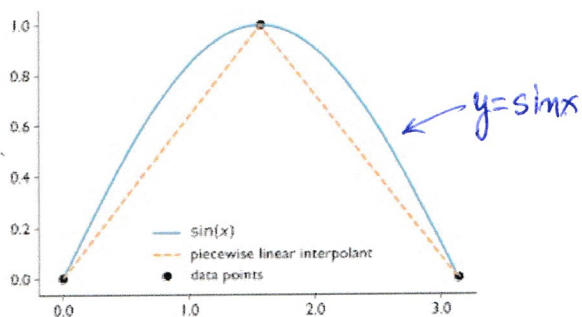
Εάν $y_i = f(x_i)$, για κάποια συνάρτηση $f(x)$, τότε η $S_n(x)$ καλείται συνάρτηση spline (βαθμού m) που παρεμβάλλεται συν $f(x)$.



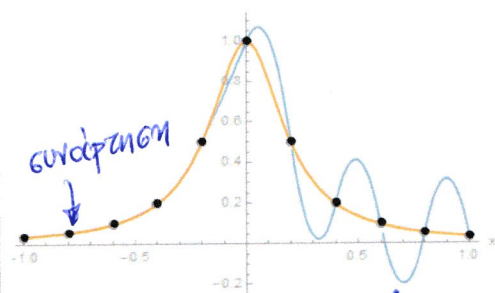
Πολυώνυμο παρεμβολής
& spline



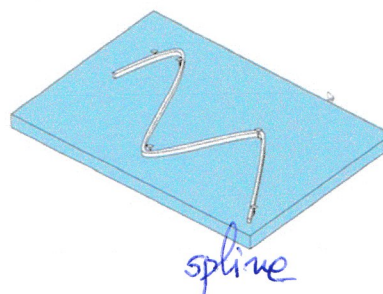
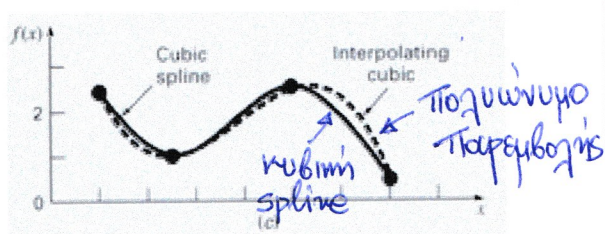
γραμμική spline



γραμμική spline & $y=\sin x$



τετραγωνική spline

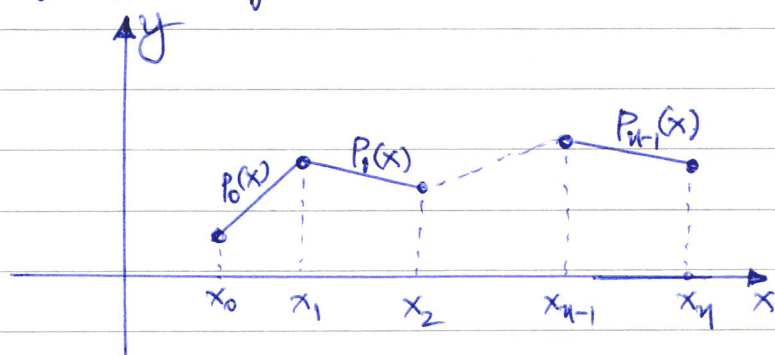


Γραμμικές συνάρτησεις splines

Μια συνάρτηση spline βαθμού $m=1$ καλείται γραμμική (spline).
 Δηλ., μια γραμμική spline είναι μια συνάρτηση της μορφής:

$$S_1(x) = \begin{cases} p_0(x) = \alpha_0 + b_0 x & x \in [x_0, x_1) \\ p_1(x) = \alpha_1 + b_1 x & x \in [x_1, x_2) \\ \vdots \\ p_{n-1}(x) = \alpha_{n-1} + b_{n-1} x & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

όπου τα $p_i(x)$, $i=0, \dots, n-1$ είναι τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα σημεία (x_i, y_i) & (x_{i+1}, y_{i+1}) .



