

Μέθοδος Newton-Raphson

Ξέρουμε ότι η μέθοδος της διχοτόμησης (όσο κι η μέθοδος της εφαπμένης δέξας) συγκλίνουν αρχά στην πραγματική ρίζα, ιδιαίτερα όταν το αρχικό διάστημα στο οποίο υποθέτουμε ότι βρίσκεται η πραγματική ρίζα p , δεν είναι "αρκετά μικρό". (αρκετά κοντά στη ρίζα)

Για το λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι (που βασίζονται στην επιλογή αρχικού ή αρχικών σημείων) οι οποίες συγκλίνουν ταχύτερα προς τη ρίζα, η δημοφιλέστερη από τις οποίες είναι η λεγόμενη Newton-Raphson.

Ιδέα

Η μέθοδος Newton-Raphson βασίζεται στην εφαρμογή του ανασπύχματος Taylor της συνάρτησης $f(x)$, ε' ένα σημείο $\tau \in [a, b]$ (υποθέτοντας ότι η f είναι, τουλάχιστον, δύο φορές παραγωγίσιμη).

Είναι γνωστό ότι, εάν $\tau_0 \in [a, b]$, είναι μία προσέγγιση του τ (ή' ίκα νοποούντα, ορισμένες συνθήκες) ή $f'(\tau_0) \neq 0$, τότε η $f(x)$ μπορεί να παρασταθεί εάν ένα πολυώνυμο (Taylor) γύρω από το τ_0 :

$$f(\tau) = f(\tau_0) + (\tau - \tau_0)f'(\tau_0) + \frac{(\tau - \tau_0)^2}{2!} f''(\xi_0)$$

$$\text{όπου } \xi_0 \in [\tau, \tau_0]$$

$$\text{εάν } f(\tau) = 0 \Rightarrow 0 = f(\tau_0) + (\tau - \tau_0)f'(\tau_0) + \frac{(\tau - \tau_0)^2}{2!} f''(\xi_0)$$

Αλλά τ_0 είναι εκτίμηση του τ , οπότε $|\tau - \tau_0|$ αρκετά μικρός αριθμός οπότε το $(\tau - \tau_0)^2$ ακόμα μικρότερος οπότε μπορεί να θεωρηθεί αμελητέος έχουμε λοιπόν:

$$0 \approx f(\tau_0) + (\tau - \tau_0)f'(\tau_0) \quad \eta$$

$$\tau \approx \tau_0 - \frac{f(\tau_0)}{f'(\tau_0)}$$

Τώρα, θεωρώντας $\tau_1 = \tau$ την τιμή που προκύπτει από την

προηγούμενη επίλυση, χρησιμοποιούμε την τ_1 σαν αρχική τιμή για την επόμενη επανάληψη (ή επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία).
Προκύπτει ο αναδρομικός τύπος της μεθόδου:

$$x_k = \tau_k \quad x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$$

Παρατήρηση

Ένας δεύτερος τρόπος απόδειξης του αναδρομικού τύπου είναι και ο εξής:

Εάν x_{k-1} μία προσέγγιση της ρίζας ρ . θεωρούμε την (επίλυση) εφαπτομένη της συνάρτησης $y = f(x)$ στο σημείο $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ η οποία έχει εξίσωση:

$$y - f(x_{k-1}) = f'(x_{k-1})(x - x_{k-1})$$

Αν x_k το σημείο τομής της εφαπτομένης με τον άξονα των Ox , τότε το x_k υπολογίζεται από την:

$$0 - f(x_{k-1}) = f'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \Rightarrow$$

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$$

(όμοιος με τον παραπάνω)

Σημείωση

Η σύγκλιση της μεθόδου N-R εξαρτάται από τα εξής:

- (i) επιλογή κατάλληλης αρχικής τιμής (από το πόσο κοντά είναι μπορεί να συγκρίσει σε σύγκλιση ή αποκλίση της μεθόδου).
- (ii) εάν η συνάρτηση είναι ομαλή στην περιοχή της ρίζας (αν δεν είναι ομαλή, η μέθοδος αποτυγχάνει).

