

Πολυώνυμα παρεμβολής Lagrange

Είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο ότι, ο υπολογισμός του πολυωνύμου παρεμβολής (ή) σημείων μπορεί να γίνει με τη βοήθεια/χρήση ενός γραμμικού συστήματος. Ο τρόπος αυτός είναι αρκετά δυσχερής/επίπονος όσο ο αριθμός των σημείων μεγαλώνει. Θα δούμε λοιπόν να βρούμε μια ευκολότερη μέθοδο παρεμβολής. Μια από αυτές είναι κ' η εξής: Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση/πολυώνυμο παρεμβολής που διέρχεται από τα σημεία (x_0, y_0) κ' (x_1, y_1) (ή $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$). κ' έστω ότι για την παρεμβολή χρησιμοποιούμε ένα πολυώνυμο 1ου βαθμού:

$$L_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x \quad \text{με } \alpha_0, \alpha_1 \text{ για προσδιορισμό.}$$

Τότε, επειδή το πολυώνυμο διέρχεται από τα σημεία, έχουμε:

$$L_1(x_0) = \alpha_0 + x_0 \alpha_1 = y_0 = f(x_0)$$

$$L_1(x_1) = \alpha_0 + x_1 \alpha_1 = y_1 = f(x_1)$$

Η ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος:

$$\det(V) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} = (x_1 - x_0) \neq 0$$

υποθέτουμε ότι τα
σημεία είναι
διακεκριμένα.

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Cramer, έχουμε:

$$\alpha_0 = \frac{\det(V_0)}{\det(V)} = \frac{\begin{vmatrix} f(x_0) & x_0 \\ f(x_1) & x_1 \end{vmatrix}}{x_1 - x_0} = \frac{x_1 f(x_0) - x_0 f(x_1)}{x_1 - x_0}$$

$$\alpha_1 = \frac{\det(V_1)}{\det(V)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & f(x_0) \\ 1 & f(x_1) \end{vmatrix}}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\begin{aligned} \text{Επομένως, } L_1(x) &= \alpha_0 + \alpha_1 x = \frac{x_1 f(x_0) - x_0 f(x_1)}{x_1 - x_0} + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} x = \\ &= \underbrace{\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}}_{L_0(x)} f(x_0) + \underbrace{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}_{L_1(x)} f(x_1) \end{aligned}$$

δηλ.

$$L_1(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1)$$

Η μέθοδος παρεμβολής καλείται μέθοδος Lagrange, το δε πολυώνυμο $L_1(x)$ πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange 1^{ου} βαθμού. Η μέθοδος μπορεί να γενικευθεί κ' στην περίπτωση παρεμβολής $(n+1)$ -σημείων (πολυώνυμο παρεμβολής n ^{του} βαθμού).

Το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange n ^{του} βαθμού (στα σημεία $(x_i, y_i = f(x_i))$ $i=0, 1, 2, \dots, n$ δίνεται από τις σχέσεις:

$$L_n(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + \dots + L_n(x) f(x_n)$$

όπου

$$L_j(x) = \frac{\overset{\substack{\uparrow \\ \text{το } (x-x_j) \text{ χάνει}}}{(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{j-1})(x-x_{j+1}) \dots (x-x_n)}}{(x_j-x_0)(x_j-x_1) \dots (x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1}) \dots (x_j-x_n)}$$

το $L_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

Παρατηρήσεις
Μια βασική αδυναμία της μεθόδου είναι η εξής: αν έχουν δοθεί $n+1$ κόμβοι ή έχει υπολογιστεί το $L_n(x)$ κ' δοθεί ένα επιπλέον σημείο, για τον προσδιορισμό του $L_{n+1}(x)$ θα πρέπει να επαναληφθούν όλοι οι υπολογισμοί (δεν μπορεί να βρεθεί μια αναδρομική σχέση μεταξύ των $L_n(x)$ κ' $L_{n+1}(x)$).

