

# Μέθοδος του σταθερού σημείου

## Περιγραφή μεθόδου

Έστω ότι γράφουμε μια ρίζα της εξίσωσης  $f(x)=0$ ,  $x \in [a, b]$ .  
 Έστω τώρα ότι η εξίσωση αυτή μπορεί να μετασχηματιστεί σαν  $x=g(x)$ . Αν υπάρχει  $p$  για το οποίο  $p=g(p)$ , τότε το  $p$  αποτελεί ρίζα της  $f(x)=0$ .

Αλλά  $p=g(p)$  σημαίνει ότι το  $p$  είναι σταθερό σημείο της  $g(x)$ .  
 Δηλαδή, το πρόβλημα εύρεσης ρίζας της  $f(x)=0$ ,  $x \in [a, b]$  μεταχρηματίζεται στο πρόβλημα εύρεσης σταθερού σημείου της  $g(x)$ .  
 Η εύρεση του σταθερού σημείου επιτυγχάνεται (εφ' όσον υπάρχει βέβαια) από την αναδρομική σχέση:

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad x_0 = \text{δεδομένο (επιλογή κοντά στο σταθερό σημείο εάν είναι δυνατόν)}.$$

## Παραδείγματα

(1) Ο μετασχηματισμός της  $f(x)=0$  σε  $x=g(x)$  είναι πάντα δυνατός:  $\pi. x \quad f(x)=0 \Leftrightarrow x = \underbrace{x + f(x)}_{g(x) = x + f(x)}$

(2) Ο μετασχηματισμός του (1), δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένος:  
 $\pi. x \quad f(x)=0 \Leftrightarrow x = \underbrace{x + f(x)}_{g_1(x)} \Leftrightarrow x = \underbrace{x + 2f(x)}_{g_2(x)} = \dots$

(3) Τα  $x_1, x_2, x_3, \dots$  που δίνονται όπως παραπάνω, είναι διαδοχικές εκτιμήσεις της ρίζας  $p$ .

(4) Τα σταθερά σημεία της  $g(x)$  είναι τα σημεία της  $y=x$   $\nwarrow x=g(x)$   $\nearrow$   $y=g(x)$ .

γραφή της  $f(x)=0$  σαν  $x=g(x)$

### Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=x^3+4x^2-10=0$ . Με τη βοήθεια αριθμητικών πράξεων, δείξτε ότι κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις, έχει σταθερό σημείο ακριβώς στο σημείο που είναι ρίζα της εξίσωσης  $f(x)=0$

(Αρκεί να δείξουμε ότι η  $f(x)=0$  μετασχηματίζεται σαν  $x=g(x)$ )

$$g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$$

$$g_2(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$$

$$g_3(x) = \frac{1}{2} \sqrt{10 - x^3}$$

$$g_4(x) = \sqrt{\frac{10}{x+4}}$$

$$g_5(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$$

### Λύση

(i)  $x^3 + 4x^2 - 10 = 0 \xrightarrow[\text{στα δύο μέλη}]{\text{πρόσθεσω } -(x^3 + 4x^2 - 10)}$   $-(x^3 + 4x^2 - 10) = 0 \Rightarrow x = x - (x^3 + 4x^2 - 10) \Rightarrow x = x - x^3 - 4x^2 + 10$   
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{g_1(x)}$

(ii)  $x^3 + 4x^2 - 10 = 0 \xrightarrow[\text{με } x]{\text{διαιρώ}} x^2 + 4x - \frac{10}{x} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{10}{x} - 4x \Rightarrow x = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$   
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{g_2(x)}$