Για την σύγκλιση της μεθόδου υπάρχουν τα παρακάτω θεωρήματα

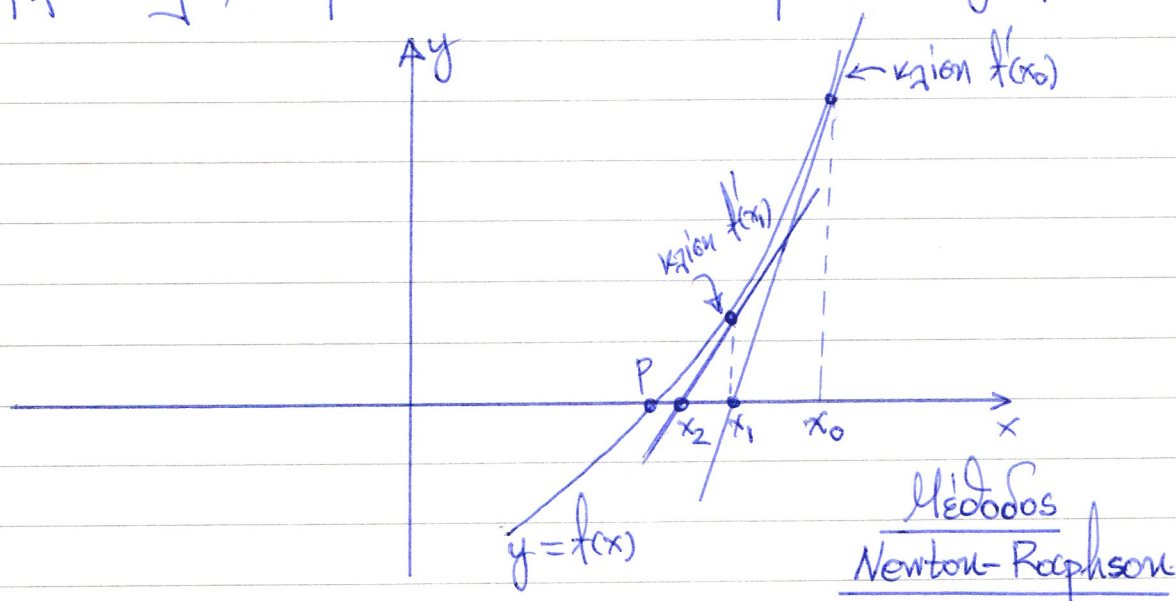
Θεώρημα 1

Εάν $f(x)$ συνάρτηση, p ρίζα της συνάρτησης ($f(p)=0$) τ.ω:

(α) η $f(x)$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο, $f''(x)$, σε μία περιοχή της ρίζας

(β) η p είναι απλή ρίζα

Τότε υπάρχει μία περιοχή της ρίζας (δηλ. ανοικτό διάστημα γύρω από τη ρίζα) τ.ω. για οποιαδήποτε τιμή x_0 στην περιοχή αυτή, σαν αρχική τιμή, η μέθοδος Newton-Raphson συγκλίνει.



Θεώρημα 2

Εάν $f(x)$ συνάρτηση, με συνεχή δεύτερη παράγωγο ($f''(x)$) σε ένα διάστημα $[a, b]$, τέτοια ώστε:

(α) $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

(β) η δεύτερη παράγωγος ($f''(x)$) έχει σταθερό πρόσημο στο διάστημα $[a, b]$

(γ) ικανοποιείται το κριτήριο Bolzano: $f(a) \cdot f(b) < 0$

$$\max \left\{ \left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right|, \left| \frac{f(b)}{f'(b)} \right| \right\} \leq b - a$$

Τότε για οποιαδήποτε τιμή x_0 στο $[a, b]$, σαν αρχική τιμή,

η μέθοδος Newton-Raphson συγκρίνει.

Παρατήρηση

(1) Η προϋπόθεση $f'(x) \neq 0$:

(α) Αποκλείει την περίπτωση η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον άξονα Ox (παράλληλη όταν $f'(x) = 0$), οπότε δεν θα είχαμε κοινή με τον άξονα Ox .