$$y_i = f(x_i)$$

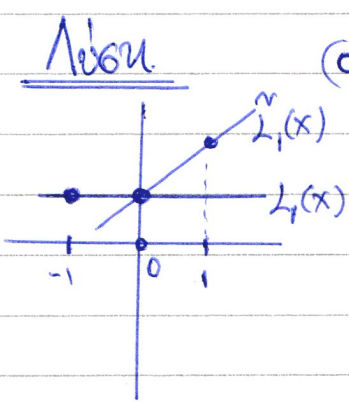
Παράδειγμα

Έστω δίνονται τα σημεία

x_i	0	1	2
y_i	-1	0	1

Να προσδιοριστεί

- (α) ένα πολυώνυμο παρεμβολής:
- (α) πρώτου βαθμού: Ⓘ με τη βοήθεια των σημείων x_0, x_1
- Ⓢ ——— " ——— " ——— " x_1, x_2
- (β) δεύτερου βαθμού με τη μέθοδο Lagrange.
- (γ) δεύτερου βαθμού σε εκθετική μορφή.



(α) Ⓘ Το πολυώνυμο Lagrange $L_1(x)$ που διέρχεται από τα σημεία $(-1, 1)$ κ' $(0, -1)$ υπολογίζεται:

$$L_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) \quad \text{όπου}$$

$$L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} = \frac{x-0}{-1-0} = -x$$

$$L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{x+1}{0+1} = x+1$$

άρα

$$L_1(x) = (-x)f(-1) + (x+1)f(0) = (-x)1 + (x+1)(-1) = -x - x - 1 = -2x - 1$$

$$\text{όχι } L_1(x) = 1$$

Παρατήρηση

Το $L_1(x) = 1 = y$ είναι η ευθεία που ενώνει τα σημεία $(-1, 1)$ κ' $(0, 1)$ (όπως αναμενόταν, αφού το πολυώνυμο παρεμβολής είναι μοναδιαίο).

Ⓢ Ανάλογα, το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange, από τα σημεία x_1, x_2 έχει εξίσωση:

$$L_2(x) = 1+x \quad \left(\begin{array}{l} \text{ευθεία που ενώνει} \\ \text{τα } (0, 1) \text{ κ' } (1, 2) \end{array} \right)$$

⑥ Το πολυώνυμο Lagrange 2^{ου} βαθμού, που παρεμβάγει τα σημεία x_0, x_1, x_2 είναι:

$$L_2(x) = L_0(x)f(-1) + L_1(x)f(0) + L_2(x)f(1)$$

όπου

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{x(x-1)}{(-1)(-2)} = \frac{x(x-1)}{2} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = 1-x^2$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{x(x+1)}{2} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

επομένως:

$$L_2(x) = \frac{x(x-1)}{2} \cdot 1 + (1-x^2) \cdot 1 + \frac{x(x+1)}{2} \cdot 2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 1$$

$$\text{οπ. } L_2(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 1$$

(γ) Το $P_2(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ κ.

$$\left. \begin{aligned} P_2(-1) &= \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ P_2(0) &= \alpha_0 = 1 \\ P_2(1) &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_0 &= 1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \end{aligned} \xrightarrow{+} \begin{aligned} 2\alpha_2 &= 1 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{2} = \alpha_1 \end{aligned}$$

Άρα $P_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$

Παρατήρηση

Ένας (εύκολος) τρόπος υπολογισμού του ποινώνυμου Lagrange είναι με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα:

	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n	Γινόμενα
x_0	<u>$x-x_0$</u>	x_0-x_1	x_0-x_2	$\dots$	x_0-x_n	$\pi_0(x) = (x-x_0)(x_0-x_1)\dots(x_0-x_n)$
x_1	x_1-x_0	<u>$x-x_1$</u>	x_1-x_2	$\dots$	x_1-x_n	$\pi_1(x) = (x_1-x_0)(x-x_1)\dots(x_1-x_n)$
x_2	x_2-x_0	x_2-x_1	<u>$x-x_2$</u>	$\dots$	x_2-x_n	$\pi_2(x)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	x_n-x_0	x_n-x_1	x_n-x_2	$\dots$	<u>$x-x_n$</u>	$\pi_n(x)$
Διαγώνιο γινόμενο $\rightarrow$						$\pi_{n+1}(x) = (x-x_0)\dots(x-x_n)$

Τότε οι $l_j(x) = \frac{\pi_{n+1}(x)}{\pi_j(x)} \quad j=0,1,\dots,n-1$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Να προσδιοριστεί το ποινώνυμο παρεμβολής που διέρχεται από τα σημεία:

x	-1	0	1
y	1	1	2

Λύση

Κατασκευάζουμε τον πίνακα:

