

Πολυώνυμα TAYLOR -- MACLAURIN

Είναι γνωστό ότι, οι καλύτερες συναρτήσεις από πλευράς ιδιοτήτων (τιμές, ρίζες, παράγωγος, ολοκλήρωμα ακόμα και η γραφική παράσταση) είναι τα πολυώνυμα. Ένα **πολυώνυμο n-οστού βαθμού** με πραγματικούς συντελεστές έχει τη μορφή:

$$P_n(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad k=0,1,\dots,n, \quad \alpha_n \neq 0$$

Όταν έχουμε μια «πολύπλοκη» συνάρτηση **f**, προσπαθούμε να την «προσεγγίσουμε» **τοπικά** με ένα πολυώνυμο (αντικαθιστούμε τη συνάρτηση «τοπικά», δηλαδή γύρω από ένα σημείο $x_0 = a$, με ένα κατάλληλο πολυώνυμο έτσι ώστε το σφάλμα αυτής της αντικατάστασης να είναι μικρό). Το (απόλυτο) **σφάλμα/υπόλοιπο** της αντικατάστασης (προσέγγισης) της συνάρτησης **f** από ένα πολυώνυμο $P_n(x)$ δίνεται από την (συνάρτηση):

$$R_n(x) = |f(x) - P_n(x)|$$

Έστω ότι η συνάρτηση **f** έχει παραγώγους συνεχείς μέχρι και $n^{\text{οστής}}$ τάξης σε μια περιοχή του σημείου $x_0 = a$. Το **προσεγγιστικό πολυώνυμο Taylor $n^{\text{ο}}$ βαθμού** της **f** (στο σημείο $x_0 = a$) ορίζεται από την σχέση:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Στην περίπτωση που το $a=0$ έχουμε το **$n^{\text{ο}}$ βαθμού προσεγγιστικό πολυώνυμο Maclaurin** της **f**, το οποίο θα έχει τη μορφή:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Θεώρημα

Έστω ότι η συνάρτηση **f** έχει παραγώγους συνεχείς μέχρι και $n+1$ τάξης σε μια περιοχή του σημείου $x=a$. Το **σφάλμα / υπόλοιπο της προσέγγισης** της **f** από το προσεγγιστικό πολυώνυμο Taylor $n^{\text{ο}}$ βαθμού, μπορεί να δειχθεί (δύο από τους τρόπους υπολογισμού του, υπάρχουν αρκετοί άλλοι) ότι είναι ίσο με:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

ή

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad \xi \in (a,x) \text{ ή } (x,a)$$

Έτσι η συνάρτηση **f** είναι ίση με (στην **περιοχή** του σημείου $x_0 = a$, δηλαδή σε ένα ανοικτό διάστημα **I** που περιέχει το σημείο **a**):

$$f(x) = R_n(x) + P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Η μορφή αυτή καλείται **ανάπτυγμα Taylor της f στο σημείο $x=a$** .

Αν $\alpha = 0$ τότε το ανάπτυγμα έχει την μορφή:

$$f(x) = R_n(x) + P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

το οποίο καλείται **ανάπτυγμα Maclaurin της f**.

Παρατήρηση

Αν η συνάρτηση f έχει παράγωγο κάθε τάξης, τότε η **σειρά Taylor της f στο σημείο $x_0 = \alpha$** είναι ίση με :

$$f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

Αν $\alpha = 0$ η σειρά Taylor της f καλείται **σειρά Maclaurin**. Δηλαδή η σειρά Maclaurin είναι της μορφής:

$$f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Εάν η συνάρτηση f έχει παράγωγο κάθε τάξης και το υπόλοιπο R_n τείνει στο μηδέν, για κάθε x που ανήκει στην περιοχή I που περιέχει το σημείο α , τότε η συνάρτηση f περιγράφεται σε ένα σημείο $x_0 = \alpha$ με τη βοήθεια της σειράς Taylor (στο σημείο $x_0 = \alpha$), δηλαδή:

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

ή με τη βοήθεια της σειράς Maclaurin, στο σημείο $x_0 = 0$, δηλαδή:

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η **σειρά** (Taylor ή Maclaurin) **συγκλίνει** στη συνάρτηση f .

