

Πολύωνμο παρεμβολής Newton.

Το μειονέκτημα της μεθόδου Lagrange είναι ότι η συνάρτηση/πολύωνμο παρεμβολής που υπολογίζεται με τη βοήθειά της, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για κάθε νέα μέτρηση/σημείο που προστίθεται στα δεδομένα μας. Έτσι λοιπόν, εάν προστεθούν νέα σημεία (παρεμβολής) το πολύωνμο παρεμβολής θα πρέπει να (επανα)υπολογιστεί από την αρχή. Ο (επανα)υπολογισμός συνεπάγεται χάσιμο (υπολογιστικό) χρόνο με αποτέλεσμα την αύξηση του κόστους υπολογισμών. Λόγω στο πρόβλημα έρχεται να δώσει η μέθοδος παρεμβολής Newton με τα πολύωνμα παρεμβολής Newton.

Έστω λοιπόν ότι έχουμε $(n+1)$ -σημεία (παρεμβολής) $(x_k, y_k = f(x_k))$ $k=0, 1, 2, \dots, n$. Θέλουμε να υπολογίσουμε ένα πολύωνμο παρεμβολής $p_n(x)$ δηλ. τέτοιο ώστε $p_n(x_i) = f(x_i)$, $i=0, 1, \dots, n$. Θέλουμε το πολύωνμο να έχει τη μορφή:

$$p_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-x_0) + \alpha_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + \alpha_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

όπου $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ για προσδιορισμό!

Το $p_n(x)$ διέρχεται από το σημείο $(x_0, y_0 = f(x_0))$, οπότε:

$$p_n(x_0) = f(x_0) = \alpha_0 + \alpha_1 \overbrace{(x_0 - x_0)}^0 + \alpha_2 \overbrace{(x_0 - x_0)}^0 (x_0 - x_1) + \dots + \alpha_n \overbrace{(x_0 - x_0)}^0 (x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_{n-1})$$

$$\Rightarrow p_n(x_0) = \alpha_0 = f(x_0) = f[x_0]$$

Το $p_n(x)$ διέρχεται από το σημείο $(x_1, f(x_1))$, οπότε:

$$p_n(x_1) = f(x_1) = \alpha_0 + \alpha_1(x_1 - x_0) = f(x_0) + \alpha_1(x_1 - x_0) \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_1, x_0]$$

Για τον υπολογισμό του α_2 : Το $p_n(x)$ διέρχεται από το σημείο $(x_2, f(x_2))$ οπότε

$$p_n(x_2) = f(x_2) = \alpha_0 + \alpha_1(x_2 - x_0) + \alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ = f[x_0] + f[x_1, x_0](x_2 - x_0) + \alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \Rightarrow$$

$$\alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f[x_2] - f[x_0] - f[x_1, x_0](x_2 - x_0) \\ = f[x_2] - f[x_1] + f[x_1] - f[x_0] - f[x_1, x_0](x_2 - x_0) \\ = f[x_2] - f[x_1] + (x_1 - x_0)f[x_1, x_0] - (x_2 - x_0)f[x_1, x_0] \Rightarrow$$

$$\underbrace{x_1 - x_0 - x_2 + x_0}_{(x_1 - x_2)} f[x_1, x_0]$$

$$\alpha_2(x_2 - x_0) = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} - f[x_1, x_0] = f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0] \Rightarrow$$

$$\alpha_2 = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = f[x_2, x_1, x_0]$$

Ανάλογα υπολογίζεται ότι: $\alpha_k = f[x_k, x_{k-1}, \dots, x_1, x_0]$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Επομένως, το πολυώνυμο παρεμβολής Newton έχει την μορφή:

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\ f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0](x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

Παρατήρηση

Οι συντελεστές $\alpha_k, k=0,1,\dots,n$ του πολωνύμου παρεμβολής Newton υπολογίζονται ευκολότερα με τη βοήθεια του πίνακα των διατεταγμένων διαφορών

x_0	$f(x_0)$	α_0	α_1	α_2	$\vdots$
		$f[x_1, x_0]$			
x_1	$f(x_1)$		$f[x_2, x_1, x_0]$		$\vdots$
		$f[x_2, x_1]$			
x_2	$f(x_2)$		$f[x_3, x_2, x_1]$		$\vdots$
		$\vdots$			
$\vdots$	$\vdots$				
$\vdots$	$\vdots$				
x_n	$f(x_n)$				$\vdots$