	$x_0=-1$	$x_1=0$	$x_2=1$	Γινόμενα
$x_0=-1$	<u>$x-(-1)=x+1$</u>	$-1-0=-1$	-2	$\pi_0(x) = (x+1)(-1)(-2)$
$x_1=0$	1	<u>$x-0=x$</u>	-1	$\pi_1(x) = x \cdot 1 \cdot (-1)$
$x_2=1$	$1-(-1)=2$	1	<u>$x-1$</u>	$\pi_2(x) = 2 \cdot 1 \cdot (x-1)$
				$\pi_3(x) = (x+1)x(x-1)$

ΟΠΩΣ:

$$L_0(x) = \frac{\pi_3(x)}{\pi_0(x)} = \frac{(x+1)(x-1)x}{(x+1)2} = \frac{x^2-x}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{\pi_3(x)}{\pi_1(x)} = \frac{(x+1)(x-1)x}{(-1)x} = 1-x^2$$

$$L_2(x) = \frac{\pi_3(x)}{\pi_2(x)} = \frac{(x+1)(x-1)x}{2(x-1)} = \frac{x^2+x}{2}$$

ΟΠΩΣ:

$$L_2(x) = \frac{x^2-x}{2} \cdot 1^{y_0} + (1-x^2) \cdot 1^{y_1} + \frac{x(x+1)}{2} \cdot 2^{y_2} = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 1$$

Παράδειγμα (ολοκληρώματα Gaussian)
 Δίνεται το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

- (α) Να υπολογισθεί το I με τη βοήθεια πολλαπλών παρεμβολής
 Lagrange στα σημεία $x_0=0$, $x_1=0.5$ ή $x_2=1.0$.
 (β) Να επαναληφθεί το (α) με σημεία τα $x_0=0$, $x_1=0.3$, $x_2=0.6$, $x_3=1$
 (γ) Αν η πραγματική τιμή $I=0.746824$, να βρεθεί το σφάλμα σε
 κάθε περίπτωση. Τι παρατηρείτε;

Λύση

(α) Κατασκευάζουμε τον πίνακα:

	$x_0=0$	$x_1=0.5$	$x_2=1$	Γινόμενα
$x_0=0$	$x-0=x$	-0.5	-1	$\pi_0(x)=0.5x$
$x_1=0.5$	0.5	$x-0.5$	-0.5	$\pi_1(x)=(-0.25)(x-0.5)$
$x_2=1$	1	0.5	$x-1$	$\pi_2(x)=0.5(x-1)$
			Διαγώνιο γινόμενο	$\pi_3(x)=x(x-0.5)(x-1)$

$$h_0(x) = \frac{\pi_3(x)}{\pi_0(x)} = \frac{x(x-0.5)(x-1)}{0.5x} = 2x^2 - 3x + 1$$

$$h_1(x) = \frac{\pi_3(x)}{\pi_1(x)} = \frac{x(x-0.5)(x-1)}{(-0.25)(x-0.5)} = 4x - 4x^2$$

$$h_2(x) = \frac{\pi_3(x)}{\pi_2(x)} = \frac{x(x-0.5)(x-1)}{0.5(x-1)} = -x + 2x^2$$

Επομένως, το πολλαώνυμο Lagrange είναι ίσο με:

$$L_2(x) = (2x^2 - 3x + 1) \cdot e^{-0^2} + (4x - 4x^2) e^{-0.5^2} + (-x + 2x^2) e^{-1^2} \Rightarrow$$

$$L_2(x) = 1 - 0.252676x - 0.379444x^2$$

Τώρα $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \int_0^1 L_2(x) dx =$

$$= \int_0^1 (1 - 0.252676x - 0.379444x^2) dx$$

$$= \left(x - 0.252676 \frac{x^2}{2} - 0.379444 \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 0.747180$$

$$\text{σφάλμα} = |0.746824 - 0.747180| = 0.000356$$

(β) Εργαζόμενοι ανάλογα, έχουμε:

