

Σχήμα Ηοττιετ

Πολυωνυμικές εξισώσεις

Για σημαντική κατηγορία εξισώσεων είναι οι λεγόμενες πολυωνυμικές δηλ. εξισώσεις της μορφής:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

πολυώνυμο $n^{\text{ου}}$ βαθμού (ως προς x)

Έχει αποδειχθεί από τον Γαλοίς, με τη βοήθεια της θεωρίας των ομάδων, ότι μπορούμε να λύσουμε αναλυτικά μέσω κλειστών τύπων (δηλαδή τύπων που περιέχουν τις 4 αριθμητικές πράξεις), τέτοιου είδους εξισώσεις μέχρι και 4^{ου} βαθμού!

Είναι ακόμα γνωστό ότι από το θεμελιώδες θεώρημα της αλγεβρας, μια πολυωνυμική εξίσωση με πραγματικούς ή μιγαδικούς συντελεστές έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο σώμα των μιγαδικών αριθμών (εάν πραγματικότητα, έχει η ρίζες στο σώμα των μιγαδικών αριθμών).

Ετσι, κ' στην περίπτωση των πολυωνυμικών συναρτήσεων, ένας περιορισμένος αριθμός ειδικών μορφών επιδέχεται αναλυτική λύση. Υπάρχουν ειδικές αριθμητικοί μέθοδοι που έχουν αναπτυχθεί για την επίλυση των πολυωνυμικών εξισώσεων (δεν εξετάζονται εδώ).

Οι αριθμητικές μέθοδοι που παρουσιάστηκαν μπορούν να χρησιμοποιηθούν κ' στην περίπτωση των πολυωνυμικών εξισώσεων κ' είναι οι απλούστερες τέτοιου είδους μέθοδοι, τόσο στη χρήση τους όσο κ' στην εφαρμογή τους.

Η εφαρμογή τους γίνεται ακόμα ευκολότερη με τη χρήση επιπλέον μεθόδων που αφορούν ορισμένα ειδικά θέματα των αριθμητικών μεθόδων επίλυσης εξισώσεων. Θέματα όπως: υπολογισμός της τιμής ενός πολυωνύμου, της τιμής της παραγώγου

ενός πολυωνύμου, ή τέλος της εξαγωγής (deflation) μιας ήδη γνωστής ρίζας ή των εύρεση του νέου πολυωνύμου του αμέσως κατωτέρου βαθμού.

Σχήμα Ηούνετ: (A) Υπολογισμός τιμής πολυωνύμου
Έστω ότι δίνεται ένα πολυώνυμο, $n^{\text{τος}}$ βαθμού, της μορφής:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

ή θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή του, σε ένα σημείο x_0 (δηλ $P_n(x_0)$).

Ⓘ Ένας προφανής τρόπος, είναι να βρούμε την τιμή κάθε μονώνιμου ή στη συνέχεια να υπολογίσουμε τις τιμές αυτές.

Το πηλίκος των πράξεων που απαιτούνται είναι:

Πηλίκος πράξεων: $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Προσθέσεις: n .

Ⓜ Ένας καλύτερος τρόπος είναι: για τον υπολογισμό μιας δύναμης x^k χρειάζεται υπ' όψιν η δύναμη x^{k-1} που έχουμε ήδη υπολογίσει (δηλ. $x^k = x \cdot x^{k-1}$). Το πηλίκος των πηλίκων γίνεται $2n-1$.

ⓓ Ένας τρίτος καλύτερος, των δύο τρόπος είναι να παρατηρήσουμε ότι, εκτός από τον σταθερό όρο, το x αποτελεί κοινό παράγοντα. Το $P_n(x)$ μπορεί να γραφεί:

$$P_n(x) = (((\dots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots)x + a_1)x + a_0$$

Η παραπάνω έκφραση για το $P_n(x)$ καλείται σχήμα του Ηούνετ, ή απαιτεί για τον υπολογισμό της $P_n(x_0)$ ή πηλίκος πράξεων ή η προσθέσεις.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η τιμή του πολωνύμου $P_4(x) = 2x^4 - 4x^2 + 5x - 3$ στο σημείο $x_0 = 2$.

Λύση

Έχουμε $P_4(x) = (((2x+0)x-4)x+5)x-3$, οπότε κάνουμε τους υπολογισμούς:

$$2 \cdot 2 + 0 = 4$$

$$4 \cdot 2 - 4 = 4$$

$$4 \cdot 2 + 5 = 13$$

$$13 \cdot 2 - 3 = 23$$

$$\text{Άρα } P_4(2) = 23$$

Παρατήρηση

Οι παραπάνω υπολογισμοί διευκολύνονται με τη βοήθεια του παραπάνω σχήματος (αυτό συνήθως καλείται σχήμα Horner). Δίνεται εδώ σαν εφαρμογή στο παραπάνω παράδειγμα (η γενίκευση είναι φανερή).