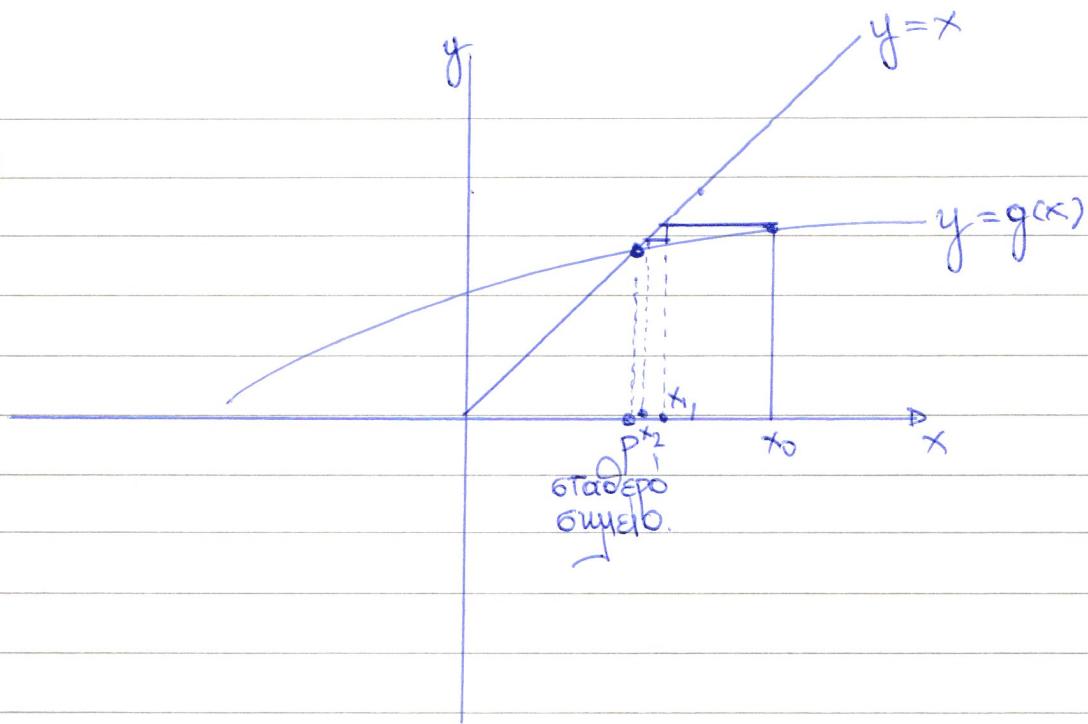
(iii)  $x^3 + 4x^2 - 10 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 10 - x^3 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}(10 - x^3) \Rightarrow x = \frac{1}{2} \sqrt{10 - x^3}$   
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{g_3(x)}$

(iv)  $x^3 + 4x^2 - 10 = 0 \Rightarrow x^2(x+4) = 10 \Rightarrow x^2 = \frac{10}{x+4} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{10}{x+4}}$   
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{g_4(x)}$

(v)  $x^3 + 4x^2 - 10 = 0 \Rightarrow -\frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x} = 0 \Rightarrow x = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$   
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{g_5(x)}$   
 "αυτοαίρεση" διαιρέσει



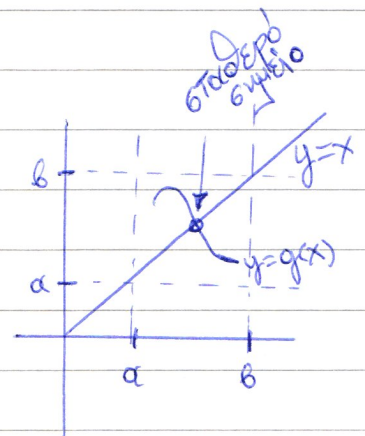
Σχηματική  
παράσταση  
μέθοδου.



Σύγκριση  
Θεωρήματα

Εάν ότι η  $g: [a, b] \rightarrow [a, b]$  συνεχής ή τ.ω.

$$L = \sup_{x \in (a, b)} |g'(x)| < 1$$



Τότε, η  $g$  έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο  $\ell$ . Ο αλγόριθμος που ορίζεται από τη σχέση:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

συγκλίνει στο (μοναδικό) σταθερό σημείο, για κάθε επιτρεψί  $x_0$  στο  $[a, b]$ . Ανάμεσα για το σφάλμα ισχύουν οι σχέσεις:

$$(i) \quad |x_n - \ell| \leq \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$$

$$(ii) \quad |x_n - \ell| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$$

Παρατήρηση

(α) Όταν μπάμε τον αριθμό των επαναλήψεων  $\swarrow$  ώστε το σφάλμα

να είναι κάτω από δοσμένο  $\varepsilon > 0$ , χρησιμοποιούμε τη σχέση:

$$\frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0| < \varepsilon \quad (\lambdaύνουμε ως προς k)$$

- (β) Είναι μέθοδος (που αν συγκρίνει) με βραδεία (συνήθως) σύγκριση. Η ταχύτητα σύγκρισης εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό, από το πόσο κοντά στη πραγματική ρίζα  $p$  είναι το  $x_0$  που επιλέγουμε (αλλά κ' από την μορφή της  $g(x)$ ).
- (γ) Κριτήριο διακοπής  
Ο αλγόριθμος σταματά, για δοσμένα προσέγγιση  $\varepsilon$ , όταν  
 $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ .