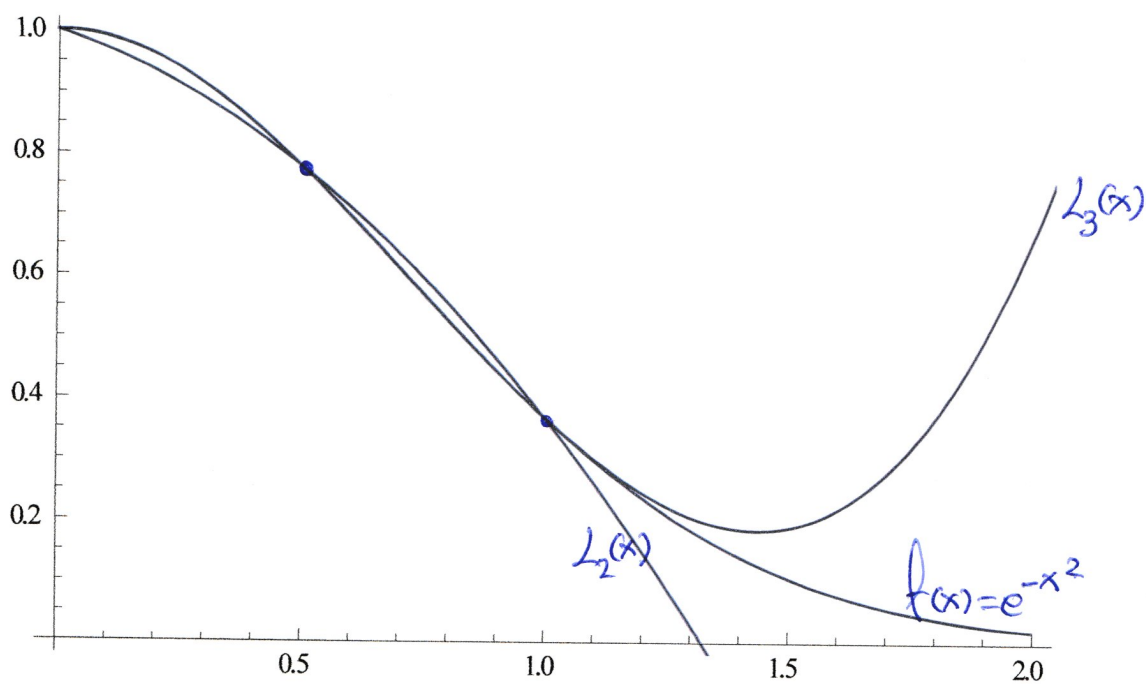
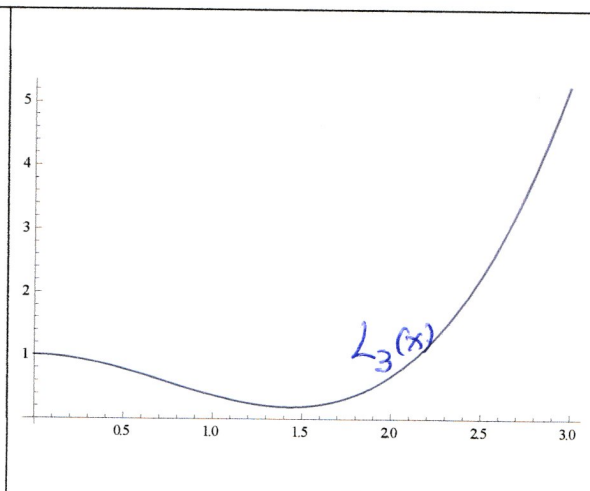
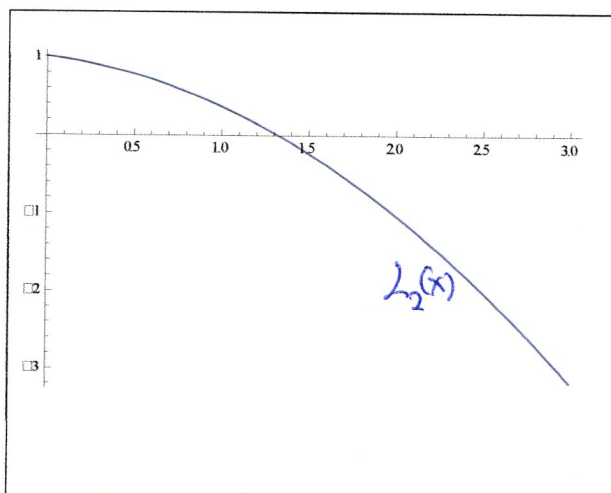
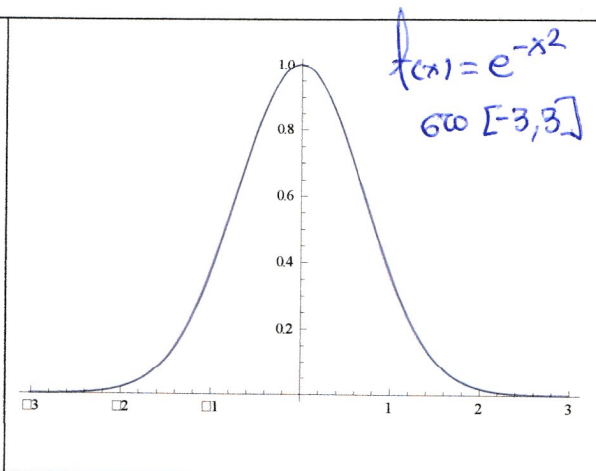
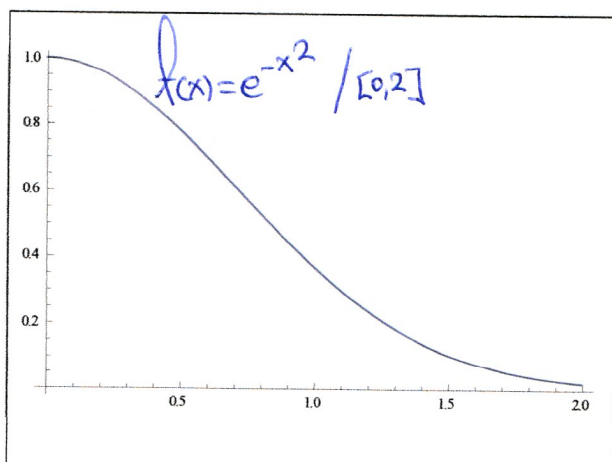
$$L_3(x) = 1 + 0.033616x - 1.24093x^2 + 0.575195x^3$$

