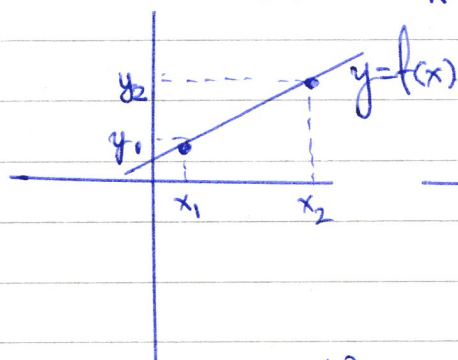


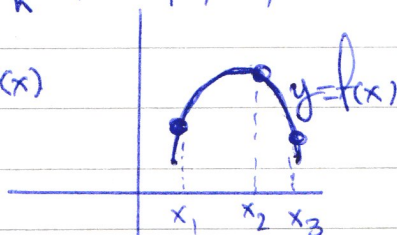
Παρεμβολή - παρεμβολή

Μερικές φορές, στην προσπάθειά μας ν' αναμεσώσουμε/μετρήσουμε πραγματικά φαινόμενα/προβλήματα, ερχόμαστε αντιμέτωποι με τις παρακάτω καταστάσεις:

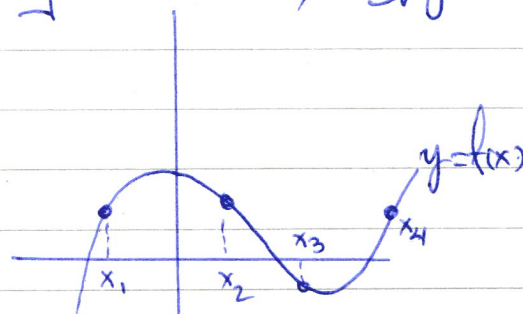
(Α) Έχουμε $n+1$ διακριμένα σημεία (x_k, y_k) , $k=0, 1, 2, \dots, n$ (μετρήσεις ή πειραματικά δεδομένα) και θέλουμε να βρούμε μια συνάρτησή μας $y=f(x)$ που να τα συνδέει. Δηλαδή, θέλουμε να βρούμε την "απλούστερη" συνάρτηση $y=f(x)$ που να διέρχεται από τα σημεία: $y_k = f(x_k)$ $k=0, 1, 2, \dots, n$. Με τη βοήθεια της συνάρτησης θα μπορούμε να προβλέψουμε τις τιμές των δεδομένων μας (ή των μετρήσεών μας) για σημεία ενδιαφέροντα των σημείων που μας δίνονται, δηλ. για $x \in \Omega$ $x_{k-1} < x < x_k$, $k=1, 2, \dots, n$.



(γραμμική)



(τετραγωνική)



(κυβική)

(Β) Έχουμε μια συνάρτηση $y=f(x)$ της οποίας είναι γνωστός ο αναλυτικός της τύπος (δίνεται) αλλά είναι ιδιαίτερα σύνθετος, που κάνει τυχόν υπολογισμούς, της $f(x)$, επίπονους ή αρκετές φορές αδύνατους.

Παράδειγμα

Εάν $f(x) = e^{\sin x} + \ln \sqrt{|\cos x|}$, $x \in [\alpha, \beta]$.

Θέλουμε να υπολογίσουμε το $f(x)$, για δοσμένες τιμές του x . Εδώ, η παρουσία των $\sin x$, $\cos x$, e^x ή $\ln x$ προκαλεί σε κάθε υπολογισμό μεγάλα σφάλματα.

Θα δέσμευε κ' ε' αυτή την περίπτωση ν' αντικαταστήσουμε/προσεγγίσουμε τη συνάρτηση με μια απλούστερη $g(x)$.

Το πρόβλημα/κατάσταση (B) μοιάζει με αυτό του (A) γιατί: συνήθως απαιτούμε η $g(x)$ να συμπίπτει με την $f(x)$ σε $n+1$ σημεία $x_k, k=0,1,2,\dots,n$. Άλλωθεν απαιτούμε η $g(x)$ να διέρχεται από τα σημεία $(x_k, y_k=f(x_k)), k=0,1,2,\dots,n$, του ενδιαφέροντος μας. ή μ' άλλα λόγια η $g(x)$ να παρεμβάλλει την $f(x)$ στα σημεία $x_k, k=0,1,2,\dots,n$.