### Παράδειγμα

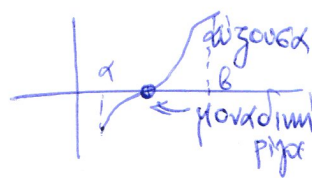
Δίνεται η εξίσωση  $f(x) = x - e^{-x} = 0$

- (α) Να δείξει ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μια μοναδική ρίζα στο διάστημα  $[0.3, 0.8]$
- (β) Να δείξει ότι η ανάρτηση  $y = g(x) = e^{-x}$  έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο στο διάστημα  $[0.3, 0.8]$ .
- (γ) Να δοθεί προσέγγιση της ρίζας του (α) με τη βοήθεια της μεθόδου του σταθερού σημείου κ' της  $g$  του (β).  
(κριτήριο διακοπής:  $\varepsilon = 10^{-3}$ )  $x_0 = 0.5$
- (δ) Σχολιάστε ότι ο αλγόριθμος του (γ) συγκρίνει  $\forall x_0 \in [0.3, 0.8]$
- (ε) Δώστε εκτιμήσεις της ρίζας του (α), με τη μέθοδο του σταθερού σημείου κ' με  $g$  του (β) για  
(i)  $x_0 = 0.55$  κ' (ii)  $x_0 = 0.75$
- Τι παρατηρείτε;

### Λύση

- (α)  $f(0.3) = -0.44$   
 $f(0.8) = 0.35$  }  $\Rightarrow f(0.3) \cdot f(0.8) < 0$  Άρα από το θεώρημα Bolzano, η  $f(x)$  έχει μια τουλάχιστον



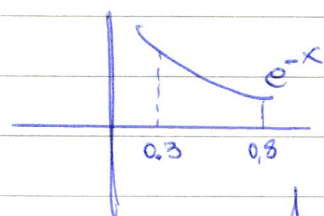


ρίζα στο  $[0.3, 0.8]$ .

Αλλά  $f'(x) = 1 + e^{-x} > 0 \quad \forall x \in [0.3, 0.8]$  δηλαδή η  $f(x)$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0.3, 0.8]$ , άρα έχει μοναδική ρίζα στο  $[0.3, 0.8]$ .

β) η  $g: [0.3, 0.8] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής  
 $g(x) = e^{-x}$

είναι τ.ω:  $g'(x) = -e^{-x} \Rightarrow |g'(x)| = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$



οπότε  $\sup_{x \in [0.3, 0.8]} |g'(x)| = g'(0.3) = e^{-0.3} \approx 0.74 = L < 1$

Ακόμα  $g'(x) = -\frac{1}{e^x} < 0$  δηλ. η  $g(x)$  φθίνουσα στο  $[0.3, 0.8]$   
 οπότε

$$g([0.3, 0.8]) = [g(0.8), g(0.3)] = [0.45, 0.74] \subseteq [0.3, 0.8]$$

δηλαδή  $g: [0.3, 0.8] \rightarrow [0.3, 0.8]$

Άρα, από το θεωρήμα συχνηότητας, η  $g$  έχει μοναδικό σταθερό σημείο, το οποίο βρίσκεται από:

τ.ω:  $x_{n+1} = g(x_n) \quad \forall x_0 \in [0.3, 0.8]$

(γ) Δίνεται στην επόμενη σελίδα

(δ) Δίνονται στην επόμενη σελίδα.