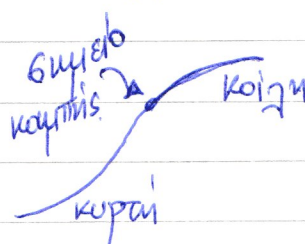
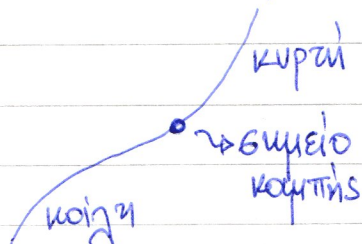
(β) Αποκλείει την εφαρμογή της μεθόδου στην περίπτωση πολλαπλής ρίζας γιατί είναι γνωστό:

Πρόταση

Εάν η $f(x) = 0$ έχει την p ρίζα (αλγεβρικής) πολλαπλότητας m , τότε $f(p) = f'(p) = \dots = f^{(m-1)}(p) = 0$ & $f^{(m)}(p) \neq 0$.

($f'(x) \neq 0 \Rightarrow f'(p) \neq 0 \Rightarrow m = 1$ δηλαδή $p = \text{απλή ρίζα}$).

(2) Σημεία στα οποία $f''(x) = 0$ είναι π.χ τα σημεία καμπής

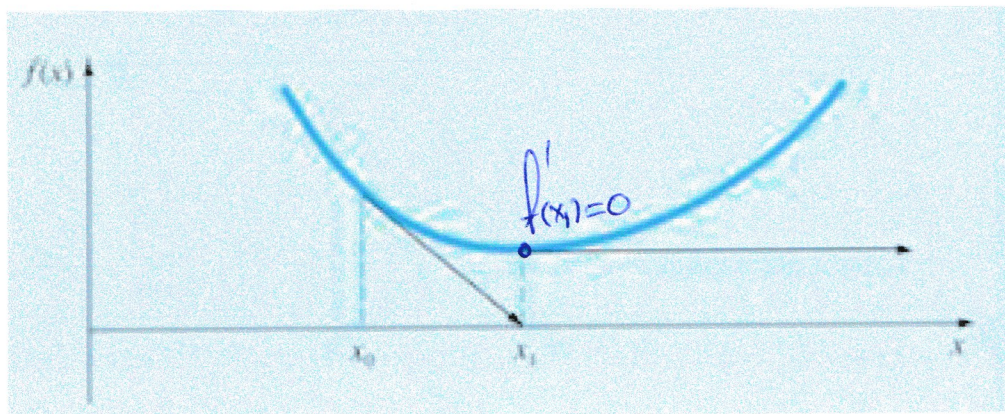


(3) Εάν ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες του θεωρήματος 2, εκτός από την τελευταία, τότε συνήθως χωρίζουμε το διάστημα $[a, b]$ στα υποδιαστήματα $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ ή εξετάζουμε αν σε κάποιο από αυτά τα υποδιαστήματα ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος 2 (οπότε ε' αυτό το υποδιαστήμα γράφουμε τη ρίζα).

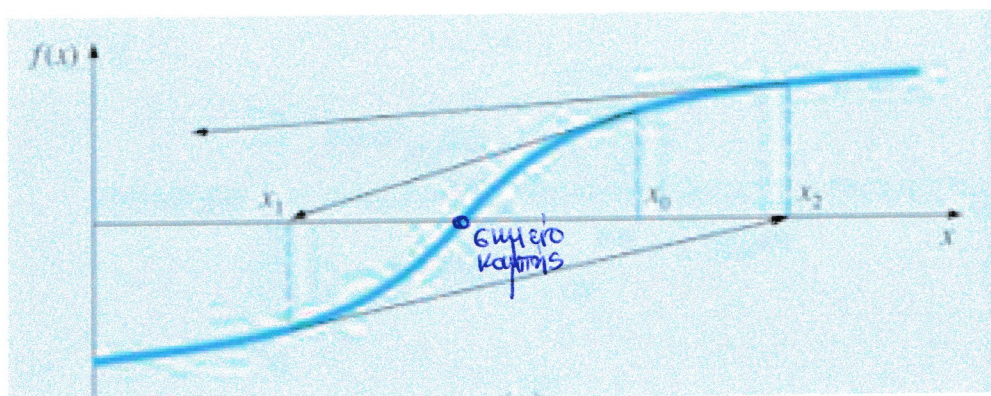
Μερικές περιπτώσεις στις οποίες η μέθοδος Newton-Raphson δεν συγκρίνει (μη-ικανοποίηση κάποιας από τις παραπάνω συνθήκες) φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα.