π' $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \int_0^1 L_3(x) dx = \dots = 0.746963$

$$\text{σφάλμα} = |0.746824 - 0.746963| = 0.000139$$

Παρατήρηση

Βλέπουμε ότι, με την αύξηση των σημείων παρεμβολής, έχουμε καλύτερη εκτίμηση του I , επομένως μικρότερο σφάλμα.



Σφάλμα παρεμβολής

Εάν είναι γνωστός ο αναγωγικός τύπος της $f(x)$ ($x \in [\alpha, \beta]$, $x_i \in (\alpha, \beta)$), τότε το σφάλμα παρεμβολής ε' ένα σημείο x είναι ίσο με

$$\varepsilon(x) = f(x) - p_n(x).$$

Γενικότερα, ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα

Εάν $f \in C^{n+1}[\alpha, \beta]$, τότε $\forall x \in [\alpha, \beta]$, το (επιμελανό) σφάλμα

$$\varepsilon(x) = f(x) - p_n(x) = (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

$$= \left\{ \prod_{j=0}^n (x-x_j) \right\} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \quad \text{για } \xi_x \in [\alpha, \beta]$$

Το μέγιστο σφάλμα υπολογίζεται:

$$\|f - p_n\|_{\infty} = \max_{x \in [\alpha, \beta]} |f(x) - p_n(x)| \leq \max_{x \in [\alpha, \beta]} \left| \prod_{j=0}^n (x-x_j) \right| \cdot \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty}}{(n+1)!}$$

$$\text{όπου } \|f^{(n+1)}\|_{\infty} = \max_{x \in [\alpha, \beta]} |f^{(n+1)}(x)|$$

Παρατήρηση

Ο παραπάνω τύπος έχει λίγη πρακτική αξία/χρήση αφού για τον υπολογισμό του σφάλματος πρέπει να είναι γνωστό το (άγνωστο) ξ . Εάν όμως μπορεί να βρεθεί ένα άνω φράγμα της $f^{(n+1)}$, τότε μπορεί να εκτιμηθεί το απόλυτο (μέγιστο) σφάλμα.