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	
$x_0 = 2$	2	0	-4	5	-3	← συντελεστές του $P_4(x)$
		+	+		+	
		4	8	8	26	
		↓	↓	↓	↓	
	2	4	4	13	23 = $P_4(2)$	

$2x^2$ (from 2 to 4)
 $4x^2_{x_0}$ (from 4 to 4)
 $4x$ (from 4 to 8)
 $13x$ (from 13 to 26)

$$2x^3 + 4x^2 + 4x + 13$$

Παρατήρηση

Οι συντελεστές της τρίτης γραμμής 2 4 4 13 δίνουν το πηλίκο της διαίρεσης του $P_4(x)$ με το $(x-2)$, το δε $P_4(2) = 23$ είναι το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης, δηλ.

$$P_4(x) = 2x^4 - 4x^2 + 5x - 3 = (x-2)(2x^3 + 4x^2 + 4x + 13) + 23$$

→ πολυώνυμο αμέσως κατώτερου βαθμού.

Γενικότερα $P_n(x) = (x-p) P_{n-1}(x) + P_n(p)$

- (2) Το σχήμα Horner είναι ένας χρήσιμος τρόπος να εξεταστεί κανείς αν ένας συγκεκριμένος αριθμός είναι ρίζα ενός πολυωνύμου $P_n(x)$. Αρκεί $P_n(p) = 0$

Παράδειγμα

Να εξεταστεί αν ο αριθμός $p=1$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P_3(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 5$.

Λύση

$p=1$	1	-4	-2	5
		+		
	1	-3	-5	
	1	-3	-5	$0 = P_3(1)$

άρα το $p=1$ ρίζα.

- (3) Το σχήμα Horner μπορεί να χρησιμοποιηθεί επαναληπτικά για να βρεθούν (όταν είναι δυνατόν) όλες οι ρίζες μιας πολυωνυμικής εξίσωσης. Εδώ μπορεί κανείς να γράψει απλά τον τύπο ότι:

Θεώρημα

Εάν $P_n(x)$ πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές, τότε κάθε ριζή ρίζα $\frac{p}{q}$ του $P_n(x)$ είναι τέτοια ώστε το p είναι διαιρετός του σταθερού όρου a_0 ή το q διαιρέτης του (συντελεστή του μεγιστάριθμου όρου) a_n .

Παρατηρείστε ότι, αν $a_n = 1$, τότε οι ακέραιες ρίζες του $P_n(x)$ είναι διαιρέτες του σταθερού όρου a_0 .

Παράδειγμα

Να βρεθούν (αν είναι δυνατόν) όλες οι ρίζες του

$$P_4(x) = x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10$$

Λύση

Οι ακεραίες ρίζες του $P_4(x)$ θα είναι διαιρέτες του 10, δηλ. θα πρέπει (αν υπάρχουν ακεραίες ρίζες) να τις αναζητούμε στους $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$

Έχουμε

$$x_0 = 1 \quad \begin{array}{r|rrrrr} 1 & -5 & -5 & 23 & 10 \\ & 1 & -4 & -9 & 14 \\ \hline 1 & -4 & -9 & 14 & 24 \end{array} \quad 24 = P_4(1) \neq 0 \text{ άρα } 1 \text{ όχι ρίζα.}$$

$$x_0 = 2 \quad \begin{array}{r|rrrrr} 1 & -5 & -5 & 23 & 10 \\ & 2 & -6 & -22 & 2 \\ \hline 1 & -3 & -11 & 1 & 12 \end{array} \quad 12 = P_4(2) \neq 0, \text{ άρα } 2 \text{ όχι ρίζα.}$$

$$x_0 = 5 \quad \begin{array}{r|rrrrr} 1 & -5 & -5 & 23 & 10 \\ & 5 & 0 & -25 & -10 \\ \hline 1 & 0 & -5 & -2 & 0 \\ & -2 & 4 & 2 & \\ \hline 1 & -2 & -1 & 0 & \end{array}$$

Συνεχίζουμε
ΕΤΩΝ/ΛΟΓ

$\rightarrow P_4(5) = 0$ άρα 5 ρίζα

$\rightarrow P_4(x) = (x-5)(x^3 - 5x - 2)$

$\rightarrow \omega = -2$ ρίζα του $P_4(x)$

$\neq P_4(x) = (x-5)(x+2)(x^2 - 2x - 1)$

το ± 1 όχι ρίζες

Άρα $P_4(x) = (x-5)(x+2)(x^2 - 2x - 1)$

Αλλά το $x^2 - 2x - 1$ έχει ρίζες $\frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