Παρατήρηση.

Υπάρχει ελευθερία στην επιλογή της $g(x)$, με αποτέλεσμα την ύπαρξη περιεσσοτέρων της μιας μεθόδων αντιμετώπισης του προβλήματος. Μερικές από αυτές τις μεθόδους εξετάζονται παρακάτω.

Ορισμός

Η εύρεση/καθορισμός μιας συνάρτησης που: (I) διέρχεται από συγκεκριμένα σημεία $(x_k, y_k), k=0,1,2,\dots,n$ είτε (II) προσεγγίζει μια δοθείσα συνάρτηση $y=f(x)$ κ' συμπίπτει με τις τιμές της σε $n+1$ σημεία $(x_k, f(x_k)), k=0,1,\dots,n$ λέγεται παρεμβολή (interpolation).

Παρατήρηση.

Μια 2^η αντιμετώπιση των (A) κ' (B) είναι κ' η εξής: εάν οι μετρήσεις $(x_k, y_k), k=0,1,\dots,n$ χαρακτηρίζονται από έναν σημαντικό βαθμό σφάλματος ή "θορύβου", τότε δέχουμε να υπολογίσουμε μια συνάρτηση $g(x)$ που να παριστάνει τη γενική τάση των δεδομένων μας (αυξητική, γραμμική, περιοδική). Στην περίπτωση αυτή δεν είναι απαραίτητο η $g(x)$ να διέρχεται από τα συγκεκριμένα σημεία. Η αντιμετώπιση γίνεται με τη βοήθεια διαδικασίας που λέγεται παλινδρόμηση κ' συνήθως με την (regression).

γνωστότερη μέθοδος της που ονομάζεται μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων (least squares method). Η παλινδρόμηση θα εξεταστεί σ' επόμενο κεφάλαιο.

Παραστήριση.

Μερικές φορές, η αντιμετώπιση των (Α), (Β) (παρεμβολή) γίνεται με τη βοήθεια περισσότερων της μιας συναρτήσεων, $g_i(x)$, δηλ:

- (i) αναζητούμε συναρτήσεις $g_i(x)$ που να παρεμβάλουν τα σημεία (x_i, y_i) ή (x_{i+1}, y_{i+1}) , $i=0, \dots, n-1$
 - (ii) αν δίνεται η $y=f(x)$, $x \in [a, b]$, τότε διαμερίζουμε το $[a, b]$ σε υποδιαστήματα (x_i, x_{i+1}) , $i=0, 1, \dots, n-1$ ή υπολογίζουμε των g_i που παρεμβάλλει των $f(x)$ στο διάστημα (x_i, x_{i+1}) .
- Τότε έχουμε πρόβλημα προσέγγισης με splines

Στην παρεμβολή μιας συνάρτησης αντιμετωπίζουμε συνήδως δύο προβλήματα:

- (1) επιλογή μεθόδου παρεμβολής: θα πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη τις απαιτήσεις του προβλήματος που θέλουμε να λύσουμε ή τις δυνατότητες της μεθόδου που επιλέγουμε.
- (2) εκτίμηση του μεγέθους του εφαγματος αποκοπής που προκαλείται από την προσέγγιση.