α_n
 $f[x_n, \dots, x_1, x_0]$

Παρατήρηση

Είναι φανερό, ότι, για τα πολωνύμα παρεμβολής Newton ισχύει ο αναδρομικός τύπος:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + f[x_{n+1}, x_n, \dots, x_1, x_0](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

Αρα με την πρόσδεση ενός επιπλέον σημείου $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$, το μόνο που απαιτείται είναι ο υπολογισμός της διατεταγμένης διαφοράς $f[x_n, x_{n+1}, \dots, x_1, x_0]$ (χρήσι το ήδη υπολογισθέντος πίνακα διατεταγμένων διαφορών).

Σφάλμα παρεμβολής

Για το σφάλμα παρεμβολής με το πολώνυμο Newton ισχύουν ανάλογα με αυτά που ειπώθηκαν στην παρεμβολή με πολώνυμα Lagrange (λόγω μοναδικότητας των πολωνύμων προσέγγισης).

Παρατήρηση

Εάν δοθούν $(n+1)$ σημεία παρεμβολής $(x_k, f(x_k))$, $k=0, 1, 2, \dots, n$ τα πολυώνυμα Newton ή Lagrange συμπίπτουν (διέρχονται από τα ίδια σημεία/μοναδικότητα του πολυωνύμου παρεμβολής). Άρα η μορφή τους είναι διαφορετική (χρήση σε διαφορετικές περιπτώσεις).

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

(α) Να βρεθεί το 2^ο βαθμού πολυώνυμο Newton που παρεμβάλλει τη συνάρτηση στα σημεία $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

(β) Εάν προσθέσουμε το σημείο $x_3 = 0$, να υπολογισθεί το 3^ο βαθμού πολυώνυμο παρεμβολής.

Λύση

(α) Εδώ $f(x_0) = f(-1) = \frac{1}{2}$, $f(x_1) = f(1) = \frac{1}{2}$ ή $f(x_2) = \frac{1}{5}$

Σχηματίζουμε τον πίνακα των διατεταγμένων διαφορών

$x_0 = -1$	$f(x_0) = \frac{1}{2} \xleftarrow{\alpha_0}$		
		$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{1 - (-1)} = 0 \xleftarrow{\alpha_1}$	
$x_1 = 1$	$f(x_1) = \frac{1}{2}$		
		$f[x_2, x_1] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{2}}{2 - 1} = -0.3$	$f[x_2, x_1, x_0] \xleftarrow{\alpha_2}$
$x_2 = 2$	$f(x_2) = \frac{1}{5}$		$\frac{-0.3 - 0}{2 + 1} = -0.1$

Άρα το 2^ο βαθμού πολυώνυμο παρεμβολής Newton είναι ίσο με:

$$p_2(x) = 0.5 + 0(x - (-1)) + (-0.1)(x - (-1))(x - 1) = \dots = -0.1x^2 + 0.6 = p_2(x)$$

⑥ (Χρησιμοποιώντας τον ήδη υπολογισμένο πίνακα διαφορών) Το $p_3(x)$:

$x_0 = -1$	$f(x_0) = 0.5$			
	$f(x_0) = f[x_1, x_0] = 0$			
$x_1 = 1$	$f(x_1) = 0.5$	$f[x_2, x_1, x_0] = -0.1$		
	$f[x_2, x_1] = -0.3$		$f[x_3, x_2, x_1, x_0] =$	
$x_2 = 2$	$f(x_2) = 0.2$	$f[x_3, x_2, x_1] = 0.3$	$= \frac{0.2 + 0.1}{1} = 0.3$	
	$f[x_3, x_2] = \frac{1 - 0.2}{0 - 2} = -0.4$			
$x_3 = 0$	$f(x_3) = 1$			