Περίπτωσης μη-εφαρμογής της Newton-Raphson

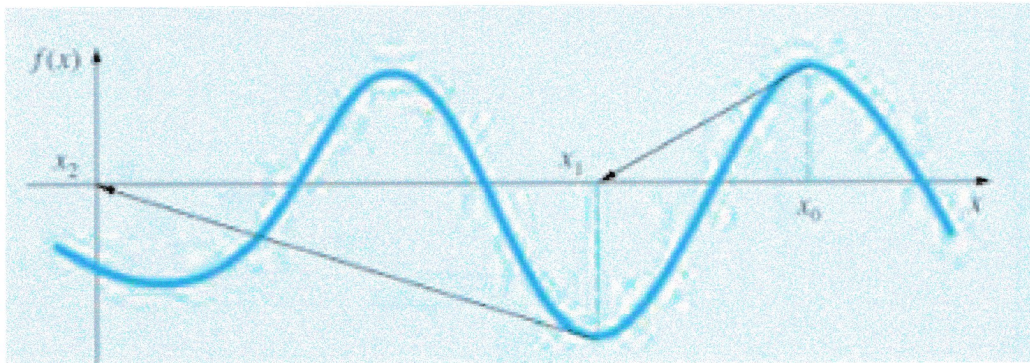
NR
5



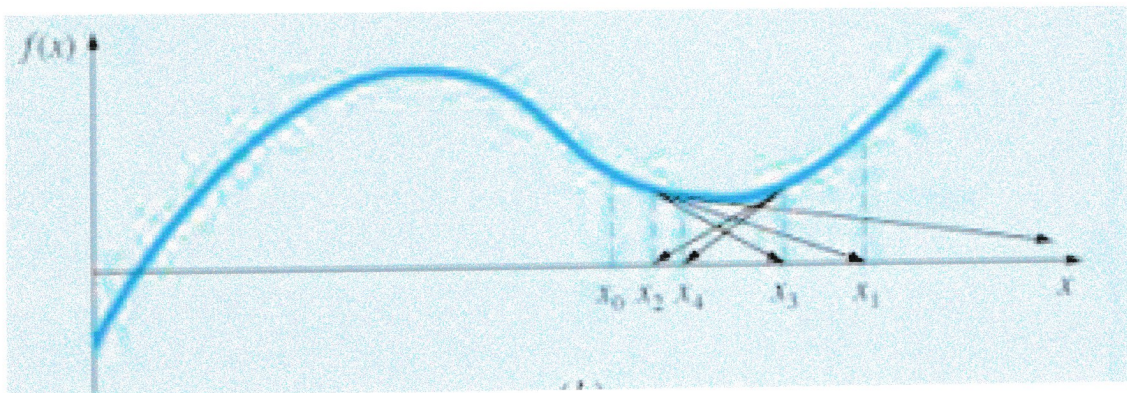
Σημείο x_n που η
παράγωγος μηδενίζεται
 $f'(x_n) = 0$



Υπάρχει σημείο καμπής
($f''(p) = 0$)



Απομόκρυση των
προσεγγίσεων



Παγινόρφωση ή
πίθανή απομόκρυση

Κριτήριο διακρίσις/τερματισμού

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι με την βοήθεια των οποίων καθορίζουμε πότε τερματίζεται/διακόπτεται η μέθοδος Newton-Raphson.
Εάν μας δώσει μία προσέγγιση ε , τότε χρησιμοποιούμε συνήδως το κριτήριο:

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$$

Άλλα κριτήρια είναι:

(σχετικό
σφάλμα)

$$\frac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|} < \varepsilon$$

ή

$$f(x_k) < \varepsilon$$

για δοσμένο ε

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 - 6x + 4 = 0$

(α) Να μελετηθεί η συνάρτηση

(β) Να κατασκευαστεί το γράφημα της $f(x)$.