Παρατήρηση

Για υπολογιστικούς σκοπούς χρησιμοποιείται ο τύπος:

$$S_1(x) = \begin{cases} p_0(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0) & x \in [x_0, x_1) \\ p_1(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) & x \in [x_1, x_2) \\ \vdots \\ p_{n-1}(x) = f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} (x - x_{n-1}) & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Σφάλμα παρεμβολής

Εάν $y=f(x)$ συνάρτηση ορισμένη στο $[a,b]$ κ' $f \in C^2([a,b])$ (δηλαδή η f έχει παραγώγους μέχρι κ' 2^{ης} τάξης συνεχείς), $a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b$ διαμέριση του $[a,b]$, $s_1(x)$ γραμμική spline που παρεμβάλλει την f , $h = \max |x_{i+1} - x_i|$, τότε (για το σφάλμα):

$$\|f - s_1\|_{\infty} \leq \frac{h^2}{8} \|f''\|_{\infty}$$

Παράδειγμα.

Να βρούμε η γραμμική συνάρτηση spline που παρεμβάλλεται στα σημεία $(-1,0)$, $(0,1)$ κ' $(1,3)$.

Λύση

Η γραμμική συνάρτηση spline έχει τη μορφή:

$$s_1(x) = \begin{cases} p_0(x) & x \in [-1,0] \\ p_1(x) & x \in [0,1] \end{cases}$$

p_0, p_1 = πολυώνυμα 1^{ου} βαθμού.

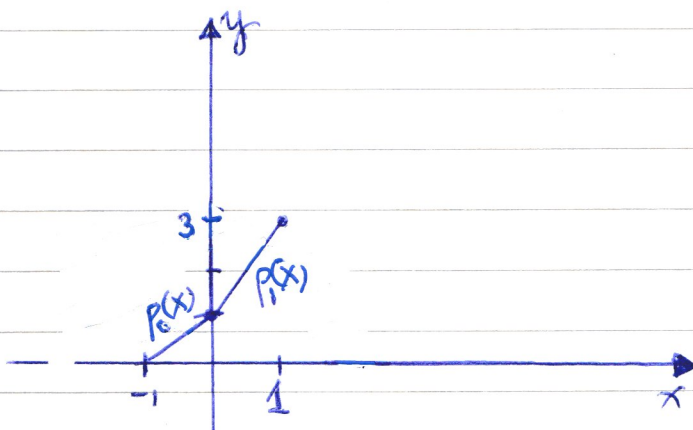
όπου:

$$p_0(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) = 0 + \frac{1-0}{0-(-1)} (x+1) = x+1$$

$$p_1(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) = 1 + \frac{3-1}{1-0} (x-0) = 1+2x$$

Άρα:

$$s_1(x) = \begin{cases} x+1 & x \in [-1,0] \\ 1+2x & x \in [0,1] \end{cases}$$

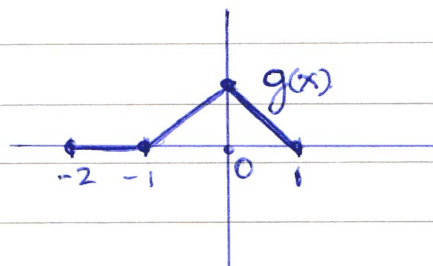


#

Παράδειγμα

Εάν $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ κ'

$$g(x) = \begin{cases} 0 & -2 \leq x \leq -1 \\ 1+x & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



Να βρεθεί η γραμμική συνάρτηση spline $s_1(x)$, που παρεμβάζεται της $g(x)$ στα σημεία $(-2,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ κ' $(1,0)$. Ποιο το εφάλμα παρεμβολής σ' αυτή την περίπτωση;

Λύση

Η $g(x)$ είναι η γραμμική συνάρτηση spline $s_1(x)$ που παρεμβάζεται στα σημεία που δίνονται, γιατί:

(i) η $g(x)$ είναι κατά τμήματα γραμμική στο διάστημα $[-2,1]$.

(ii) η $g(x)$ παρεμβάζεται στα σημεία που δίνονται, γιατί:

$$g(-2) = 0$$

$$g(-1) = 0$$

$$g(0) = 1+0 = 1$$

$$g(1) = 1-1 = 0$$

Αφού $g(x) = s_1(x)$, το εφάλμα: $\|g - s_1\|_\infty = 0$.