Προέχχισή ρίζας:  $x - e^{-x} = 0$  στο  $[0,1]$

152  
6

Μέθοδος σταθερού σημείου:  $g(x) = e^{-x}$

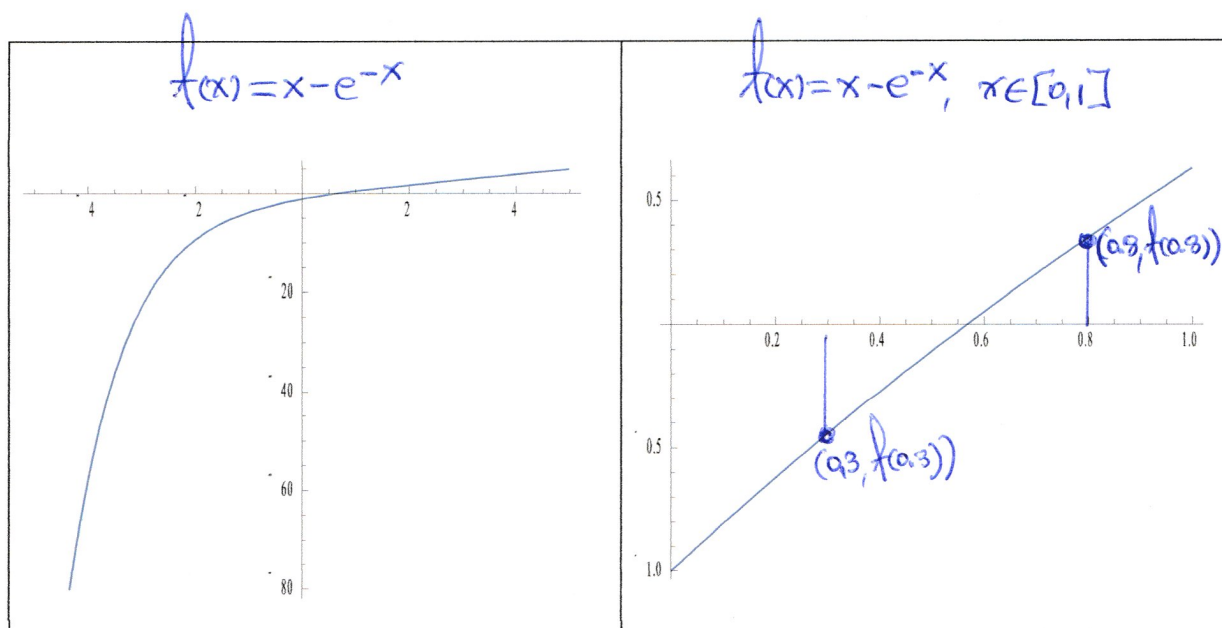
$$x_{n+1} = g(x_n)$$

| n  | $x$      | Σφάλμα   | $x$      | Σφάλμα   | $x$      | Σφάλμα   |
|----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0  | 0.5      |          | 0.55     |          | 0.75     |          |
| 1  | 0.606531 | 0.106531 | 0.57695  | 0.02695  | 0.472367 | -0.27763 |
| 2  | 0.545239 | -0.06129 | 0.561609 | -0.01534 | 0.623525 | 0.151158 |
| 3  | 0.579703 | 0.034464 | 0.570291 | 0.008682 | 0.536052 | -0.08747 |
| 4  | 0.560065 | -0.01964 | 0.565361 | -0.00493 | 0.585054 | 0.049002 |
| 5  | 0.571172 | 0.011108 | 0.568155 | 0.002794 | 0.557076 | -0.02798 |
| 6  | 0.564863 | -0.00631 | 0.56657  | -0.00159 | 0.572882 | 0.015806 |
| 7  | 0.568438 | 0.003575 | 0.567469 | 0.000899 | 0.563898 | -0.00898 |
| 8  | 0.566409 | -0.00203 |          |          | 0.568987 | 0.005089 |
| 9  | 0.56756  | 0.00115  |          |          | 0.566099 | -0.00289 |
| 10 | 0.566907 | -0.00065 |          |          | 0.567736 | 0.001637 |
| 11 |          |          |          |          | 0.566807 | -0.00093 |