Στην περίπτωση:

① 2 κόμβων: εάν $|f^{(2)}(x)| \leq M$, τότε αποδεικνύεται ότι:

$$|\varepsilon(x)| \leq \frac{M}{8} h^2 \quad \text{όπου } h = x_1 - x_0$$

$$x_0 \quad h \quad x_1 \quad h \quad x_2$$

Le II

II 3ων κόμβων: αν $|f^{(3)}(x)| \leq M$ ή τα σημεία είναι ισοπέχοντα, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, τότε

$$|E(x)| \leq \frac{M}{9\sqrt{3}} h^3$$

III 4ων κόμβων: αν $|f^{(4)}(x)| \leq M$ ή τα σημεία είναι ισοπέχοντα, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, $x_3 = x_0 + 3h$, τότε:

$$|E(x)| \leq \frac{M}{24} h^4$$

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x) = \cos x$ $x \in [0, \pi/2]$.

(α) Να προσεγγιστεί η $f(x)$ με τη μέθοδο Lagrange, χρησιμοποιώντας τους κόμβους $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$.

(β) Να υπολογιστούν: I $\cos(\pi/3)$ ή II $\cos(\pi/6)$

(γ) Να βρεθεί ένα άνω φράγμα του σφάλματος παρεμβολής

(δ) Να δοθεί το γράφημα του σφάλματος παρεμβολής

Λύση

(α) $f(0) = \cos 0 = 1$, $f(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.70710$ ή $f(\pi/2) = 0$

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{\pi}{2}$$

Το πολυώνυμο 2ου βαθμού Lagrange $L_2(x)$:

$$L_2(x) = L_0(x)f(0) + L_1(x)f(\pi/4) + L_2(x)f(\pi/2)$$

όπου
$$L_0(x) = \frac{(x - \pi/4)(x - \pi/2)}{(0 - \pi/4)(0 - \pi/2)} = \frac{8x^2 - 6\pi x + \pi^2}{\pi^2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-\pi/2)}{(\pi/4-0)(\pi/4-\pi/2)} = \frac{-8(2x^2-\pi x)}{\pi^2}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{8x^2-6\pi x+\pi^2}{\pi^2} \cdot 1 + (-8) \frac{2x^2-\pi x}{\pi^2} \times 0.70710 = \\ &= \frac{-3.31360x^2 - 1.07819x + \pi^2}{\pi^2} = L_2(x) \end{aligned}$$

$$(6) \text{ I } L_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-3.31360\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - 1.07819 \cdot \frac{\pi}{3} + \pi^2}{\pi^2} = \dots = 0.51742$$

(είναι γνωστό $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = 0.5$ / σφάλμα $= 0.51742 - 0.5 = 0.01742$)

$$\text{II } L_2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-3.31360\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 - 1.07819 \frac{\pi}{6} + \pi^2}{\pi^2} = \dots = 0.85075$$

