

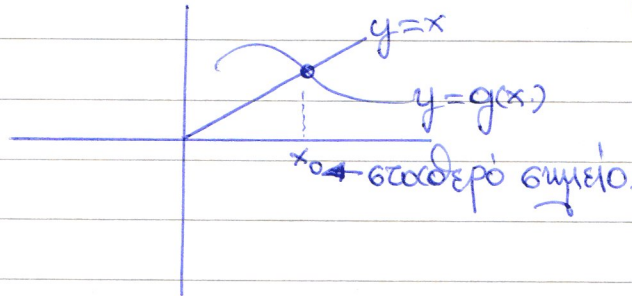
Σταθερό σημείο συνάρτησης (fixed point)

Ορισμός

Εάν $g: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τότε το $x_0 \in A$ καλείται σταθερό σημείο (fixed point) της g , εάν

$$g(x_0) = x_0$$

δηλ. σημείο τομής των
 $y=x$ κ' $y=g(x)$



Πρόταση 1

Εάν $g: [a, b] \rightarrow [a, b]$ συνεχής συνάρτησης, τότε η $y=g(x)$ έχει ένα τουλάχιστον σταθερό σημείο.

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = g(x) - x$. Τότε

$$h(a) = g(a) - a \geq 0$$

$$g(a) \in [a, b] \Rightarrow g(a) \geq a \Rightarrow g(a) - a \geq 0$$

$$h(b) = g(b) - b \leq 0$$

Επομένως, $h(a)h(b) \leq 0$ οπότε από το θεώρημα Bolzano η $h(x)$ έχει μια ρίζα στο $[a, b]$, δηλ. $\exists l$ τέω $h(l) = g(l) - l = 0$
δηλ. $g(l) = l$

#

Ορισμός

Η $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ καλείται συστογή ή συστολιμή απεικόνιση (contractive) αν υπάρχει $0 < L < 1$ τέω $\forall x, y \in [a, b]$:

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$$

Παρατήρηση

Εάν g είναι ουσιοτή, τότε είναι συνεχής.

Πρόταση (κρίτήριο ουσιοτικότητας)

Έστω $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής κ' παραγωγίσιμη στο (a, b) .
Η g είναι ουσιοτή αν κ' μόνον αν:

$$\sup_{x \in (a, b)} |g'(x)| < 1$$

δλγ.

αν κ' μόνον αν $\exists L \in (0, 1)$ τω $|g'(x)| \leq L$, $\forall x \in (a, b)$

Απόδειξη

$(\Rightarrow)$ g ουσιοτή, οπότε $\exists L \in (0, 1)$ τω $\forall x \in (a, b)$

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y| \Rightarrow \left| \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \right| \leq L < 1$$

$$\Rightarrow \left| \lim_{x \rightarrow y} \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \right| \leq L \Rightarrow |g'(y)| \leq L < 1 \quad \forall y \in (a, b)$$

$$\Rightarrow \sup_{y \in (a, b)} |g'(y)| < 1$$

$(\Leftarrow)$ Έστω $a \leq x < y \leq b$, τότε από το Θ.Μ.Τ $\exists \xi \in (x, y)$ τω

$$\frac{g(y) - g(x)}{y - x} = g'(\xi) \Rightarrow |g(y) - g(x)| = |g'(\xi)| \cdot |y - x|$$

$$\leq \underbrace{\sup_{x \in (a, b)} |g'(x)|}_{= L} \cdot |y - x|$$

Άρα η g ουσιοτή.

#

Παράδειγμα

Η $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{4}x^3 + 2$ είναι συστολή γιατί
 $g'(x) = \frac{3}{4}x^2 \leq 2 = \frac{3}{4} < 1 \quad \forall x \in [0,1]$

Πρόταση 2

Εάν $g: [a,b] \xrightarrow{\text{συστολή}} \mathbb{R}$. Τότε η g έχει ένα το πολύ σταθερό σημείο.

Απόδειξη

Εστω λοιπόν έχει δύο σταθερά σημεία τα x, y : $x \neq y$ τότε

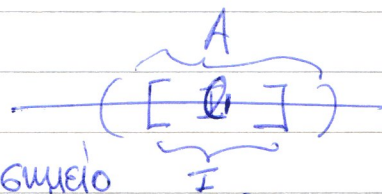
$$|x-y| = |g(x)-g(y)| \leq 2|x-y| < |x-y| \text{ άτοπο. Άρα } x=y$$

Πόρισμα

Εάν $g: [a,b] \rightarrow [a,b]$ συστολή. Τότε η g έχει ένα ακριβώς σταθερό σημείο.

Απόδειξη

Προκύπτει από πρόταση 1 & 2.



Θεώρημα (τοπική σύγκλιση) l = σταθερό σημείο

Εστω $g: A \rightarrow \mathbb{R}$, όπου A ανοικτό διάστημα. Εστω $l \in A$ τω $|g'(l)| < 1$. Τότε $\exists I \subseteq A$ κλειστή περιοχή του l , τω για κάθε επιλογή $x_0 \in I$ κοντά στο l , η ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά:

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad n \geq 0$$

είναι κατά ορισμένο k συγκλίνει στο σταθερό σημείο l .