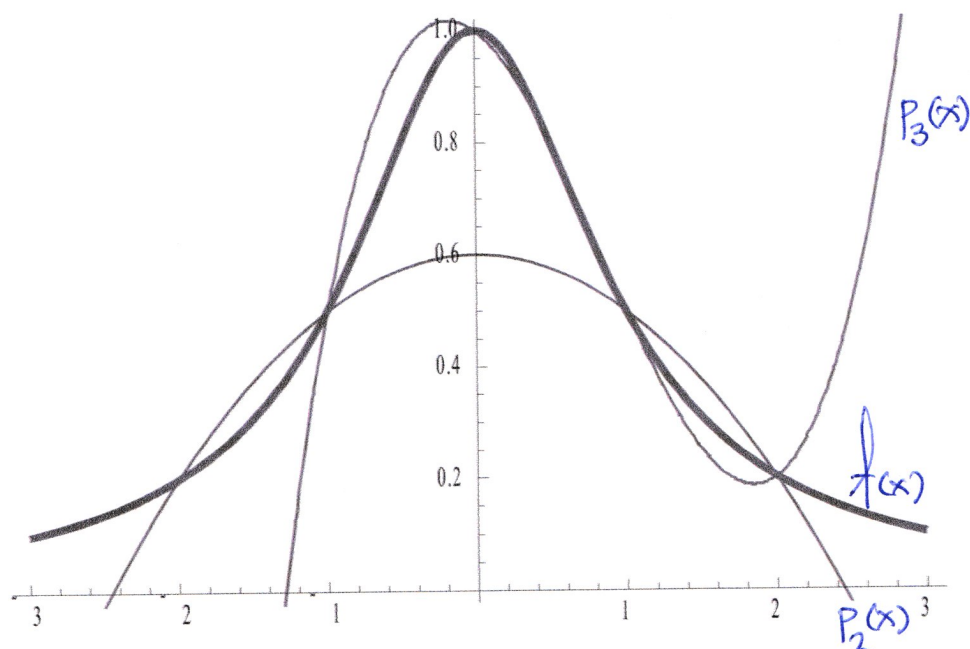
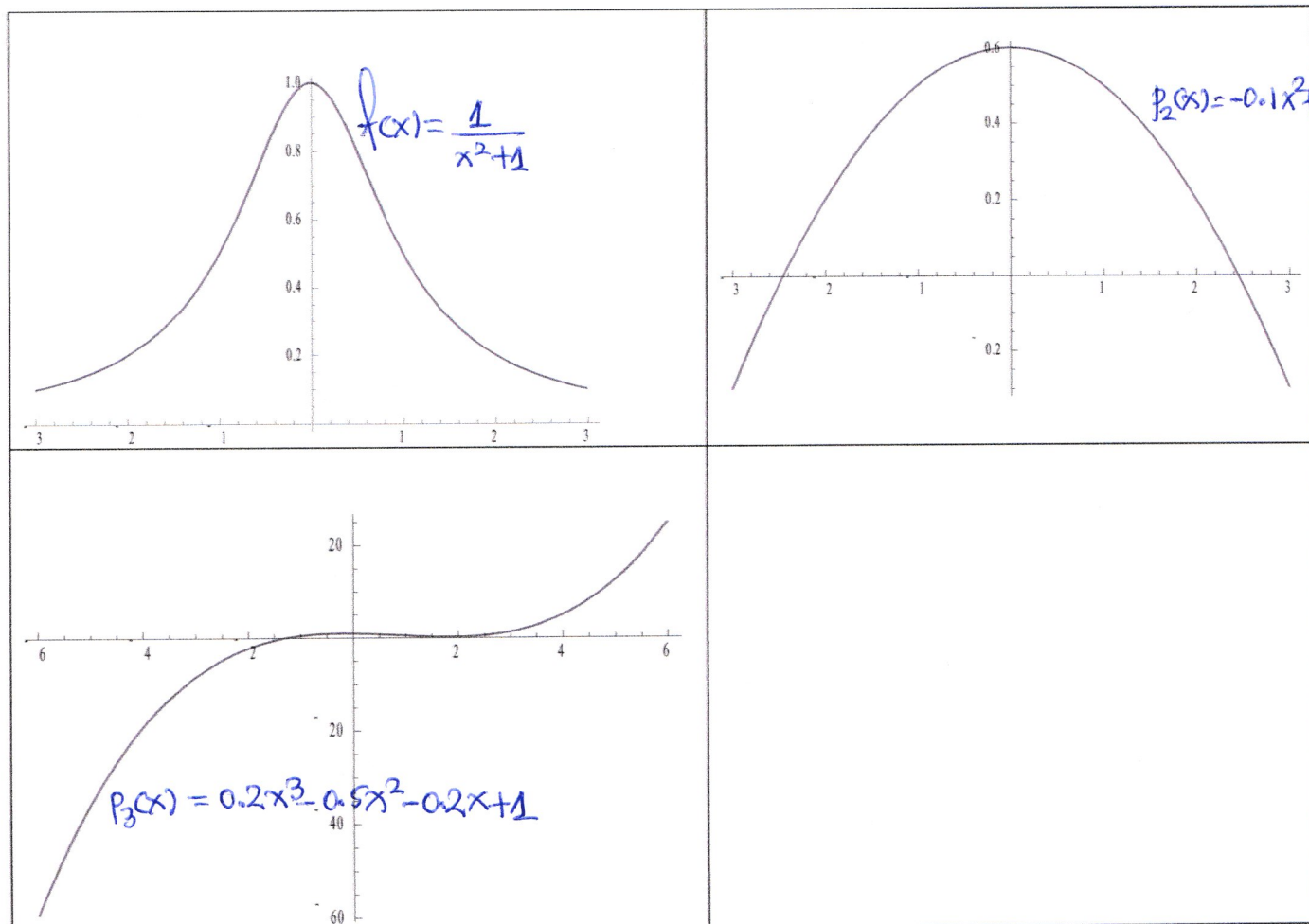
Άρα το $p_3(x) = p_2(x) + 0.3(x - (-1))(x - 1)(x - 2)$