Ορισμός

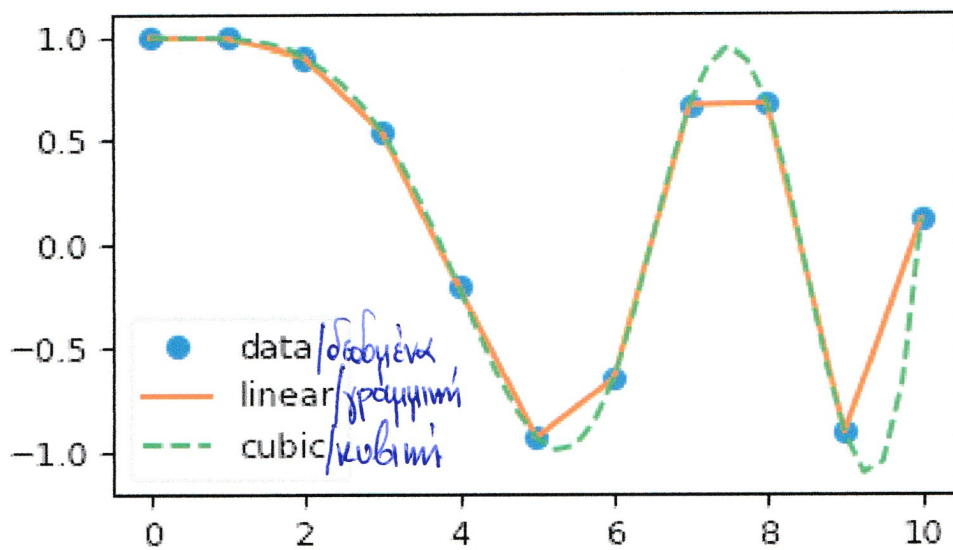
- (i) Εάν $y=f(x)$, $x \in [a, b]$ ή θέλουμε να κάνουμε πρόβλεψη της τιμής της f για σημείο $z \in [a, b]$, πρόβλεψη με την βοήθεια της $g(x)$ που την παρεμβάλλει, τότε έχουμε όπως λέμε παρεμβολή (extrapolation).

- (ii) Εάν έχουμε τώρα το αντίστροφο πρόβλημα: μας δίνεται μια τιμή $y=f(x)$ ή θέλουμε να υπολογίσουμε το x , τότε λέμε ότι έχουμε αντίστροφη παρεμβολή (inverse interpolation).

Παρεμβολή

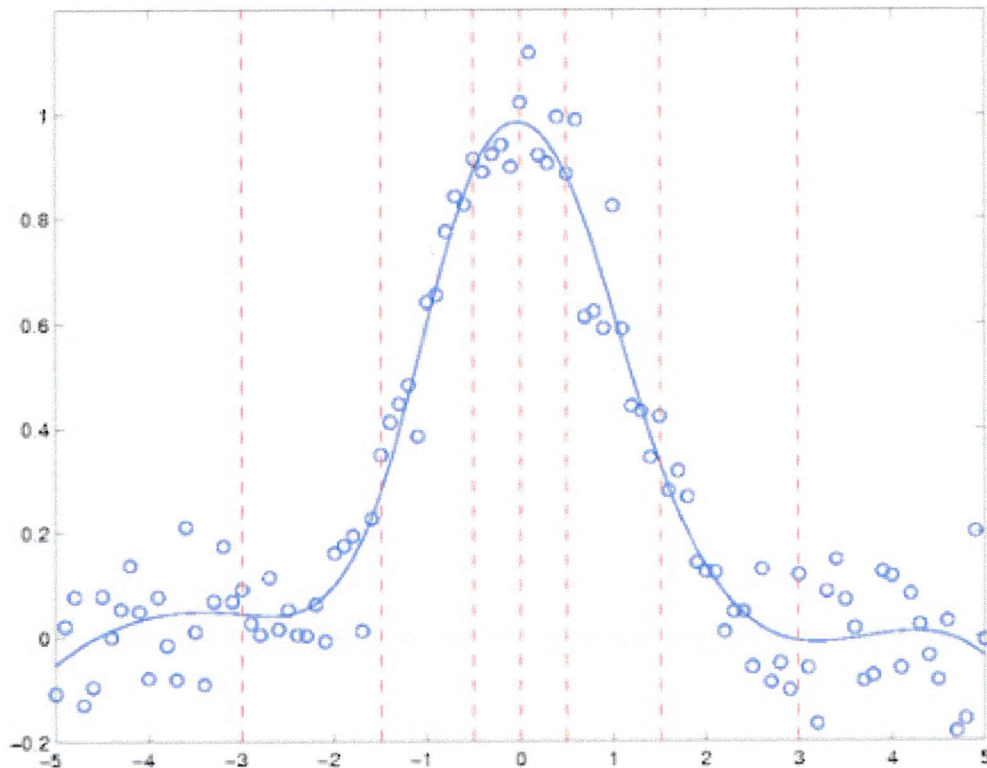
(Η συνάρτηση παρεμβολής διέρχεται από τα σημεία/δεδομένα)