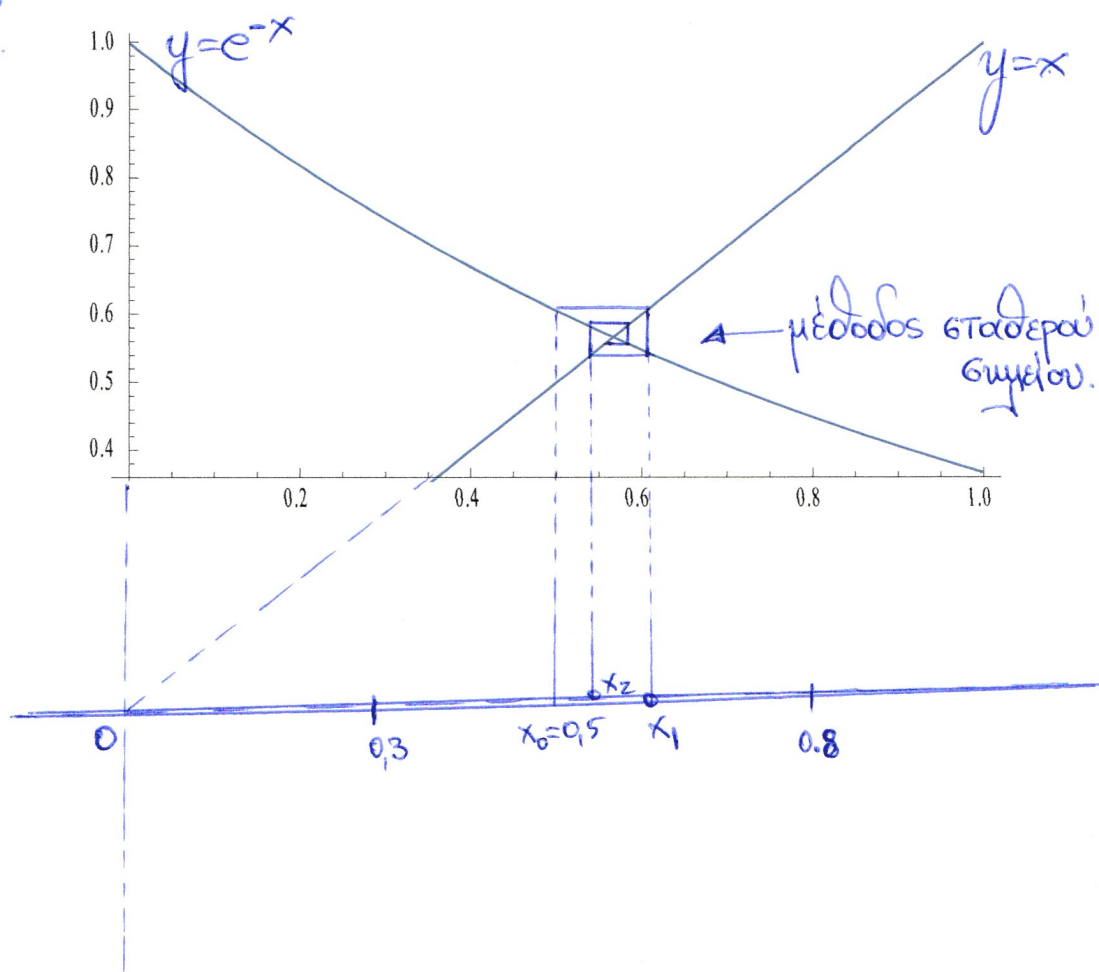
Παρατήρηση

Είναι φανερό ότι, όσο πιο κοντά είναι το αρχικό σημείο  $x_0$  στη ρίζα, τόσο ταχύτερη είναι η σύγκλιση της μεθόδου (λιγότερα βήματα).