Τις περισσότερες φορές είναι δύσκολο να υπολογίσει κανείς το υπόλοιπο $R_n(x)$. Μια εκτίμηση του υπολοίπου αυτού δίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα εκτίμησης του υπολοίπου

Αν υπάρχουν θετικές σταθερές M, r τέτοιες ώστε $|f^{(n+1)}(t)| \leq M r^{n+1}$, $\forall t \in (\alpha, x)$ ή (x, α) , τότε το υπόλοιπο $R_n(x)$, ικανοποιεί την ανισότητα:

$$|R_n(x)| \leq M r^{n+1} \frac{|x-\alpha|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Αν επιπλέον η f είναι $n+1$ φορές παραγωγίσιμη, για κάθε n , σε μια περιοχή I του σημείου α , τότε το υπόλοιπο $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ και η σειρά Taylor της f συγκλίνει στη συνάρτηση f .

Εφαρμογή 1

Να βρεθεί η γενική μορφή του πολωνύμου Taylor $n^{\text{οστου}}$ βαθμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ στο σημείο $a=2$.

Λύση

Βρίσκοντας τις διαδοχικές παραγώγους της $f(x) = \frac{1}{x}$ στο σημείο $a=2$, έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} & \Rightarrow & f(2) = \frac{1}{2} \\ f'(x) &= -\frac{1}{x^2} & \Rightarrow & f'(2) = -\frac{1}{2^2} = (-1)^1 \frac{1}{2^2} \\ f''(x) &= 2 \frac{1}{x^3} & \Rightarrow & f''(2) = 2 \frac{1}{2^3} = (-1)^2 2! \frac{1}{2^3} \\ f'''(x) &= -2 \cdot 3 \frac{1}{x^4} & \Rightarrow & f'''(2) = -2 \cdot 3 \frac{1}{2^4} = (-1)^3 3! \frac{1}{2^4} \\ & \dots & & \dots \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} & \Rightarrow & f^{(n)}(2) = (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Το πολωνύμο Taylor $n^{\text{οστου}}$ βαθμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ στο σημείο $a=2$, είναι:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{2^{k+1}} (x-2)^k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} (x-2) + \frac{1}{2^3} (x-2)^2 + \dots + (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} (x-2)^n$$

Εφαρμογή 2

Να βρεθεί η γενική μορφή του πολωνύμου Maclaurin $n^{\text{οστου}}$ βαθμού της $f(x) = \frac{x}{1-x}$.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{1-x} & \Rightarrow & f(0) = \frac{0}{1-0} = 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{(x-1)^2} & \Rightarrow & f'(0) = \frac{1}{(0-1)^2} = 1 \\ f''(x) &= -2 \frac{1}{(x-1)^3} & \Rightarrow & f''(0) = -2 \frac{1}{(0-1)^3} = 2! \\ f'''(x) &= 2 \cdot 3 \frac{1}{(x-1)^4} & \Rightarrow & f'''(0) = 2 \cdot 3 \frac{1}{(0-1)^4} = 2 \cdot 3 = 3! \\ & \dots & & \dots \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1} \frac{n!}{(x-1)^{n+1}} & \Rightarrow & f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \frac{n!}{(0-1)^{n+1}} = n! \end{aligned}$$

Άρα η γενική μορφή του πολυωνύμου Maclaurin $n^{\text{οστου}}$ βαθμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{1-x}$ ισούται με:

$$P_n(x) = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0 + \sum_{k=1}^n \frac{k!}{k!} x^k = \sum_{k=1}^n x^k = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$$

Εφαρμογή 3

Υπολογίστε το $3^{\text{ο}}$ βαθμού (προσεγγιστικό) πολυώνυμο Taylor στο σημείο $a = -1$ για την συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{1-x}$. Επίσης το $4^{\text{ο}}$ και $6^{\text{ο}}$ βαθμού και να γίνει η γραφική παράσταση των πολυωνύμων και της συνάρτησης. Τι παρατηρείτε;

