

Μέθοδος Newton-Raphson για μη-γραμμικά συστήματα.

Έστω $f_1, f_2: \Omega (\subseteq \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$ πραγματικές συναρτήσεις με μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε κάθε $(x, y) \in \Omega$ & $\vec{f} = (f_1, f_2)$ διανυσματική συνάρτηση. Ο ιακωβιανός πίνακας $J_{\vec{f}}(x, y)$ της $\vec{f}$ στο σημείο (x, y) ορίζεται σαν:

$$J_{\vec{f}}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}$$

Έστω ότι έχουμε το μη-γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases} \quad (\text{ή } \vec{f}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = (0, 0))$$

Η μέθοδος Newton-Raphson για την επίλυση του συστήματος είναι

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \left(J_{\vec{f}}(x_n, y_n) \right)^{-1} \cdot \vec{f}(x_n, y_n)$$

με (x_0, y_0) αρχικό διάνυσμα (δίνεται) $\hookleftarrow n=0, 1, 2, \dots$

$J_{\vec{f}}^{-1}(x, y)$ ο αντίστροφος (εφ' όσον υπάρχει) του ιακωβιανού πίνακα $J_{\vec{f}}(x, y)$

Παρατήρηση:

Τα παραπάνω γενικεύονται εύκολα σε περιπτώσεις από δύο διαστάσεις

Πρόταση.

Εάν f_1, f_2 ή $\vec{f}$ όπως παραπάνω ή (x^*, y^*) ρίζα του συστήματος

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases} \quad \left(\text{ή } \vec{f} = (f_1, f_2) = (0, 0) \right)$$

είναι έστω f_1, f_2 έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους σε μία περιοχή του (x^*, y^*) ή ο $J_{\vec{f}}(x, y)$ στο (x^*, y^*) αντιστρέφεται. Τότε για κάθε αρχικό διάνυσμα (x_0, y_0) κοντά στο (x^*, y^*) , η ακολουθία $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ που δίνεται με τη βοήθεια της μεθόδου Newton-Raphson συγκλίνει στη ρίζα (x^*, y^*) του συστήματος.

Ⓐ Εάν

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

πίνακας, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, τότε ο
αντίστροφος του A (δηλ. ο A^{-1})
δίνεται από τη σχέση

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \gamma\beta} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$$

ορίζεται
Α

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0 \text{ για αντιστροφή.}$$

Ⓑ Εάν $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ διάνυσμα, τότε ορίζουμε τις παρακάτω
νόρμες:

$$\|\vec{x}\|_{\infty} = \max \{ |x_1|, \dots, |x_n| \} \quad \text{νόρμα-άπειρο}$$

$$\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = |x_1| + \dots + |x_n| \quad \text{νόρμα-1, αβολόγραμμα}$$

$$\|\vec{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad \text{νόρμα-2, ή Ευκλείδεια}$$

Γενικότερα, εάν $1 \leq p < \infty$, τότε:

$$\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{νόρμα-p}$$

ii) Εάν $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας, τότε

$$(1) \|A\|_\infty = \max_{i=1,2,\dots,n} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\} = \max \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{1j}|, \sum_{j=1}^n |a_{2j}|, \dots, \sum_{j=1}^n |a_{nj}| \right\}$$

νόρμα αθροίσματος γραμμών

$$(2) \|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right\} = \max \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{i1}|, \dots, \sum_{i=1}^n |a_{in}| \right\}$$

νόρμα αθροίσματος
στήλών

iii) Εάν $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} \{ |f(x)| \}$$

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$f_2(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 1$$

NRK
4

Παράδειγμα 1

Λέω το γραμμικό σύστημα: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Να γίνει μία επανάληψη της μεθόδου Newton-Raphson με αρχικό διάνυσμα $(x_0, y_0) = (0.55, 0.85)$

Λύση

$$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2(x-1) & 2y \end{bmatrix}$$

$$J_f(0.55, 0.85) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0.55 & 2 \cdot 0.85 \\ 2(0.55-1) & 2 \cdot 0.85 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 & 1.7 \\ -0.9 & 1.7 \end{bmatrix}$$

$$|J_f| = \begin{vmatrix} 1.1 & 1.7 \\ -0.9 & 1.7 \end{vmatrix} = 1.1 \cdot 1.7 + 1.7 \cdot 0.9 = 3.4$$