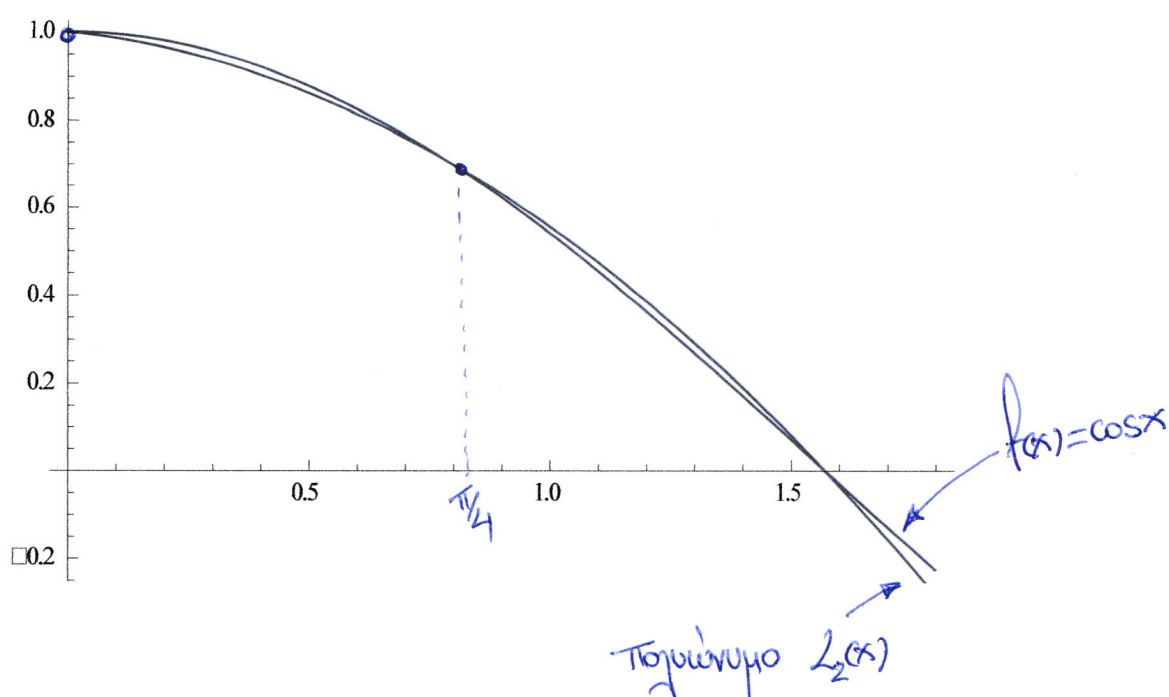
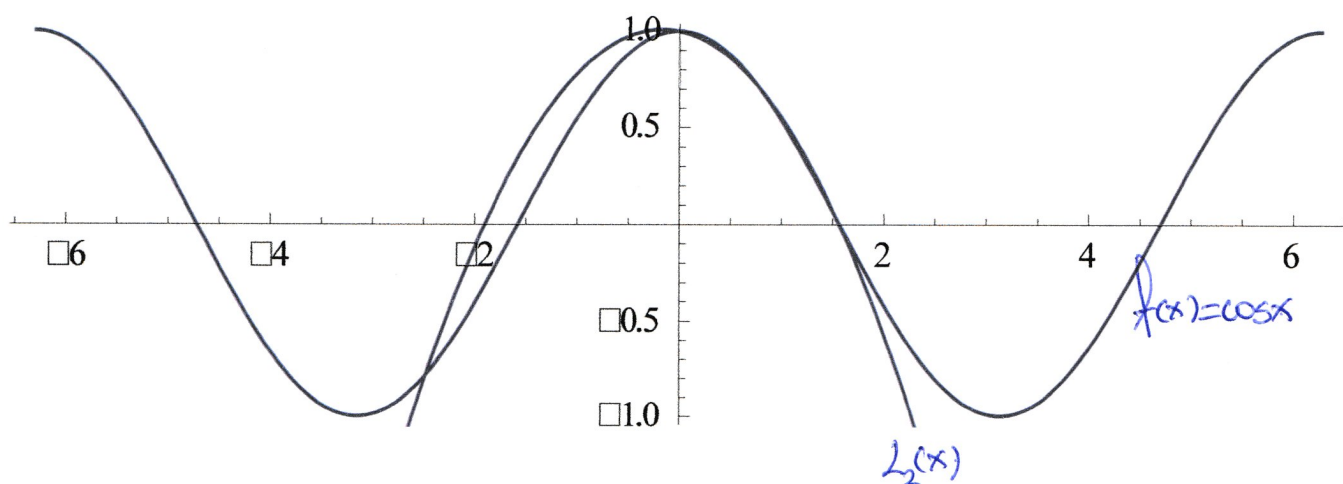
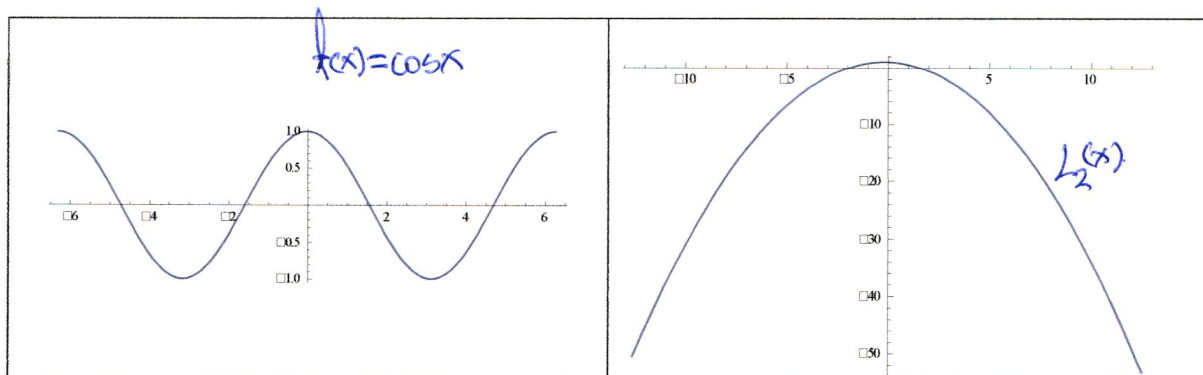
(είναι γνωστό ότι $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.86602$ / σφάλμα 0.01527)