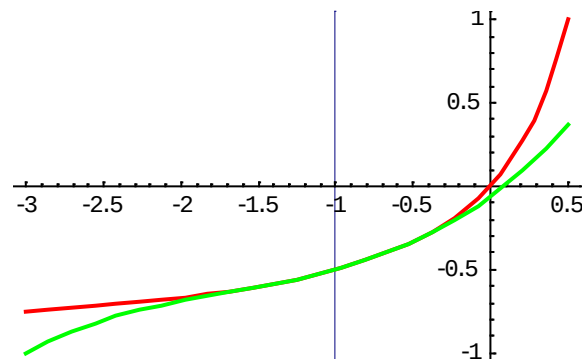
Λύση

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{1-x} & \Rightarrow & f(-1) = -\frac{1}{2} \\ f'(x) &= \frac{1}{(x-1)^2} & \Rightarrow & f'(-1) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} \\ f''(x) &= -2 \frac{1}{(x-1)^3} & \Rightarrow & f''(-1) = 2 \cdot \frac{1}{8} = 2! \cdot \frac{1}{2^3} \\ f'''(x) &= 2 \cdot 3 \frac{1}{(x-1)^4} & \Rightarrow & f'''(-1) = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{16} = 3! \cdot \frac{1}{2^4} \\ & \dots & & \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1} \frac{n!}{(x-1)^{n+1}} & \Rightarrow & f^{(n)}(-1) = n! \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

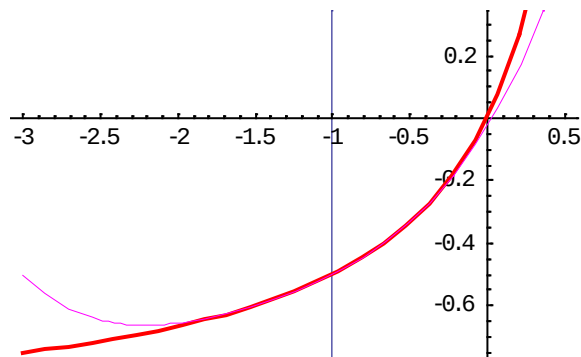
Άρα το $n^{\text{ο}}$ βαθμού πολυώνυμο Taylor στο σημείο $a = -1$ για την $f(x) = \frac{x}{1-x}$ είναι ίσο με:

(α) $3^{\text{ο}}$ βαθμού: $P_3(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x+1) + \frac{1}{8}(x+1)^2 + \frac{1}{16}(x+1)^3$



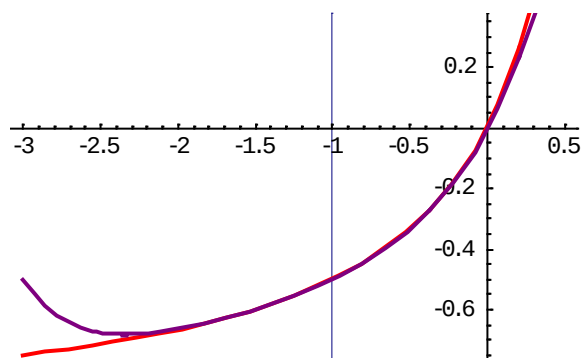
(με κόκκινο χρώμα είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης)

(β) **4^ο βαθμού:** $P_4(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x+1) + \frac{1}{8}(x+1)^2 + \frac{1}{16}(x+1)^3 + \frac{1}{32}(x+1)^4$

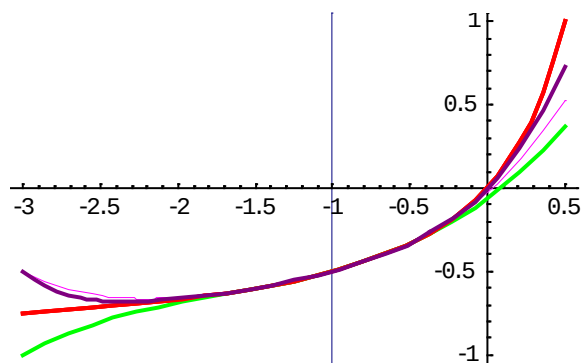


(γ) **6^ο βαθμού:**

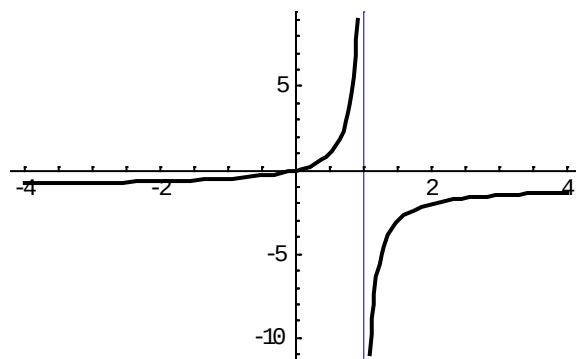
$$P_6(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x+1) + \frac{1}{8}(x+1)^2 + \frac{1}{16}(x+1)^3 + \frac{1}{32}(x+1)^4 + \frac{1}{64}(x+1)^5 + \frac{1}{128}(x+1)^6$$