Επομένως:

$$J_f^{-1} = \frac{1}{|J_f|} \begin{bmatrix} 1.7 & -1.7 \\ 0.9 & 1.1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3.4} \begin{bmatrix} 1.7 & -1.7 \\ 0.9 & 1.1 \end{bmatrix}$$

Τώρα:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - (J_f^{-1}(x_0, y_0)) \cdot \begin{pmatrix} f_1(x_0, y_0) \\ f_2(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.55 \\ 0.85 \end{pmatrix} - \frac{1}{3.4} \begin{pmatrix} 1.7 & -1.7 \\ 0.9 & 1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.025 \\ -0.075 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.8666 \end{pmatrix}$$

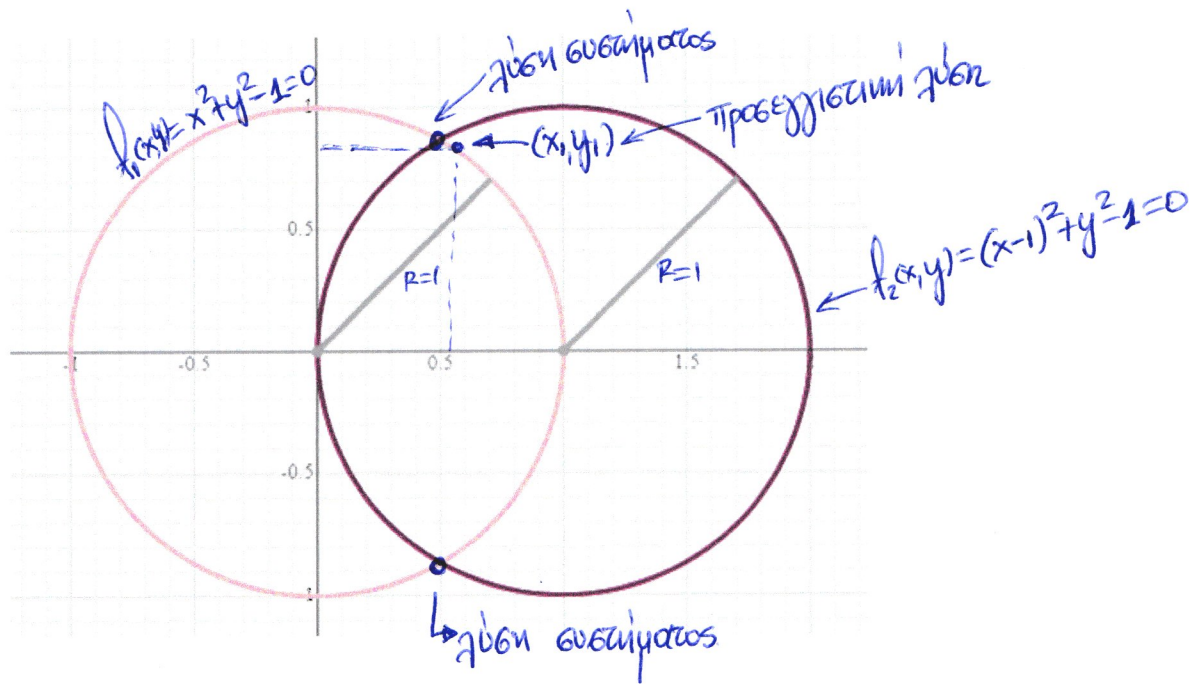
"ακριβείς" πηγές

$$(x=0.5 \quad y=\pm \frac{\sqrt{3}}{2} = \pm 0.866)$$

→ προσέγγιση
πληθ. 99.9%

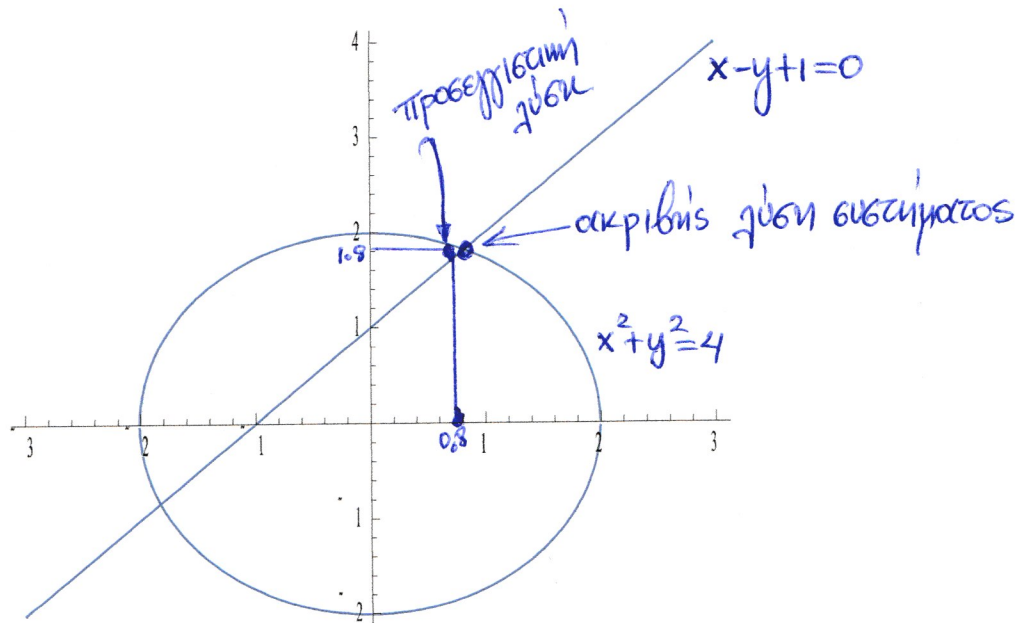
Παράδειγμα 1

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$



Παράδειγμα 2

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$



$$f_1(x,y) = x - y + 1$$

$$f_2(x,y) = x^2 + y^2 - 4$$

Παράδειγμα (2)

Δίνεται το σύστημα: $x - y + 1 = 0$
 $x^2 + y^2 - 4 = 0$

Να γίνει τρεις επαναλήψεις της μεθόδου Newton-Raphson με αρχικό διάνυσμα $(x_0, y_0) = (0.8, 1.8)$.

Λύση.

Εδώ:

$$\vec{J}_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2x & 2y \end{bmatrix}$$

ΟΤΟΤΕ

$$\vec{J}_f(0.8, 1.8) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1.6 & 3.6 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{J}_f^{-1}(0.8, 1.8) = \begin{bmatrix} 0.692308 & 0.192308 \\ -0.307692 & 0.192308 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ανώντα: } \vec{f}(0.8, 1.8) = \begin{pmatrix} f_1(0.8, 1.8) \\ f_2(0.8, 1.8) \end{pmatrix} =$$