(8) Το σφάλμα παρεμβολής δίνεται από τη σχέση:

$$\varepsilon(x) = f(x) - L_2(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \frac{f^{(3)}(\xi x)}{3!}$$

Επειδή τα σημεία είναι ισαπέχοντα ($\pi/2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$) ή $h = \frac{\pi}{4}$
 R: $f'(x) = -\cos x$, $f''(x) = -\sin x$
 $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$ ή $f'(x) = \sin x$ ή $|f^{(3)}(x)| \leq 1 = M$

$$\text{Έχουμε ότι: } |\varepsilon(x)| \leq \frac{M}{9\sqrt{3}} h^3 = \frac{1}{9\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \approx \underline{\underline{0.03108}}$$



Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x/4}$

- (α) Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής (της $f(x)$) Lagrange στα σημεία $x_0=0$, $x_1=0.2$ ή $x_2=0.5$
 (β) Να δοθεί μία εκτίμηση του απόλυτου σφάλματος

Λύση

(α) Έχουμε $L_2(x) = h_0(x)f(0) + h_1(x)f(0.2) + h_2(x)f(0.5)$

όπου $h_0(x) = \frac{(x-0.2)(x-0.5)}{(0-0.2)(0-0.5)} = \frac{(x-0.2)(x-0.5)}{0.1}$

$$h_1(x) = \frac{(x-0)(x-0.5)}{(0.2-0)(0.2-0.5)} = \frac{x(x-0.5)}{-0.06}$$

$$h_2(x) = \frac{(x-0)(x-0.2)}{(0.5-0)(0.5-0.2)} = \frac{x(x-0.2)}{0.15}$$

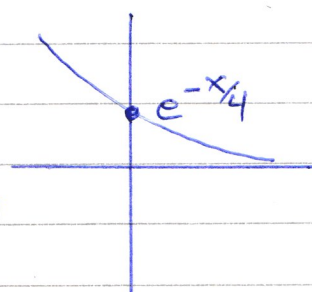
επομένως

$$L_2(x) = h_0(x)e^0 + h_1(x)e^{-1/20} + h_2(x)e^{-1/8} = \dots = 1 - 0.24975x + 0.294889x^2$$

(β) Η $f^{(3)}(x) \in C^3[0, 0.5]$, οπότε $\forall x \in [0, 0.5], \exists \xi_x \in [0, 0.5]$
 τ.ω

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= e^{-x/4} \\ f'(x) &= -\frac{1}{4}e^{-x/4} \\ f''(x) &= \frac{1}{4^2}e^{-x/4} \\ f'''(x) &= -\frac{1}{4^3}e^{-x/4} \end{aligned} \right\}$$

$$f(x) - L_3(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} = x(x-0.2)(x-0.5) \frac{1}{4^3} \frac{1}{3!} e^{-\xi/4}$$



$$\hookrightarrow |f(x) - L_3(x)| \leq \frac{1}{4^3 \cdot 3!} x(x-0.2)(x-0.5)$$

γιατί $e^{-x/4} \downarrow$ στο $[0, 0.5]$ άρα $e^{-x/4} < e^0 = 1$

Η συνάρτηση όπως $g(x) = x(x-0.2)(x-0.5)$ έχει μέγιστο (χρησιμοποιώντας Ακρόβριο λογισμό) την τιμή $y = 0.0082$.

Επομένως:

$$|f(x) - L_2(x)| \leq \frac{1}{4^3 \cdot 3!} \cdot 0.0082 = 0.0000213$$

#