Απόδειξη

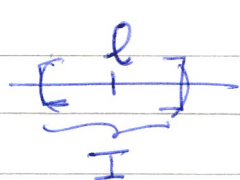
Επειδή

$$|g'(l)| = \left| \lim_{x \rightarrow l} \frac{g(x) - g(l)}{x - l} \right| < 1 \Rightarrow \text{από τον ορισμό του}$$

οπότε $\exists \alpha \in [0,1]$ κ' $I \subseteq A$ κλειστό διάστημα τ.ω.

$$\left| \frac{g(x) - g(l)}{x - l} \right| \leq \alpha < 1 \Rightarrow$$

$$|g(x) - g(l)| \leq \alpha |x - l| \quad \forall x \in I.$$



$$\text{κ' } \forall x \in I$$

$$(g(I) \subseteq I)$$

$$|g(x) - l| = |g(x) - g(l)| \leq \alpha |x - l| \Rightarrow g(x) \in I$$

Για $x_0 \in I$ (αρχικό σημείο), είναι $\{x_n\} \subseteq I$, κ'
(x_0 αρκετά κοντά στο l)

$$|x_n - l| = |g(x_{n-1}) - g(l)| \leq \alpha |x_{n-1} - l| = |g(x_{n-2}) - g(l)|$$

$$\leq \alpha^2 |x_{n-2} - l| \leq \dots \leq \alpha^n |x_0 - l| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{δηλ. } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$$

Λήμμα

Εάν $g: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής κ' $x_{n+1} = g(x_n) \quad n \geq 0$.

Εάν $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$, τότε το l είναι σταθερό σημείο της g .

Απόδειξη

Εάν $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$ τότε κ' $y_n = x_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$, οπότε (επαγωγικά)

$$\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}}_l = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \xrightarrow[g]{\text{συνέχεια}} g(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = g(l)$$

$$\text{δηλ. } g(l) = l \Rightarrow l = \text{σταθερό σημείο}$$

Θεώρημα (σταθερού σημείου/συστοχής).

Έστω $g: [a, b] \rightarrow [a, b]$ συστολή (σταθεράς $L \in [0, 1)$). Τότε, η ακολουθία (x_n) που ορίζεται από την αναδρομική σχέση:

$$x_{n+1} = g(x_n), \text{ η } \geq 0 \text{ κ' } x_0 \in [a, b], \text{ δίνεται}$$

είναι καλά ορισμένη κ' συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο ℓ της g στο $[a, b]$, για κάθε επιλογή $x_0 \in [a, b]$. Απόμα το βήμα :

$$(i) |x_n - \ell| \leq \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}| \quad (\alpha\text{-posteriori})$$

$$(ii) |x_n - \ell| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0| \quad (\alpha\text{-priori})$$

Απόδειξη

Το ότι η g έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο (ύπαρξη κ' μοναδικότητα), εξασφαλίζεται από τα προηγούμενα. Η ακολουθία είναι καλά ορισμένη γιατί $g([a, b]) \subseteq [a, b]$. Εάν αποδείξουμε ότι η $x_n \rightarrow \ell$ (ℓ = σταθερό σημείο), τότε το ℓ δίνει το σταθερό σημείο

$$\begin{aligned} |x_n - \ell| &= |g(x_{n-1}) - g(\ell)| \leq L |x_{n-1} - \ell| = L |g(x_{n-2}) - g(\ell)| \\ &\leq L^2 |x_{n-2} - \ell| \leq \dots \leq L^n |x_0 - \ell| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\text{άρα } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$$

Για το βήμα:

$$\begin{aligned} (i) |x_n - \ell| &= |g(x_{n-1}) - g(\ell)| \leq L |x_{n-1} - \ell| \leq L |x_{n-1} - x_n| + L |x_n - \ell| \Rightarrow \\ |x_n - \ell| &\leq \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}| \end{aligned}$$

(ii) Από (i) $|x_n - \epsilon| \leq \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}| = \frac{L}{1-L} |g(x_{n-1}) - g(x_{n-2})|$

$$\leq \frac{L}{1-L} L |x_{n-1} - x_{n-2}| \dots \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|.$$

Παρατήρηση

(i) Αν για ένα αριθμό επαναλήψεων, τ.ω το εφάλμα να είναι μικρότερο από οσδήποτε προσέγγιση ϵ τότε:

$$\frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0| < \epsilon$$

$n = \text{αριθμός επαναλήψεων}$

(ii) Η επαναληπτική διαδικασία σταματά εάν, δύο διαδοχικές προσεγγίσεις έχουν διαφορά μικρότερη από οσδήποτε ϵ :

$$\frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}| < \epsilon.$$

* όσο μικρότερο το L , τόσο μικρότερο το εφάλμα.