Λύση

Η $f(x) = x^3 - 6x + 4$ σαν πολυωνυμική ορίζεται $\forall x \in \mathbb{R}$ κ' είναι συνεχής κ' παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x \in \mathbb{R}$.

Η 1^η παράγωγος

$$f'(x) = 3x^2 - 6$$

$\mathbb{R}'$

$$3x^2 - 6 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \quad \text{πιθανά σημεία ακρότητας}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+	
$f(x)$		↗	↘	↗	

Τοπικό μέγιστο Τοπικό ελάχιστο

στο

$x = -\sqrt{2}$ τοπικό μέγιστο

$x = +\sqrt{2}$ τοπικό ελάχιστο

Η 2^η παράγωγος:

$$f''(x) = 6x$$

$$\mathbb{R}' \quad f''(x) = 0 = 6x \Rightarrow x = 0 \quad \text{πιθανό σημείο καμπής:}$$

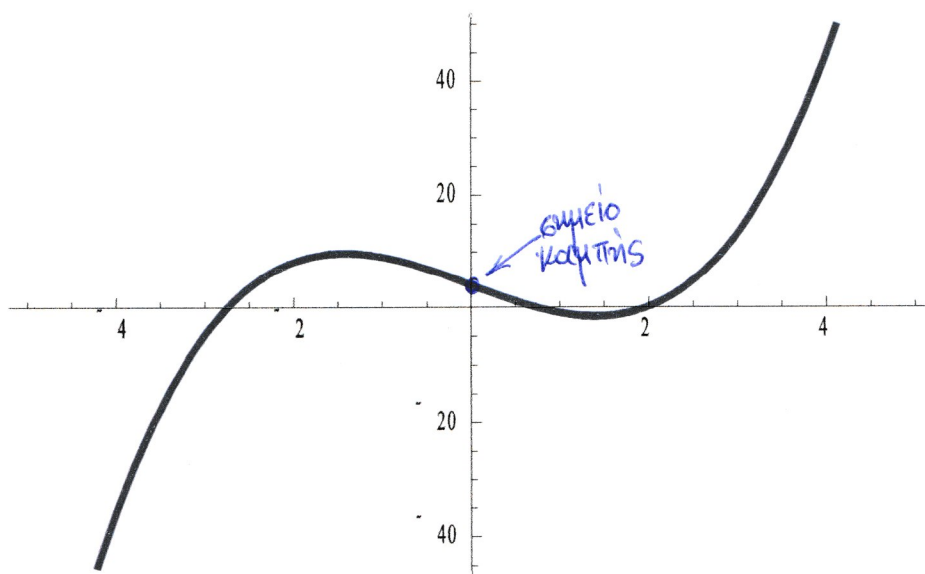
x		0	
$f''(x)$	-		+
$f(x)$	⌒		⌒

σημείο καμπής

Το γράφημα της $f(x) = x^3 - 6x + 4$ (με τη βοήθεια των παραπάνω) δίνεται παρακάτω.