#

Παράδειγμα

Εάν $f(x) = e^x$, να βρεθεί η γραμμική συνάρτηση spline $s_1(x)$ που παρεμβάζεται της f στα $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Σφάλμα;

Λύση

Η γραμμική συνάρτηση spline:

$$s_1(x) = \begin{cases} p_0(x) & x \in [0,1] \\ p_1(x) & x \in [1,2] \\ p_2(x) & x \in [2,3] \end{cases}$$

όπου:

$$p_0(x) = f(0) + \frac{f(1)-f(0)}{1-0}(x-0) = e^0 + \frac{e^1-e^0}{1-0}x = 1 + (e-1)x$$

$$p_1(x) = f(1) + \frac{f(2)-f(1)}{2-1}(x-1) = e + (e^2-e)(x-1)$$

$$p_2(x) = f(2) + \frac{f(3) - f(2)}{3-2}(x-2) = e^2 + (e^3 - e^2)(x-2)$$

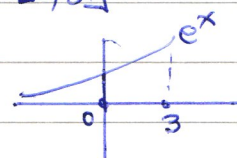
αρα:

$$s_1(x) = \begin{cases} 1 + (e-1)x & x \in [0,1] \\ e + (e^2 - e)(x-1) & x \in [1,2] \\ e^2 + (e^3 - e^2)(x-2) & x \in [2,3] \end{cases}$$

Για το φράγμα παρεμβολής: $h = \max |x_{i+1} - x_i| = 1$

$$f'(x) = f''(x) = e^x \quad x \in [0,3]$$

αρα $\max_{x \in [0,3]} |f''(x)| = e^3$



$$\text{Αρα } \|f - s_1\|_{\infty} \leq \frac{h^2}{8} \|f''\|_{\infty} \leq \frac{1^2}{8} e^3 = \frac{e^3}{8} \approx 2.51069$$

#

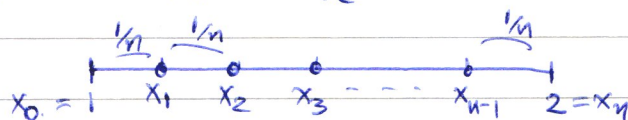
Παράδειγμα

Ποιός ο ελάχιστος αριθμός σημείων παρεμβολής στο διάστημα $[1,2]$, ώστε το φράγμα παρεμβολής, με μία γραμμική συνάρτηση spline $s(x)$, της $f(x) = \ln x$ να είναι το πολύ 0.001. (ομοιομορφή διαμέριση)

Λύση.

Αφού η διαμέριση του διαστήματος $[1,2]$, έστω σε n σημεία (τα σημεία παρεμβολής) είναι ομοιομορφή:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1 + \frac{1}{n}, \quad x_2 = 1 + \frac{2}{n}, \quad \dots, \quad x_{n-1} = 1 + \frac{n-1}{n}, \quad x_n = 2$$



$$h = \max |x_{i+1} - x_i| = \frac{1}{n}$$

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad |f''(x)| = \frac{1}{x^2} \quad x \in [1,2]$$