$$= -0.1x^2 + 0.6 + 0.3(x+1)(x-1)(x-2) \Rightarrow$$

$$p_3(x) = 0.2x^3 - 0.5x^2 - 0.2x + 1$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\frac{\pi N}{6}$$



Παρατήρηση

Οι συντελεστές $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ μπορούν να υπολογισθούν (εκτός από τις διαφερέντες διαφορές) ή με τη βοήθεια του παρακάτω συστήματος: αφού το $p_n(x)$ διέρχεται από τα σημεία $(x_k, f(x_k))$, $k=0, 1, 2, \dots, n$ έχουμε:

$$\begin{cases} p_n(x_0) = f(x_0) = \alpha_0 \\ p_n(x_1) = f(x_1) = \alpha_0 + \alpha_1(x_1 - x_0) \\ p_n(x_2) = f(x_2) = \alpha_0 + \alpha_1(x_2 - x_0) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)\alpha_2 \\ \vdots \\ p_n(x_n) = f(x_n) = \alpha_0 + (x_n - x_0)\alpha_1 + \dots + (x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})\alpha_n \end{cases}$$

Το παραπάνω σύστημα (ή ο πίνακας συντελεστών των αγνώστων) είναι κάτω τριγωνικό (δηλ. κάθε εξίσωση περιέχει έναν επιπλέον αγνώστο από την προηγούμενη) οπότε μπορεί να λυθεί εύκολα με προς τα εμπρός αντικατάσταση (δηλ. λύνουμε την 1^η ως προς α_0 , την αντικαθιστούμε στην 2^η ή υπολογίζουμε την α_1 κ.ο.κ.)

Παράδειγμα

Αν δίνονται τα σημεία $(1, 2), (3, 4), (5, 6)$ να βρεθεί το 2^ο βαθμού πολυώνυμο Newton που παρεμβάλλει τα σημεία (προς τα εμπρός αντίθετα)

Λύση

Δώω $x_0=1, x_1=3, x_2=5$ ή $f(1)=2, f(3)=4, f(5)=6$, οπότε:

$$f(x_0) = f(1) = 2 = \alpha_0$$

$$f(x_1) = f(3) = 4 = \alpha_0 + (x_1 - x_0)\alpha_1 \Rightarrow 4 = 2 + (3-1)\alpha_1 \Rightarrow 2\alpha_1 = 4-2 \Rightarrow \alpha_1 = 1$$

$$f(x_2) = f(5) = 6 = \alpha_0 + (x_2 - x_0)\alpha_1 + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)\alpha_2 \Rightarrow$$

$$6 = 2 + (5-1)1 + (5-1)(5-3)\alpha_2 \Rightarrow$$

$$6 = 2 + 4 + (5-1)(5-3)\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$

Άρα το $p_2(x) = 2 + (x-1)1 + (x-1)(x-3) \cdot 0 = x+1$
 (όχι το $p_2(x)$ είναι 1ου βαθμού) #

Παράδειγμα

- Δίνεται (συνεχής) συνάρτηση f τω $f(0)=1$, $f(1)=-4$, $f(2)=-3$
- (α) Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής Newton στα σημεία $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$.
 - (β) Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange στα ίδια σημεία
 - (γ) Να συγκριθούν τα πολυώνυμα