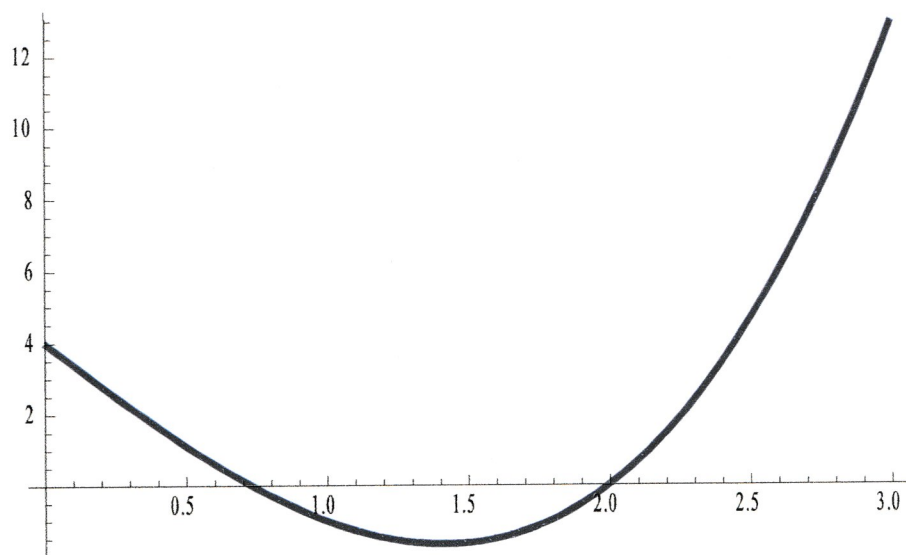
Γράφημα της $f(x) = x^3 - 6x + 4$

`Plot[x^3 - 6x + 4, {x, -5.5}, PlotStyle -> {Thickness[0.008]}]`



`Plot[x^3 - 6x + 4, {x, 0, 3}, PlotStyle -> {Thickness[0.008]}]`

Γράφημα στο
διάστημα
[0, 3]



$$f(x) = x^3 - 6x + 4$$

Παράδειγμα

Δίνεται η εξίσωση $x^3 - 6x + 4 = 0$

- (α) Να δείξει ότι η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $[0, 1]$.
 (β) Να δείξει ότι για οποιαδήποτε αρχική τιμή x_0 στο $[0, 1]$, η μέθοδος Newton-Raphson συγκλίνει.
 (γ) Εάν $x = 0.5$ να γίνουν τέσσερες επαναλήψεις της μεθόδου. Ποιο το (απόλυτο) σφάλμα. Να επαναληφθεί η διαδικασία για $x_0 = 0.7$ κ' $x_0 = 0.75$

Λύση

(α)
$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 4 > 0 \\ f(1) &= 1^3 - 6 \cdot 1 + 4 = -1 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0$$
 άρα, από το θεώρημα Bolzano συμπεραίνουμε ότι η $f(x) = 0$ έχει μία πληθίστων ρίζα στο $[0, 1]$

Ακόμα $f'(x) = 3x^2 - 6 < 0, \forall x \in [0, 1]$ δηλαδή η $f(x)$ είναι φθίνουσα στο $[0, 1]$ ε' $f(0) > 0$ κ' $f(1) < 0$, άρα η $f(x)$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $[0, 1]$ (δείτε κ' την μελέτη της $f(x)$).

(β)
$$f'(x) = 3x^2 - 6 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$
 δηλαδή $f'(x) \neq 0$
 $\forall x \in [0, 1]$

$$f''(x) = 6x \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1],$$
 δηλαδή η $f(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $[0, 1]$.

Τέλος
$$\max \left\{ \left| \frac{f(0)}{f'(0)} \right|, \left| \frac{f(1)}{f'(1)} \right| \right\} = \max \left\{ \frac{4}{|-6|}, \frac{|-1|}{|-3|} \right\} = \frac{2}{3} < b - a = 1 - 0 = 1$$

Άρα, η $f(x)$ ικανοποιεί τις συνθήκες (συγκλίσης) του θεωρήματος 2, οπότε για οποιαδήποτε $x_0 \in [0, 1]$, εάν αρχική τιμή, η μέθοδος Newton-Raphson συγκλίνει.

(γ) Αν $x_0 = 0.5$ τότε:
$$x_1 = 0.5 - \frac{0.5^3 - 6 \cdot 0.5 + 4}{3 \cdot 0.5^2 - 6} = 0.71429$$

$$\text{σφάλμα: } |0.5 - 0.71429| \approx 0.21429$$

$$\text{Το } x_2 = 0.71429 - \frac{0.71429^3 - 6 \cdot 0.71429 + 4}{3 \cdot 0.71429^2 - 6} = 0.73189$$

$$\text{σφάλμα: } |0.71429 - 0.73189| \approx 0.0176$$

$$\text{Ακόμα: } x_3 = 0.73189 - \frac{0.73189^3 - 6 \cdot 0.73189 + 4}{3 \cdot 0.73189^2 - 6} = 0.73205$$

$$\text{Σφάλμα: } |0.73189 - 0.73205| = 0.00016 < 0.01$$

άρα δεν χρειάζεται επιπλέον επανάληψη

$$\text{Εκτίμηση ρίζας: } 0.73205$$

Οι περιπτώσεις για $x_0 = 0.7$ κ' 0.75 φαίνονται στη σελίδα που ακολουθεί.