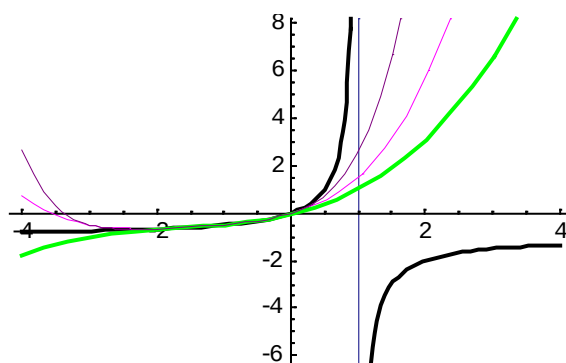
(δ) Στο παρακάτω γράφημα υπάρχει η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{x}{1-x}$ (μερική) και των πολωνύμων Taylor στο σημείο $a=-1$ 3^ο, 4^ο και 6^ο βαθμού.



(ε) Η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{x}{1-x}$ φαίνεται παρακάτω:



(στ) Γραφική Παράσταση $f(x) = \frac{x}{1-x}$ και των πολωνύμων Taylor στο σημείο $a=-1$
3^{ου}, 4^{ου} και 6^{ου} βαθμού.



Από το σχήμα είναι φανερό ότι η εκτίμηση της f , με τη βοήθεια των πολωνύμων Taylor στο σημείο $a=-1$ 3^{ου}, 4^{ου} και 6^{ου} βαθμού, είναι καλή γύρω από το σημείο $a=-1$

Παρατήρηση

Με τη βοήθεια των πολωνύμων/αναπτυγμάτων Taylor (ή Maclaurin) μπορούμε να υπολογίσουμε

- (α) προσεγγιστικές τιμές συναρτήσεων
- (β) ολοκληρώματα συναρτήσεων κ.λ.π.

Εφαρμογή 4

Βρείτε μια προσεγγιστική τιμή του $\ln 0,97$

Λύση

Είναι γνωστό ότι: $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots$

Άρα για $x = -0,03$ έχουμε (χρησιμοποιώντας τους 4^{ους} πρώτους όρους του αναπτύγματος αυτού Maclaurin)

$$\ln 0,97 = \ln(1 - 0,03) = -0,03 - \frac{(-0,03)^2}{2!} + \frac{(-0,03)^3}{3!} - \frac{(-0,03)^4}{4!} \approx -0,03047781$$

Εφαρμογή 5

Υπολογίστε (προσεγγιστικά) το

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

χρησιμοποιώντας τους 4^{ες} πρώτους όρους του αναπτύγματος Maclaurin

Λύση

Χρησιμοποιώντας τους 4^{ες} πρώτους όρους του αναπτύγματος Maclaurin

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

$$(\text{είναι γνωστό ότι: } \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots)$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^1 \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \right) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \right) dx = \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} \right) \Big|_0^1 \approx 0,946083 \end{aligned}$$

(το σφάλμα της προσέγγισης χρησιμοποιώντας π.χ. του τέσσερες πρώτους όρους του αναπτύγματος Maclaurin είναι το πολύ 0,0000003(!!!)).

Παρατήρηση

Μερικά από τα μειονεκτήματα των πολωνύμων Taylor / Maclaurin είναι και τα:

- (α) Για να υπολογίσουμε το ανάπτυγμα Taylor / Maclaurin σ' ένα σημείο $x=a$ θα πρέπει να γνωρίζουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης f , σε μια περιοχή του σημείου a .
- (β) Η προσέγγιση τα συνάρτησης από ένα πολωνύμο Taylor / Maclaurin είναι καλή σε μια περιοχή του σημείου (όσο απομακρυνόμαστε από το σημείο το σφάλμα προσέγγισης μεγαλώνει).
- (γ) Η ακρίβεια της προσέγγισης δεν αυξάνει απαραίτητα με αύξηση του βαθμού του πολωνύμου.
- (δ) Για τον υπολογισμό των πολωνύμων Taylor / Maclaurin απαιτείται υπολογισμός παραγώγων της συνάρτησης, πράξη σχετικά δύσκολη ή και μερικές φορές αδύνατη.
- (ε) Δεν είναι δυνατός ο υπολογισμός τους σε περίπτωση που δεν ξέρουμε τον αναλυτικό τύπο της συνάρτησης (έχουμε πειραματικά δεδομένα ή παρατηρήσεις).