$\frac{\pi\pi}{4}$



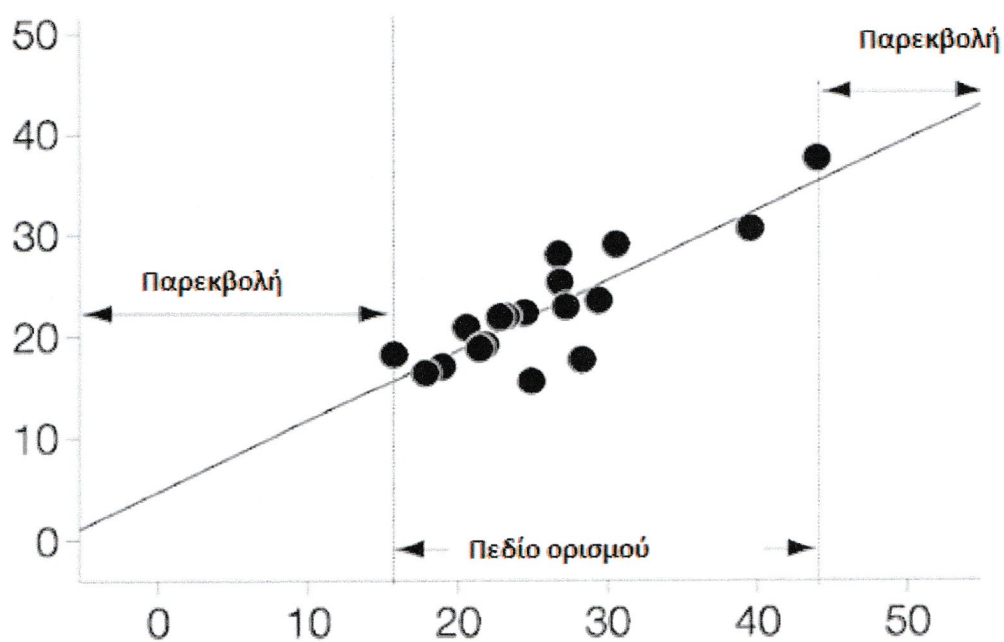
Παγνολογμένη

(Η καμπύλη παγνολογμένης περνά "κοντά" στα σημεία)