Newton-Raphson για $x^3 - 6x + 4 = 0$

NR
12

$$x_0 = 0.5$$

επαναλήψεις	εκτίμηση	τιμή	παράγωγος	σφάλμα	σχετικό σφάλμα
n	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$ x_k - x_{k-1} $	$ x_k - x_{k-1} / x_k $
0	0,5	1,125	-5,25		
1	0,71429	0,0787172	-4,469387755	0,214285714	0,3
2	0,73189824	0,0006702	-4,392974904	0,017612524	0,024064171
3	0,7320508	5,111E-08	-4,392304897	0,000152557	0,000208397

$$x_0 = 0.7$$

επαναλήψεις	εκτίμηση	τιμή	παράγωγος	σφάλμα	σχετικό σφάλμα
n	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$ x_k - x_{k-1} $	$ x_k - x_{k-1} / x_k $
0	0,7	0,143	-4,53		
1	0,73157	0,0021241	-4,39442773	0,031567329	0,043150272
2	0,73205069	5,129E-07	-4,392305358	0,000483362	0,000660285

$$x_0 = 0.75$$

επαναλήψεις	εκτίμηση	τιμή	παράγωγος	σφάλμα	σχετικό σφάλμα
n	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$ x_k - x_{k-1} $	$ x_k - x_{k-1} / x_k $
0	0,75	-0,078125	-4,3125		
1	0,73188	0,0007325	-4,393037177	0,018115942	0,024752475
2	0,73205079	6,105E-08	-4,392304906	0,000166736	0,000227765

Παρατήρηση

Ⓘ Βλέπουμε ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει $\forall x_0 \in [0,1]$

Ⓜ Όσο πιο κοντά είναι το x_0 στη ρίζα, τόσο λιγότερα βήματα χρειάζονται.

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $y=f(x)=2x^3-4x-2$

(α) Να δείξει ότι η εξίσωση $2x^3-4x-2=0$ έχει μια ρίζα στο $[1,2]$

(β) Να βρεθεί υποδιαστήμα του $[1,2]$, στο οποίο η μέθοδος Newton-Raphson συγκλίνει σίγουρα.

Λύση

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 2 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1 - 2 = 2 - 6 = -4 \\ f(2) &= 2 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2 - 2 = 16 - 10 = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0$$

άρα από το Θ. Bolzano,
η $f(x)=0$ έχει μια ρίζα (ακριβώς)
στο $[1,2]$

$$\text{Η } f'(x) = 6x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ σημεία τα οποία είναι εκτός του } [1,2]$$

(δηλ. $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [1,2]$)

$$\text{Η } f''(x) = 12x \quad \text{ή} \quad f'(x) > 0 \quad \forall x \in [1,2] \text{ (δηλ. διατηρεί πρόσημο)}$$

$$\text{Ανάλυση} \quad \max \left\{ \frac{|f(1)|}{|f'(1)|}, \frac{|f(2)|}{|f'(2)|} \right\} = \max \left\{ \frac{4}{2}, \frac{6}{20} \right\} = 2 > (2-1) = 1$$

δηλ. η συνθήκη (δ) του θεωρήματος 2, για τη σύγκλιση του αλγόριθμου Newton-Raphson δεν ισχύει (άρα δεν είμαστε σίγουροι για τη σύγκλιση).

Θεωρούμε τα υποδιαστήματα: $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ ή $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ ή από αυτές επιλέξουμε (για δοκιμή) το:

$$\left[\frac{3}{2}, 2\right]$$

$$\text{Τώρα } f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 4 \cdot \frac{3}{2} - 2 = \frac{54}{8} - \frac{12}{2} - 2 = \frac{54}{8} - \frac{48}{8} - \frac{16}{8} = -\frac{10}{8}$$

$$\text{ή } f\left(\frac{3}{2}\right) \cdot f(2) < 0, \text{ άρα το } \left[\frac{3}{2}, 2\right] \text{ περιέχει μια ρίζα της } f(x)=0$$

$$\text{Το: } \max \left\{ \frac{f(\frac{3}{2})}{f'(\frac{3}{2})}, \frac{f(2)}{f'(2)} \right\} = \max \left\{ \underbrace{\frac{20}{152}}_{0,13}, \underbrace{\frac{6}{20}}_{0,3} \right\} \approx 0,3 < \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2}$$