αρα $\max_{x \in [1,2]} |f''(x)| = \frac{1}{1^2} = 1$

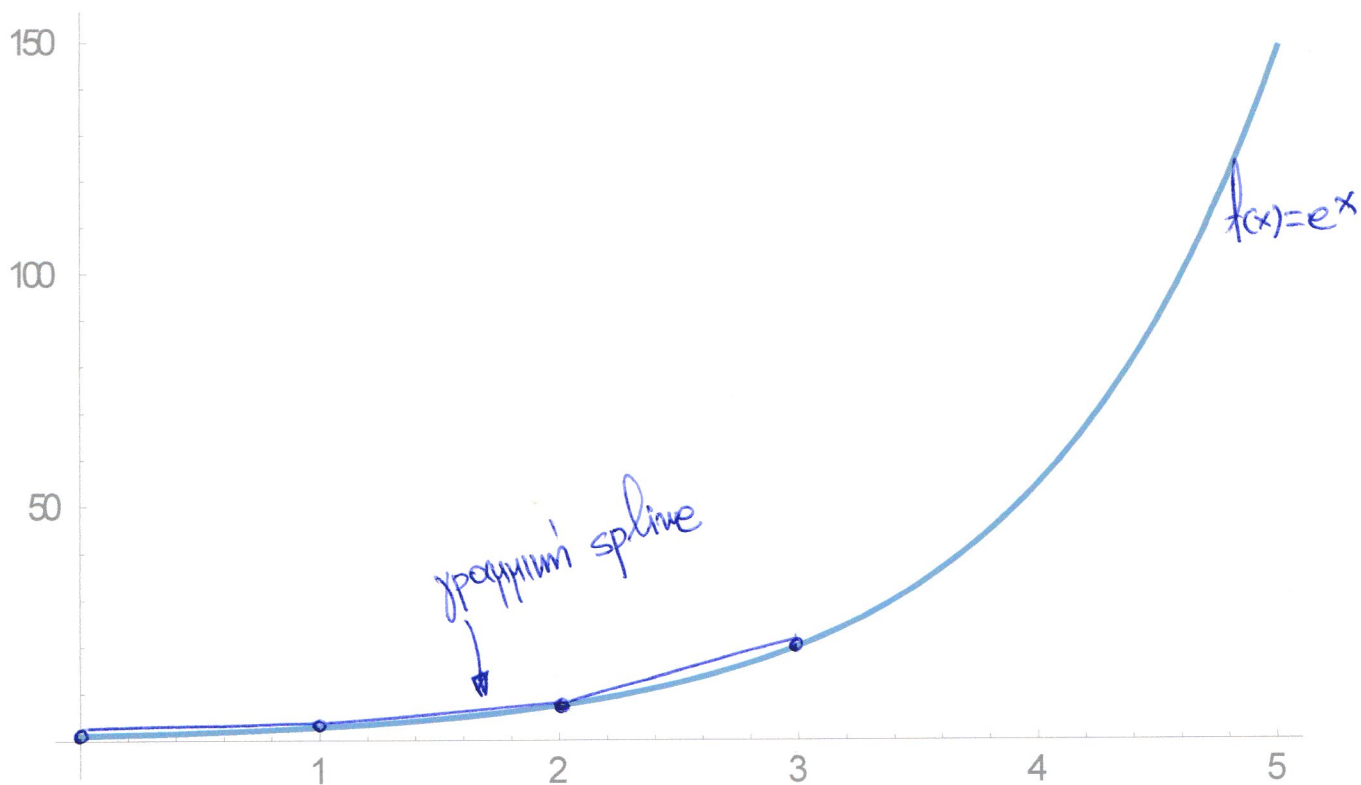
$$\text{Τέλος } \|f - s_1\|_{\infty} \leq \frac{h^2}{8} \max_{x \in [1,2]} |f''(x)| \leq \frac{1}{8n^2} \leq 0.001 \Rightarrow n^2 \geq \frac{1}{8 \times 0.001} \Rightarrow$$

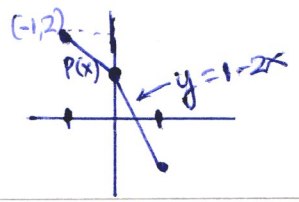
$$n \geq 11.18 \quad \text{δηλ. } n = 12 \quad (13 \text{ σημεία παρεμβολής})$$

1 σημείο το αρχικό

Параллельно

58
11





Παράδειγμα

Να υπολογισθεί ένα πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού $p(x)$ τ.ω η συνάρτηση

$$S_1(x) = \begin{cases} p(x) & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-2x & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

είναι η γραμμική συνάρτηση spline που παρεμβάχεται στα σημεία $(-1, 2)$, $(0, 1)$ και $(1, -1)$.

Λύση

Εάν $p(x) = \alpha + \beta x$, τότε η $S_1(x)$ παρεμβάχεται στο $(-1, 2)$ δηλαδή:

$$S_1(-1) = p(-1) = 2 \Rightarrow \alpha + \beta(-1) = 2 \Rightarrow \alpha - \beta = 2 \quad \textcircled{i}$$

2'

παρεμβάχεται στο σημείο $(0, 1)$ δηλ.

$$S_1(0) = 1 = p(0) = \alpha + \beta \cdot 0 = \alpha \Rightarrow \alpha = 1 \quad \textcircled{ii}$$

Από (i), (ii): $\alpha = 1, \beta = 1$ δηλ. $p(x) = 1 - x$