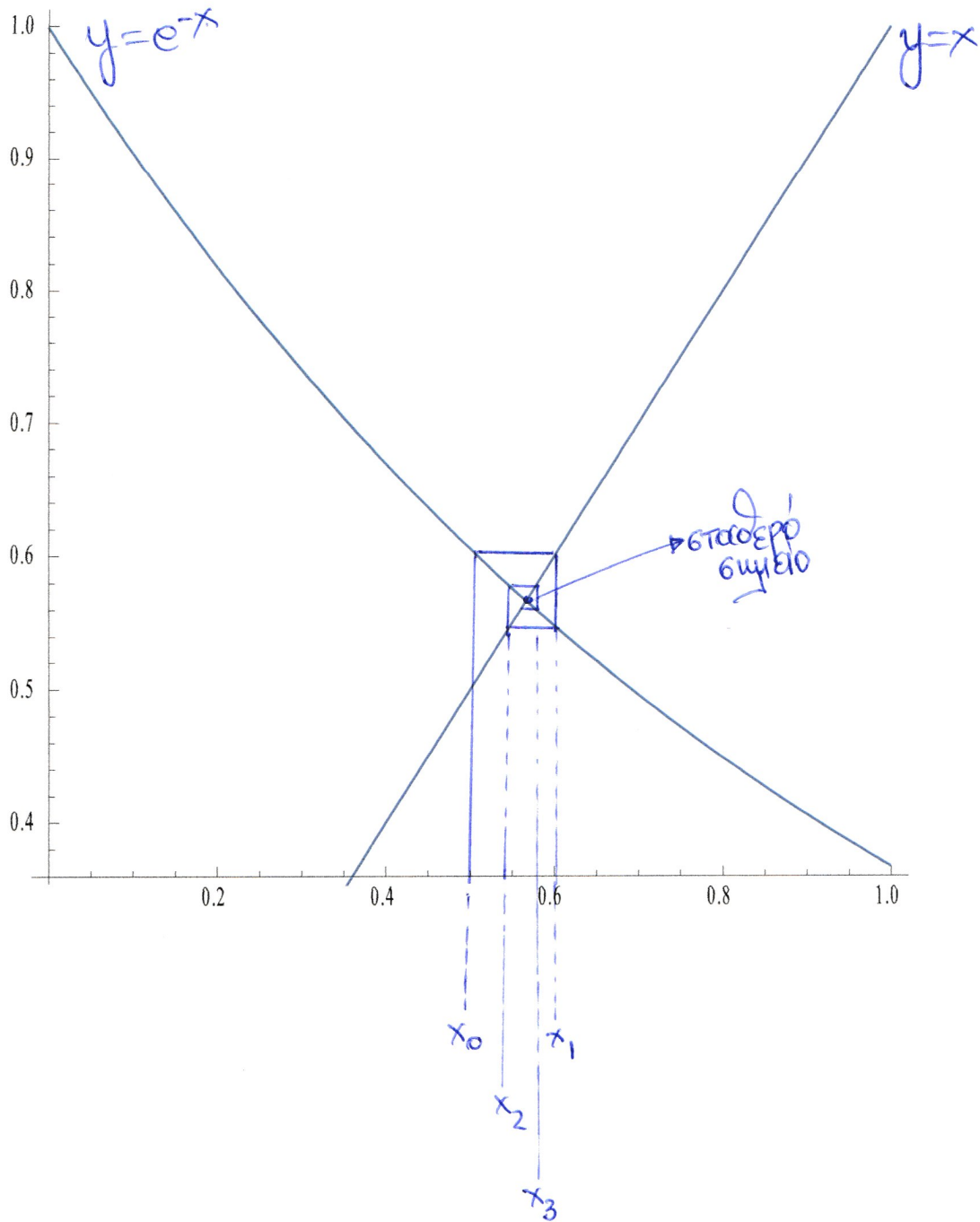




Μέθοδος  
σταθεράς  
συμμετοχής



πίτες  $f(x) = x - e^{-x} = 0$   $\frac{152}{8}$   
μέθοδος σταθερά σημείου.





$$f(x)=0 \Rightarrow \text{ρίζες } x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{matrix} \rightarrow 2 \\ \rightarrow -1 \end{matrix}$$

## Παράδειγμα

Δίνεται η εξίσωση  $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ .

(α) Εάν  $g_1(x) = \sqrt{x+2}$ , τότε ο αλγόριθμος συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο της  $g_1(x)$ .  
Χρησιμοποιώντας την  $g_1(x)$ , πως μπορούμε να εκτιμήσουμε τη ρίζα  $x=2$  της  $f(x)=0$ .

(β) Εάν  $g_2(x) = x^2 - 2$ , δείξτε ότι ο αλγόριθμος  $x_n = g_2(x_{n-1})$  με  $x_0 > 2$  αποκλίνει.  
Μπορούμε να εκτιμήσουμε την ρίζα  $x=2$  της  $f(x)=0$ , με τη βοήθεια της  $g_2(x)$ .

## Λύση

(β) Έστω  $x \in [1.5, 2.5]$ . Τότε η  $g_1|_{[1.5, 2.5]}$  συνεχής κ'.

$$g_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} > 0 \text{ δηλ. } g_1'(x) \Rightarrow \text{αύξουσα.}$$

άρα

$$g_1([1.5, 2.5]) = [g_1(1.5), g_1(2.5)] = [1.87, 2.42]$$

$$\text{δηλ. } g: [1.5, 2.5] \rightarrow [1.5, 2.5], \text{ συνεχής}$$

$$\forall x \in [1.5, 2.5] \quad g_1'(x) \leq g_1'(1.87) \approx 0.27 = L < 1.$$

Άρα ο αλγόριθμος συγκλίνει (από το θεωρήμα σύγκλισης) στο (μοναδικό) σταθερό σημείο της  $g_1(x)$ .

$$\text{Η } f(x) = x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = x + 2 \Rightarrow x = \underbrace{\sqrt{x+2}}_{g_1(x)}$$

δηλ. η εκτίμηση της ρίζας  $f(x)=0$  γίνεται με τη βοήθεια της  $g_1(x) = \sqrt{x+2}$  κ' της μεθόδου του σταθερού σημείου.