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$

- (α) να δοθούν τα πολυώνυμα Maclaurin 1^{ου}, 2^{ου}, 3^{ου} και 4^{ου} βαθμού.
 (β) να γίνει η γραφική παράσταση των πολυωνύμων. Τι παρατηρείτε (σχετικά με την προσέγγιση).
 (γ) Να δοθούν προσεγγιστικές τιμές των $e^{0.03}$, e^2 με τη βοήθεια των παραπάνω πολυωνύμων. Τι παρατηρείτε;

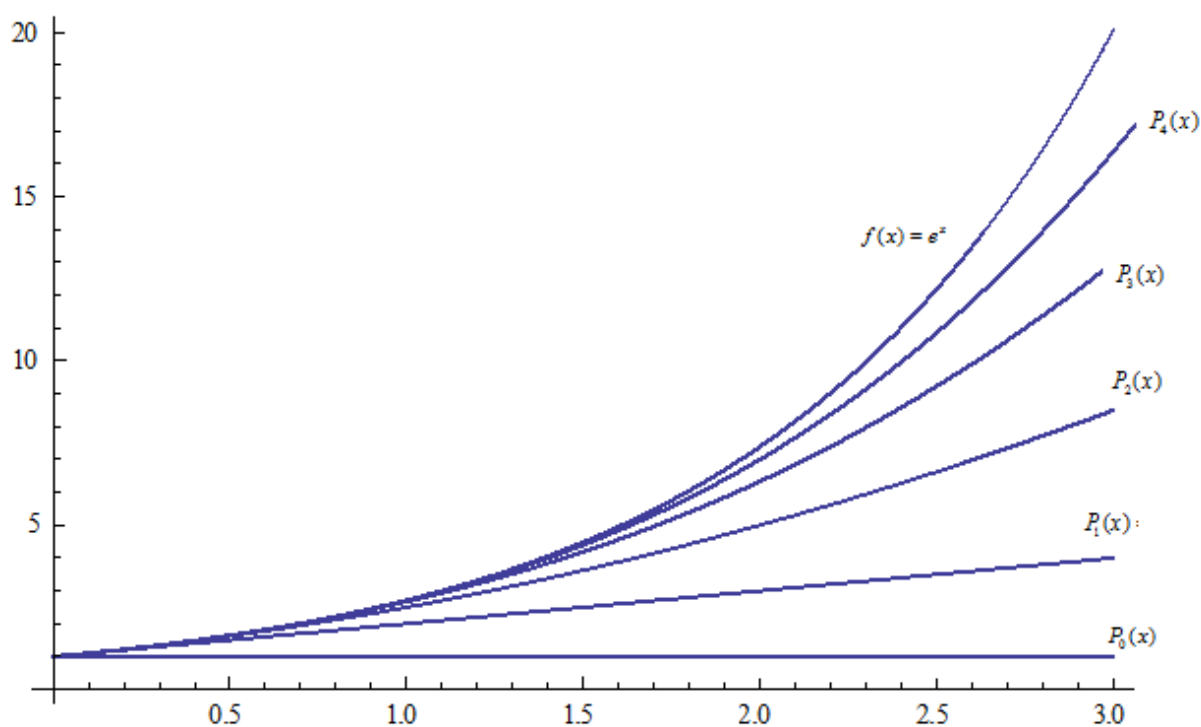
Λύση

- (α) Τα ζητούμενα πολυώνυμα είναι ίσα με

$$P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = 1 + x \quad P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