$$= (0.8 - 1.8 + 1, 0.8^2 + 1.8^2 - 4) = (0, -0.12)$$

Η πρώτη επανάληψη της μεθόδου:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \left(\vec{J}_f^{-1}(x_0, y_0) \right) \begin{pmatrix} f_1(x_0, y_0) \\ f_2(x_0, y_0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.8 \\ 1.8 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0.692308 & 0.192308 \\ -0.307692 & 0.192308 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -0.12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.8230769 \\ 1.8230769 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Ανάλυση:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \vec{J}_f^{-1}(x_1, y_1) \begin{pmatrix} f_1(x_1, y_1) \\ f_2(x_2, y_2) \end{pmatrix} = \dots$$

$$= \begin{pmatrix} 0.8228757 \\ 1.8228757 \end{pmatrix}$$

Τέλος (ανάλογα):

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.82287565553230 \\ 1.82287565553230 \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση

(1) "Ακριβής" λύση:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\sqrt{7}-1) \\ \frac{1}{2}(\sqrt{7}+1) \end{pmatrix}$$

(2) Εάν U =ακριβής λύση & $U_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$ η προσεγγιστική, μία εκτίμηση του σφάλματος δίνεται από τη σχέση:

$$\|U - U_1\|_{\infty} \leq \|U_1 - U_0\|_{\infty}$$

ή

$$\|U - U_1\|_1 \leq \|U_1 - U_0\|_1$$