Λύση

(α) κατασκευάζουμε τον πίνακα των διατεταγμένων διαφορών:

$x_0=0$	$f(0)=1$ $\leftarrow \alpha_0$		
		$f[x_1, x_0] = \frac{-4-1}{1-0} = -5$ $\leftarrow \alpha_1$	
$x_1=1$	$f(1)=-4$		$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{1+5}{2-0} = 3$ $\leftarrow \alpha_2$
		$f[x_2, x_1] = \frac{-3+4}{2-1} = 1$	
$x_2=2$	$f(2)=-3$		

$$\begin{aligned} \text{Άρα } p_2(x) &= 1 + (x-x_0)(-5) + 3(x-x_0)(x-x_1) = \\ &= 1 - 5(x-0) + 3(x-0)(x-1) = \\ &= 1 - 5x + 3x(x-1) = 1 - 5x + 3x^2 - 3x = 3x^2 - 8x + 1 = p_2(x) \end{aligned}$$

(β) Το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange δίνεται από την:

$$L_2(x) = l_0(x)f(x_0) + l_1(x)f(x_1) + l_2(x)f(x_2)$$

$$\text{όπου } L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = \frac{x(x-2)}{-1}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x(x-1)}{2}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-1)(x-2)}{2} \cdot 1 + (-1) \cdot \frac{x(x-2)}{-1} + \frac{x(x-1)}{2} \cdot (-3) \\ &= -\frac{3x^2}{2} + \frac{3x}{2} + 4x - 8x + \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + 1 = 3x^2 - 8x + 1 \end{aligned}$$

(γ) Παρατηρούμε ότι τα δύο πολυώνυμα συμπίπτουν (μοναδικότητα πολυωνύμου παρεμβολής), η μορφή τους αλλάζει.

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ η' τα σημεία $x_0=0, x_1=1, x_2=2, x_3=3$.

- Να βρεθεί, με τη βοήθεια των διατεταγμένων διαφορών, το πολυώνυμο παρεμβολής Newton, της f .
- Με τη βοήθεια του πολυωνύμου να δοθεί μια προσέγγιση του $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Να υπολογιστεί το ακριβές εφάλμα.
- Με τη βοήθεια του τύπου του εφάλματος, να εκτιμηθεί το εφάλμα της προσέγγισης του $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Λύση

Εδώ $x_0=0, x_1=1, x_2=2, x_3=3$ ή'

$$f(x_0) = \cos 0 = 1, \quad f(x_1) = \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad f(x_2) = \cos \pi = -1, \quad f(x_3) = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

$x_0=0$	$f(0)=1$	α_0			
$x_1=1$	$f(1)=0$	$f[x_1, x_0] = \frac{0-1}{1-0} = -1$	α_1	$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{-1+1}{2-0} = 0$	α_2
$x_2=2$	$f(2)=-1$	$f[x_2, x_1] = \frac{-1-0}{2-1} = -1$		$f[x_3, x_2, x_1, x_0] = \frac{1+1}{3-1} = 1$	α_3
$x_3=3$	$f(3)=0$	$f[x_3, x_2] = \frac{0+1}{3-2} = 1$		$\frac{1-0}{3-0} = \frac{1}{3}$	

Άρα, $p_3(x) = 1 + (x-0)(-1) + 0(x-0)(x-1) + \frac{1}{3}(x-0)(x-1)(x-2) \Rightarrow$

$$p_3(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{1}{3}x + 1$$

(β) $\cos \frac{\pi}{3} = p_3\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) + 1 = \dots \approx 0.4320988$

εφαρμόζοντας $|\cos \frac{\pi}{3} - p_3(\frac{2}{3})| = |0.5 - 0.4320988| = 0.067901.$

(γ) $f(x) - p_3(x) = (x-0)(x-1)(x-2)(x-3) \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$ οπότε