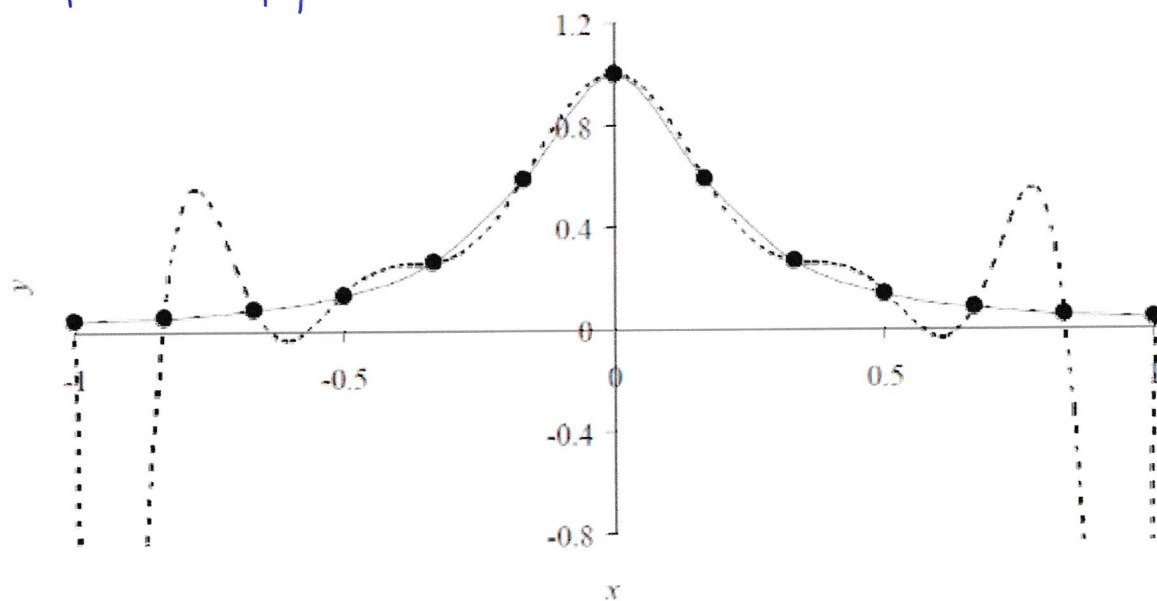


Παρεκβολή → πρόβλεψη εκτός πεδίου ορισμού δεδομένων

$\frac{\pi\pi}{5}$



Πομπανημική παρμεβολή



----- 12th Order Polynomial

(12^{ου} βαθμού
Πομπανημική
παρμεβολή)

—●— $f(x)$
(δοθείσα)

$$y=f(x), x \in [a, b]$$

Γενικότερα, πρόσχηξη μιας συνάρτησης $f(x)$ από μια ήδη συνάρτηση $g(x)$ (που είναι "πιο απλή" ή είναι κοινά γνωστές $f(x)$, $\forall x \in [a, b]$), είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση $g(x)$ τέτοια ώστε:

$$|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$$

όπου ε προκαθορισμένο μέγιστο επιτρεπόμενο σφάλμα μεταβολής.
Η $g(x)$ ονομάζεται συνάρτηση παρεμβολής ή είναι συνήθως γραμμικός συνδυασμός βασικών συναρτήσεων.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΤΙΚΕΣ ΔΕΞΙΟΤΗΤΕΣ:

- μονωνυμα: $1, x, x^2, \dots$
- τριγωνομετρικες: $\sin x, \cos x, \dots$
- υπερβολικες: $\sinh x, \cosh x, \dots$
- εκθετικες: e^{ax}

It $g(x)$ da elva (surindus) ons morphs:

$g(x) = \alpha_0 g_0(x) + \dots + \alpha_n g_n(x)$ όπου $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ σταθερές
 ή $g_0(x), \dots, g_n(x)$ βασικές συναρτήσεις.

Για τον υπολογισμό της $g(x)$, είναι αρκετός ο υπολογισμός των σταθμών $\alpha_0, \dots, \alpha_n$.

των σταθερών $\alpha_0, \dots, \alpha_n$.
Εάν λοιπόν η $g(x)$ παρεμβάλει την συνάρτηση $f(x)$ στα σημεία
 (x_k, y_k) $k=0, 1, 2, \dots, n$ ή $y_k = f(x_k)$ τότε ικανοποιούνται οι

$$g_0(x_0)\alpha_0 + g_1(x_0)\alpha_1 + \dots + g_n(x_0)\alpha_n = y_0 = f(x_0)$$

$$g_0(x_1)\alpha_0 + g_1(x_1)\alpha_1 + \dots + g_n(x_1)\alpha_n = y_1 = f(x_1)$$

Figure 1 is a line graph showing the number of cases of COVID-19 in the United States from March 1, 2020, to May 1, 2020. The x-axis represents time in days, and the y-axis represents the number of cases. The curve shows a sharp increase starting around March 15, peaking around April 15, and then declining.

$$g_0(x_n)\alpha_0 + g_1(x_n)\alpha_1 + \dots + g_n(x_n)\alpha_n = y_n = f(x_n)$$

σύστημα $(n+1)$ -εξισώσεων με $n+1$ αγνώστους: $\alpha_0, \dots, \alpha_n$

Για να έχει το σύστημα μοναδική λύση θα πρέπει η ορίζουσα του πίνακα A των συντελεστών των αγνώντων:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} g_0(x_0) & g_1(x_0) & \dots & g_n(x_0) \\ g_0(x_1) & g_1(x_1) & \dots & g_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ g_0(x_n) & g_1(x_n) & \dots & g_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

Τα $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ υπολογίζονται με μία από τις γνωστές μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων (Gauss, Cramer κττ).