Τελικά, ρίζες του $P_4(x)$ είναι οι 5, -2 ή $1 \pm \sqrt{2}$ ≠

(B) Υπολογισμός της τιμής της παραγώγου ενός πολυωνύμου

Εάν $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ τότε:

$$P_n'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$$

Για τον υπολογισμό της τιμής της παραγώγου $P_n'(x)$ σε ένα σημείο x_0 , μπορούμε:

- (i) να υπολογίσουμε απευθείας την τιμή κάθε μονομίου του $P_n'(x)$ ή κατόπιν να τα προσδεύουμε.
- (ii) Αφού πρώτα υπολογίσουμε την παραγώγο $P_n'(x)$, πολυώνυμο βαθμού $(n-1)$, να χρησιμοποιήσουμε το σχήμα Ηοσνιες για το $P_n'(x)$ ή να υπολογίσουμε την τιμή του στο σημείο x_0 .

- (iii) Ένας τρίτος, πιο αποτελεσματικός τρόπος, είναι να παρατηρήσουμε το εξής: (από τη χρήση του σχήματος Ηοσνιες)

$$P_n(x) = (x - x_0) \cdot P_1(x) + P_n(x_0) \quad \text{όπου } P_1(x) \text{ που προκύπτει από το σχήμα Ηοσνιες (τρίτη γραμμή)}$$

Παραγωγίζοντας, έχουμε

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= (x - x_0)' \cdot P_1(x) + (x - x_0) \cdot P_1'(x) + \cancel{P_n'(x_0)}^{0 \text{ (σταθερά)}} \\ &= 1 \cdot P_1(x) + (x - x_0) P_1'(x) \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως, } P_n'(x_0) = 1 \cdot P_1(x_0) + \cancel{(x_0 - x_0) P_1'(x_0)}^0 \text{ δηλ.}$$

$$P_n'(x_0) = 1 \cdot P_1(x_0)$$

Διλαδή η τιμή $P_n'(x_0)$ είναι η τιμή του $P_1(x)$, του πολυωνύμου που προκύπτει από το σχήμα Ηοσνιες, στο σημείο x_0 (προσχετισμένο επί 1)

Επομένως, για την εύρεση της $P_n'(x_0)$, εφαρμόζουμε επαναληπτικά και δύο φορές το σχήμα Ηορντεν.

Γενικότερα, μπορεί να δείχθει ότι: $P_n^{(k)}(x_0) = k! P_k(x_0)$

Διότι για την εύρεση της $P_n^{(k)}(x_0)$, εφαρμόζουμε επανειλημμένα το σχήμα Ηούσερ $k+1$ φορές ή το αποτέλεσμα $(P_k(x_0))$ το πολλαπλασιάζουμε με $k!$

Thapsidoxys

Παραδειγμα
 εαν $P_3(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ να βρεθούν $P_3(2)$, $P_3'(2)$, $P_3''(2)$
 $P_3'''(2)$ ή $P_3^{(4)}(2)$.

Non

(Anagurind)

$$P_3(q) = q^3 - 2q + 3 \cdot 2 = 1$$

$$P_3'(x) = 3x^2 - 4x + 3 \Rightarrow P_3'(1) = 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 2$$

$$P_3''(x) = 6x - 4 \Rightarrow P_3''(2) = 8$$

$$P_3^{(1)}(x) = 6, \quad P_3^{(4)}(x) = 0$$

$x_0 = 2$

1	-2	3	-5
	2	0	6

$x_0 = 2$

1	0	3	$1 = P_3(2)$
	2	4	

$P_1(x)$

1	2	$7 = P_1(2) \Rightarrow P_3'(2) = 1 \cdot P_1(2) = 7$
	2	

$P_2(x)$

1	$4 = P_2(2) \Rightarrow P_3''(2) = 2! \cdot 4 = 8$
	2

$\tilde{P}_3(x)$

1	$\tilde{P}_3(x) = 1 \Rightarrow \tilde{P}_3(2) = 1$
	2

$P_3'''(2) = 3! \cdot P_3(2) = 6$

#

#

Παρατήρηση (περίπτωση πολυωνύμων)

Ένας από τους τρόπους/περιπτώσεις που μπορεί να δει κανείς το ότι, οι αριθμητικές μέθοδοι για την επίλυση εξισώσεων χάνονται πιο αποτελεσματικές είναι π.χ στη μέθοδο Newton-Raphson.

Ο αλγόριθμος της μεθόδου είναι:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$$

Εδώ τώρα, τα $f(x_k)$, $f'(x_{k-1})$ ($f(x_k) = P_n(x_k)$, $f'(x_{k-1}) = P'_n(x_{k-1})$) υπολογίζονται με τη βοήθεια του σχήματος Horner.