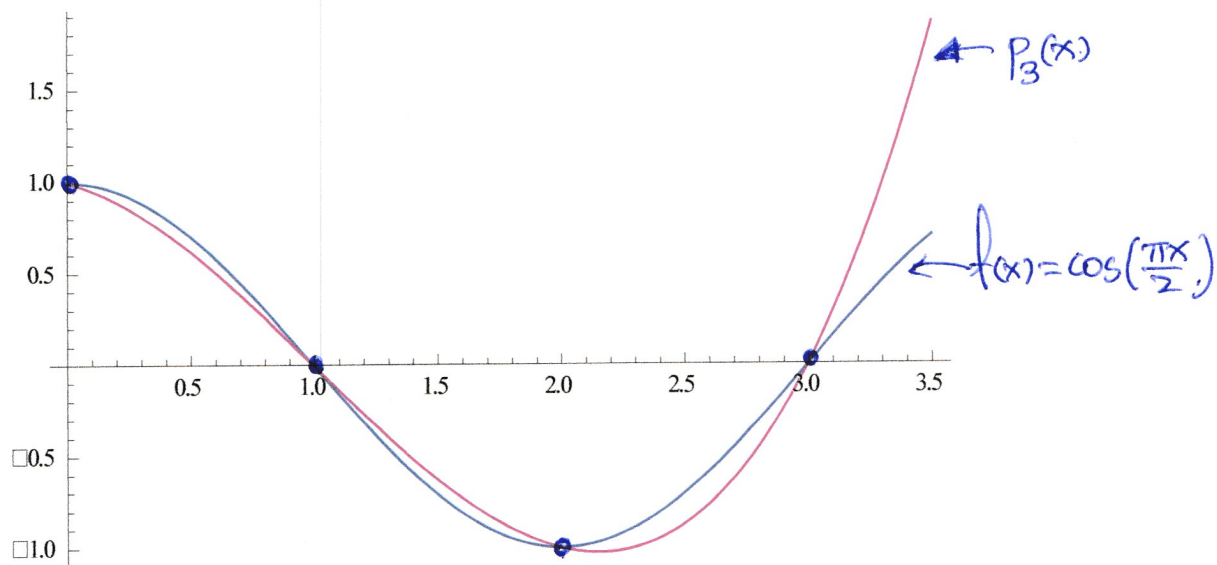
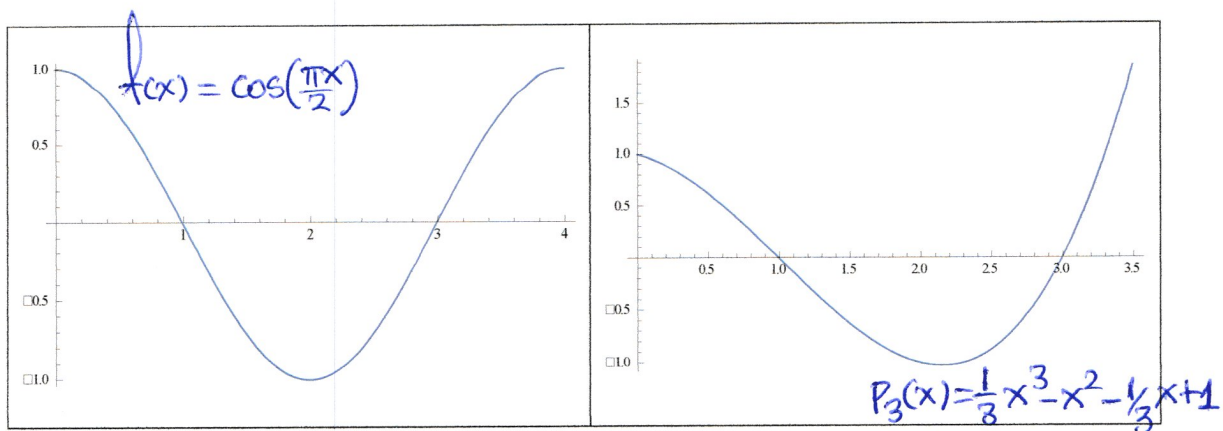
$$|f(\frac{2}{3}) - p_3(\frac{2}{3})| = \frac{1}{4!} \cdot \frac{\pi^4}{24} \left| \left(\frac{2}{3}-0\right)\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}-2\right)\left(\frac{2}{3}-3\right) \right| \cdot \left| \cos\left(\frac{\pi \xi}{2}\right) \right|$$

$$\leq \frac{1}{4!} \cdot \frac{\pi^4}{24} \left| \left(\frac{2}{3}-0\right)\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}-2\right)\left(\frac{2}{3}-3\right) \right| = 0.175376$$

#

Πομπόνη Newton: $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

$\frac{\pi N}{11}$



- $\rightarrow$ σημεία παρεμβολής
- $x_0 = 0$
- $x_1 = 1$
- $x_2 = 2$
- $x_3 = 3$