Πομπυμική παρέρμυρ.

Η πιο απλή ίσως συνάρτηση παρέρμυρς μπορεί να κατασκευαστεί με τη βοήθεια απλών πομπυμικών συναρτήσεων (μονώνυμα) ή η οποία ανέρχεται πομπυμική παρέρμυρ.

Έστω λοιπόν ότι δίνονται $(n+1)$ σημεία (x_k, y_k) , $k=0, 1, 2, \dots, n$ (πέρα μασικά δεδομένα ή σημεία συνάρτησης με γνωστό αναλυτικό τύπο δηλ. $y_i = f(x_i)$). Τα x_i , $i=0, \dots, n$ καλούνται κόμβοι.

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα πομπύμιο $p_n(x)$, η έστω βαθμού που να διέρχεται από αυτά τα σημεία δηλ. $p_n(x_i) = y_i$, $i=0, 1, \dots, n$

Παρατήρηση

Υπάρχουν διαφορετικές μορφές αναπαράστασης ενός πομπυμίου $p_n(x)$, η έστω βαθμού (κάθε μία με πλεονεκτήματα ή μειονεκτήματα).

Ⓘ Εκθετική μορφή

$$p_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n \quad \alpha_0, \dots, \alpha_n \text{ σταθερές}$$

Ⓙ Είναι οικονομικότερη από πλεονεκτήματα ή μειονεκτήματα στην πράξη πομπυμίων, ογκύρωση, παραγωγή κλπ.

Ⓢ Μορφή κέντρων

$$p_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-c) + \alpha_2(x-c)^2 + \dots + \alpha_n(x-c)^n$$

$c, \alpha_0, \dots, \alpha_n$ σταθερές

Υπέρτερεί στην Αριθμητική Ανάλυση γιατί έχουμε σταθερές μικρά μεγέθους (αριθμό ψηφίων) δηλαδή μικρότερα σφάλματα στους υπολογισμούς.

Ⓢ Newton

$$p_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-c_1) + \alpha_2(x-c_1)(x-c_2) + \dots + \alpha_n(x-c_1)\dots(x-c_n)$$

Εάν $c_1 = c_2 = \dots = c_n = c$ έχουμε την μορφή των κέντρων
Εάν $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ — " — — — — — Εξθετική μορφή.

Ενα τέτοιο πολυώνυμο υπάρχει κ' είναι αποτέλεσμα του παραπάνω θεωρήματος ύπαρξης.

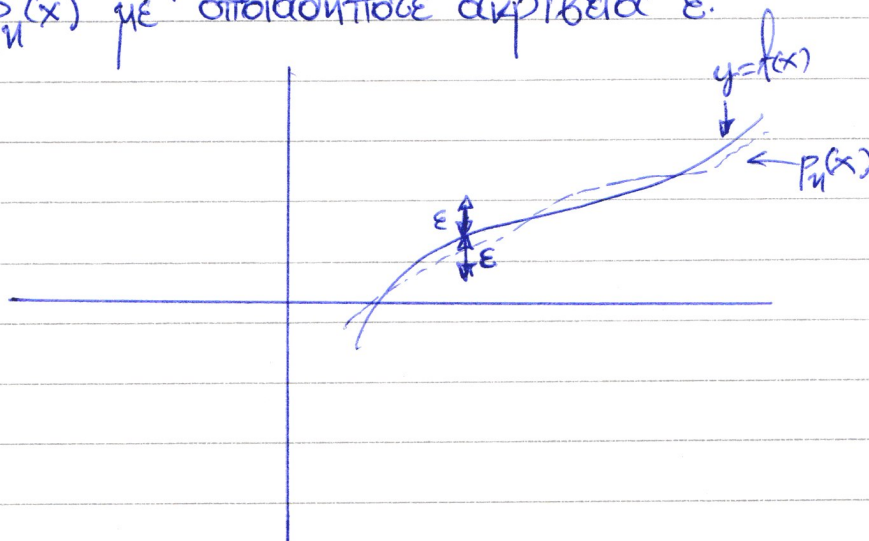
Θεώρημα (Weierstrass)