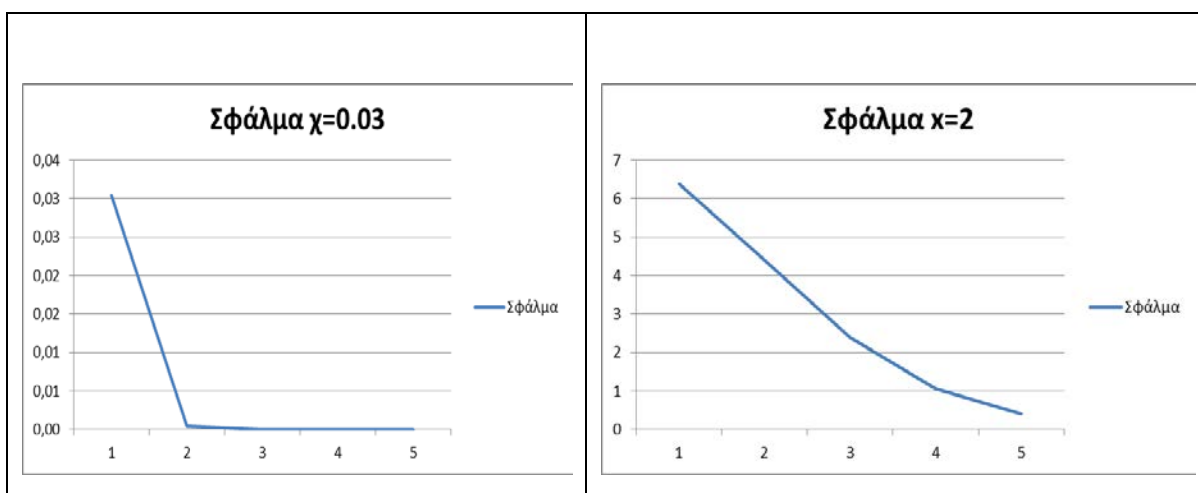
$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \quad P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

- (β) Η προσέγγιση τα συνάρτησης από τα πολυώνυμα Maclaurin είναι καλή σε μια περιοχή του σημείου 0 (όσο απομακρυνόμαστε από το σημείο 0 το σφάλμα προσέγγισης μεγαλώνει).

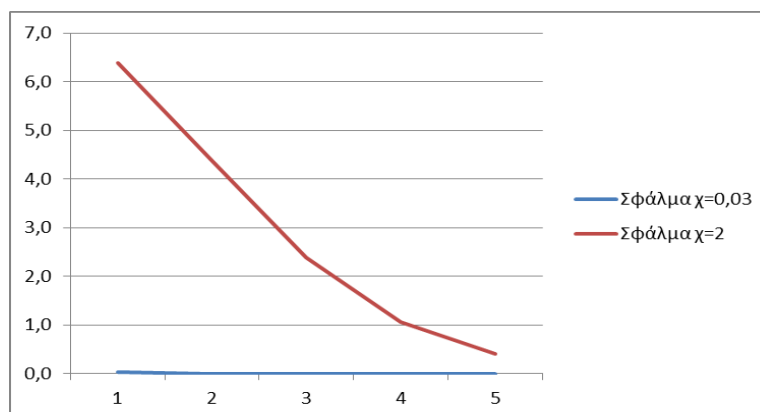


(γ)

	$\chi=0,03$	Ακριβής τιμή	Σφάλμα
$P_0(x)$	1,000000000000000	1,03045453395350	0,03045453395350
$P_1(x)$	1,030000000000000	1,03045453395350	0,00045453395350
$P_2(x)$	1,030450000000000	1,03045453395350	0,00000453395350
$P_3(x)$	1,030454500000000	1,03045453395350	0,00000003395350
$P_4(x)$	1,03045453375000	1,03045453395350	0,0000000020350
	$\chi=2$	Ακριβής τιμή	Σφάλμα
$P_0(x)$	1,000000000000000	7,38905609893070	6,38905609893070
$P_1(x)$	3,000000000000000	7,38905609893070	4,38905609893070
$P_2(x)$	5,000000000000000	7,38905609893070	2,38905609893070
$P_3(x)$	6,330000000000000	7,38905609893070	1,05905609893070
$P_4(x)$	6,990000000000000	7,38905609893070	0,39905609893070



Όσο μεγαλώνει ο βαθμός του πολυωνύμου τόσο το σφάλμα μικραίνει (και στις δύο περιπτώσεις)



Τα σφάλματα προσέγγισης είναι μικρότερα (ανεξαρτήτως βαθμού πολυωνύμου) όταν είμαστε κοντά στο σημείο 0.

Η **σειρά Maclaurin** μερικών βασικών συναρτήσεων δίνεται παρακάτω.

Σειρά Maclaurin	Διάστημα σύγκλισης
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+.....$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+x^3+x^4+.....$	$-1 < x < 1$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} +$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} +$	$x \in \mathbb{R}$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} +$	$-1 < x < 1$