Ανών $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [\frac{3}{2}, 2]$ ή $f'(x) > 0 \quad \forall x \in [\frac{3}{2}, 2]$ (όπως πριν)

Άρα, ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος 2 (σύγκριση N-R),
επομένως για οποιαδήποτε επιλογή τιμής (σαν αρχική τιμή) στο $[\frac{3}{2}, 2]$
η μέθοδος Newton-Raphson συγκλίνει.

Παρατήρηση

- (1) Η μέθοδος Newton-Raphson μπορεί να χρησιμοποιηθεί κ' για την εύρεση μιγαδικών ριζών. Σ' αυτή την περίπτωση η αρχική εκτίμηση της ρίζας θα πρέπει να είναι μιγαδικός αριθμός.
- (2) Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή της μεθόδου NR είναι η εύρεση ριζών κάθε τάξης ενός δεστικού αριθμού (δηλ. $\sqrt[n]{c}$, c -δεστικός αριθμός π.χ. για την εύρεση της τετραγωνικής ρίζας δεστικού αριθμού c έχουμε $f(x) = x^2 - c = 0 \Rightarrow f'(x) = 2x$ κ' ο αλγόριθμος γίνεται:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + c}{2x_n} = \frac{x_n^2 + c}{2x_n} \quad \eta'$$

$$x_n = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{c}{x_n} \right)$$

Γενικότερα, για την k -οστή ρίζα c έχουμε: $f(x) = x^k - c \Rightarrow f'(x) = kx^{k-1}$

$\mathbb{R}'$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - c}{kx_n^{k-1}} = \frac{kx_n^k - x_n^k + c}{kx_n^{k-1}} = \frac{(k-1)x_n^k + c}{kx_n^{k-1}} \quad \eta'$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{k} \left\{ (k-1)x_n^{k-1} + \frac{c}{x_n^{k-1}} \right\}$$

- (3) Εάν $f(x) = 0 \Leftrightarrow \eta f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x + \eta f(x)$ κ' για $\eta = -\frac{1}{f'(x)}$
 $\Leftrightarrow x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ (έστω $f'(x) \neq 0$)

Οπότε, εάν $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, η ρίζα με τη μέθοδο του σταθερού σημείου δίνεται από τη σχέση:

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{πρόσφατα } n \quad N-R$$

Διότι ο αλγόριθμος (μέθοδος) Newton-Raphson είναι ειδική περίπτωση της μεθόδου σταθερού βήματος.

(4) Ορισμός.

Έστω p ρίζα της f ή f m φορές παραγωγίσιμη ($m \geq 1$). Η ρίζα p είναι αλγεβρικής πολλαπλότητας m αν:

$$f(p) = f'(p) = f''(p) = \dots = f^{(m-1)}(p) = 0$$

($m=1 \Rightarrow$ απλή ρίζα)

Εάν το p είναι ρίζα αλγεβρικής πολλαπλότητας $m \geq 2$, τότε η μέθοδος Newton-Raphson δεν μπορεί να εφαρμοστεί ($f'(p)=0$). Αντί γι' αυτήν χρησιμοποιείται η:

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} & x_n \neq p \\ x_n & x_n = p \end{cases}$$

Παράδειγμα

Έστω η $f(x) = x^3 - 3x + 2 = 0$ τότε $f'(x) = 3x^2 - 3$ $f''(x) = 6x$

και $f(1) = 0 = f'(1)$ ή $f''(1) \neq 0$

Διότι το 1 είναι ρίζα αλγεβρικής πολλαπλότητας $m=2$.

Χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο

$$x_{n+1} = x_n - 2 \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

οπότε:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{3x_n^3 - 3x_n + 2}{3x_n^2 - 3}$$

Για αρχική επιλογή: $x_0 = 1,2$ έχουμε:

$$x_1 = 1.00606060 \dots$$

$$x_2 = 1.0000061033$$

$$x_3 = 1.00000000003609$$

(γρήγορη σύγκλιση)