Εάν $y=f(x)$ συνάρτηση, $f(x) \in C[a,b]$, τότε υπάρχει μία ακολουθία πολυωνύμων $p_n(x)$ τ.ω.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x)$$

Ακριβή, εάν δοθεί $\epsilon > 0$, $\exists n=n(\epsilon)$ κ' ένα πολυώνυμο $p_n(x)$ τ.ω.
 $|f(x) - p_n(x)| < \epsilon$

που σημαίνει ότι μπορούμε να προσεγγίσουμε την $f(x)$ μ'ένος πολυώνυμο $p_n(x)$ με οποιαδήποτε ακρίβεια ϵ .



Στην περίπτωση $(n+1)$ -βημάτων, το θεώρημα γίνεται ως εξής

Θεώρημα

Εάν δίνονται $(n+1)$ -διακεκριμένα σημεία $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$ κ' αντίστοιχες τιμές $y_0, \dots, y_n$ (όχι απαραίτητα διακεκριμένες // μπορεί να $y_i = f(x_i)$, f =χρυσή συνάρτηση), τότε υπάρχει μοναδικό

Πολύωνμο $P_n(x)$, τέτοιο ώστε: $P_n(x_i) = y_i (=f(x_i))$
 $i=0,1,2,\dots,n$.

Πράγματι: $P_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n$ με α_i για' προσδιορισμό
 $i=0,1,2,\dots,n$.

Αλλά

$$\begin{cases} \alpha_0 + x_0 \alpha_1 + x_0^2 \alpha_2 + \dots + x_0^n \alpha_n = y_0 = f(x_0) \\ \alpha_0 + x_1 \alpha_1 + x_1^2 \alpha_2 + \dots + x_1^n \alpha_n = y_1 = f(x_1) \\ \vdots \\ \alpha_0 + x_n \alpha_1 + x_n^2 \alpha_2 + \dots + x_n^n \alpha_n = y_n = f(x_n) \end{cases}$$

Σύστημα $(n+1)$ εξισώσεων με $(n+1)$ αγνώστους. Η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώντων είναι ίση με:

$$\det(V) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \neq 0$$

πίνακας Vandermonde

γιατί τα σημεία είναι διαφορετικά.

Άρα υπάρχει μοναδική λύση στο σύστημα, δηλαδή τα $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ υπολογίζονται μονοσήμαντα (με μία από τις γνωστές μεθόδους επίλυσης συστημάτων).

Σφάλμα παρεμβολής

Εάν είναι γνωστός ο αναγωγικός τύπος της $y=f(x)$, θα έχουμε $P_n(x_i)=f(x_i)$, $i=0,1,\dots,n$ αλλά στα υπολογιζόμενα σημεία $x \in [a,b]$, θα έχουμε απόκλιση των τιμών της $f(x)$ από το $P_n(x)$, το λεγόμενο σφάλμα παρεμβολής, δηλ.

$$f(x) = p_n(x) + \varepsilon(x) \quad \eta \quad \varepsilon(x) = f(x) - p_n(x)$$

$$\forall \quad |\varepsilon(x)| \leq \max |f(x) - p_n(x)| \quad x \in [\alpha, \beta]$$

Αναφορικά με το βράχμα παρεμβολής ισχύουν τα εξής:

(α) Το βράχμα παρεμβολής εξαρτάται άμεσα από τον αριθμό των κόμβων ή από τών επιλογή τους

(β) η πολωνυμική παρεμβολή παρουσιάζει μικρότερο, εν γένει, βράχμα αν οι κόμβοι είναι λιγότεροι ή το πεδίο ορίσμού της $f(x)$ μικρό. Πολυώνυμα μεγάλου βαθμού παρουσιάζουν συνήδως ταχύνανση γύρω από σημεία της $f(x)$ που δεν είναι κόμβοι.

Σε εφαρμογές, καλή προσέγγιση λαμβάνεται αν το πολυώνυμο δεν ξεπερνά τον 3^ο βαθμό (3-4 κόμβοι) ή το πεδίο ορίσμού της $f(x)$ είναι σχετικά μικρό.