(6)  $\forall x_0 > 2$ , η  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  (με  $x_n = \overbrace{x_{n-1}^2 - 2}^{g_2(x_{n-1})}$ ) είναι αύξουσα  
ή επομένως αποκλίνει στο  $+\infty$ .

Πράγματι, με επαγωγή:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0^2 - 2 & \text{ε' } x_0 > 2 & \text{έστω } x_0 = 2 + \alpha \ (\alpha > 0) \\ \text{τότε} & & x_1 &= (2 + \alpha)^2 - 2 = 4 + 4\alpha + \alpha^2 - 2 \\ & & &= 2 + 4\alpha + \alpha^2 \\ & & &= (2 + \alpha) + 3\alpha + \alpha^2 \\ & & &= x_0 + (3\alpha + \alpha^2) > x_0 \end{aligned}$$

$$\text{δηλ. } x_1 > x_0$$

έστω  $x_{k+1} > x_k$ . (θα δείξουμε  $x_{k+2} > x_{k+1}$ )

$$\text{τότε } x_{k+1}^2 > x_k^2 \Rightarrow$$

$$\underbrace{x_{k+1}^2 - 2}_{x_{k+2}} > \underbrace{x_k^2 - 2}_{x_{k+1}}$$

$$\text{δηλ. } x_{k+2} > x_{k+1}$$

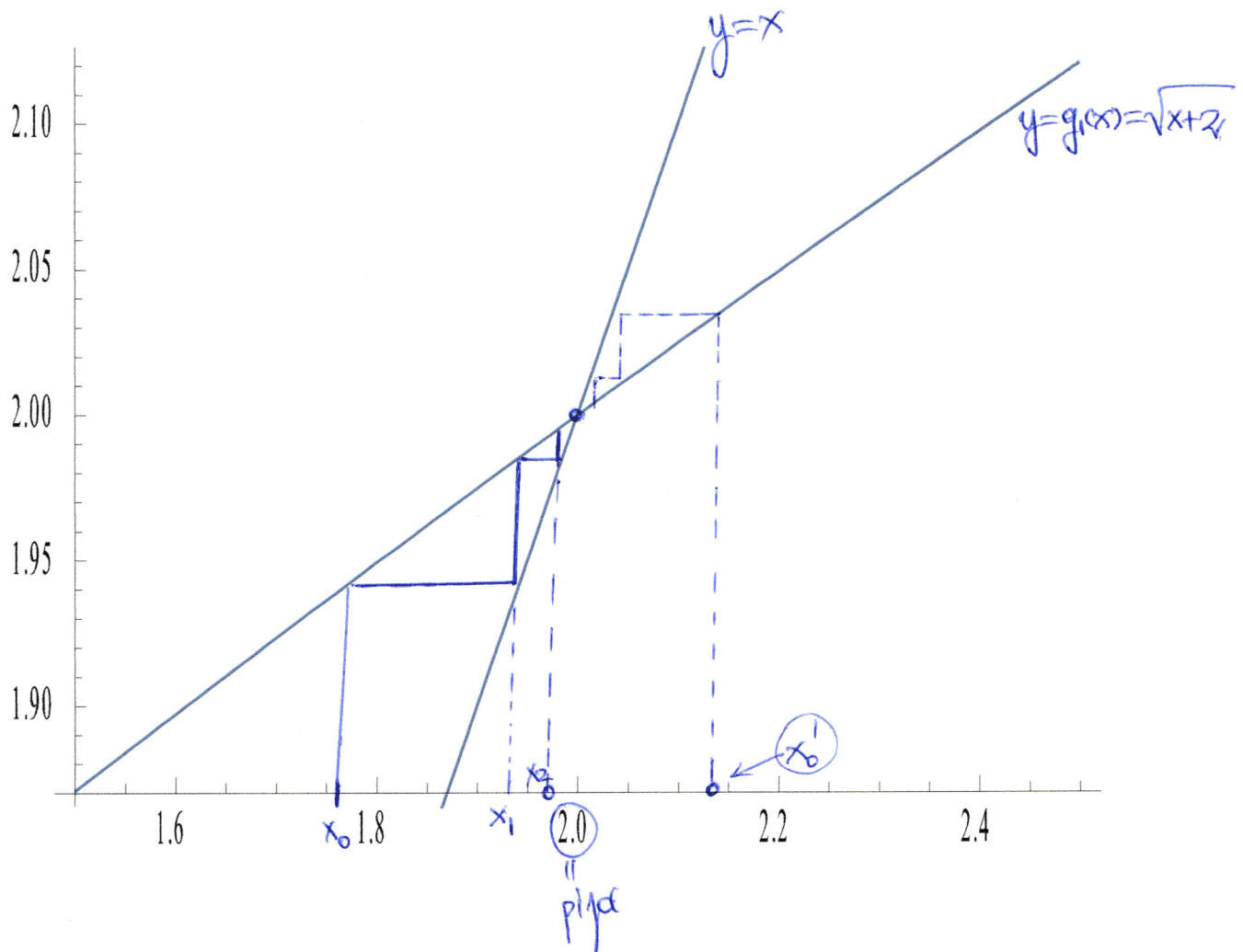
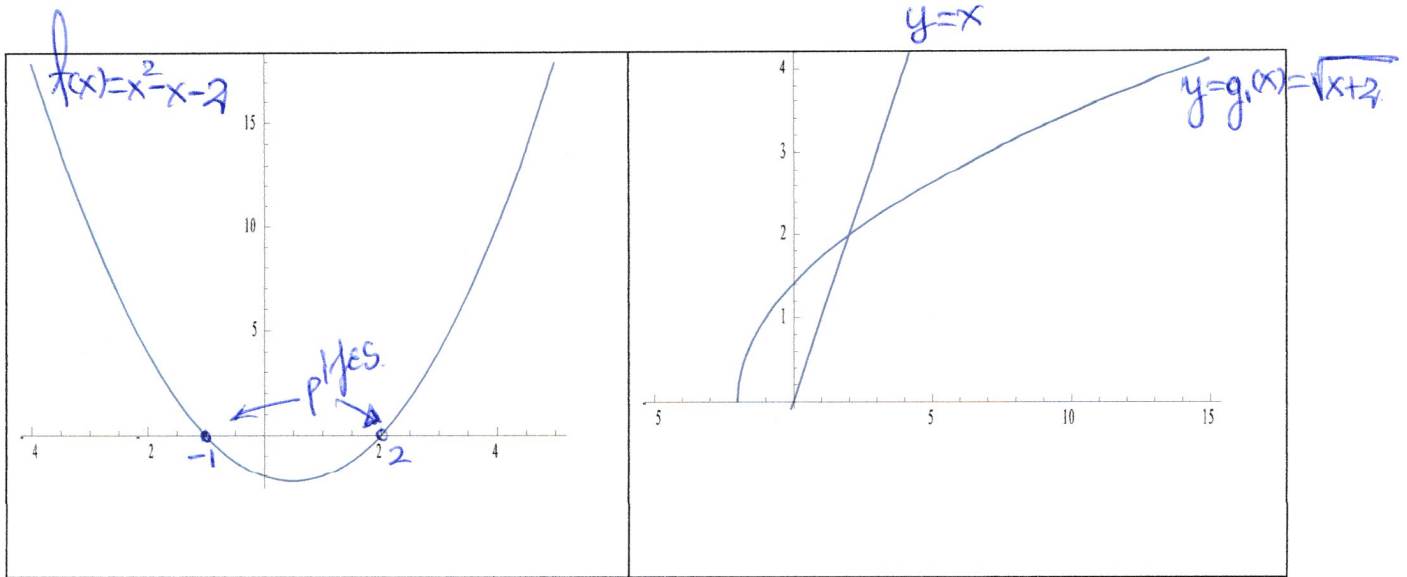
δηλ. η  $(x_k)_{k=0}^{\infty}$  αύξουσα  
ε'  $x_0 = 2$  } αποκλίνει.

Αν η  $f(x) = x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \underbrace{x^2 - 2}_{g_2(x)}$ , η  $g_2(x)$  δεν  
μπορεί να εκτιμήσει τι πηγαίνει  $x = 2$  της  $f(x) = 0$ , με τη  
βοήθεια της μεθόδου σταθερού σημείου, γιατί ο αλγόριθμος  
αποκλίνει.

#

$f(x) = x^2 - x - 2 = 0$  | μέθοδος σταθεράς ευθείας.

M52  
11

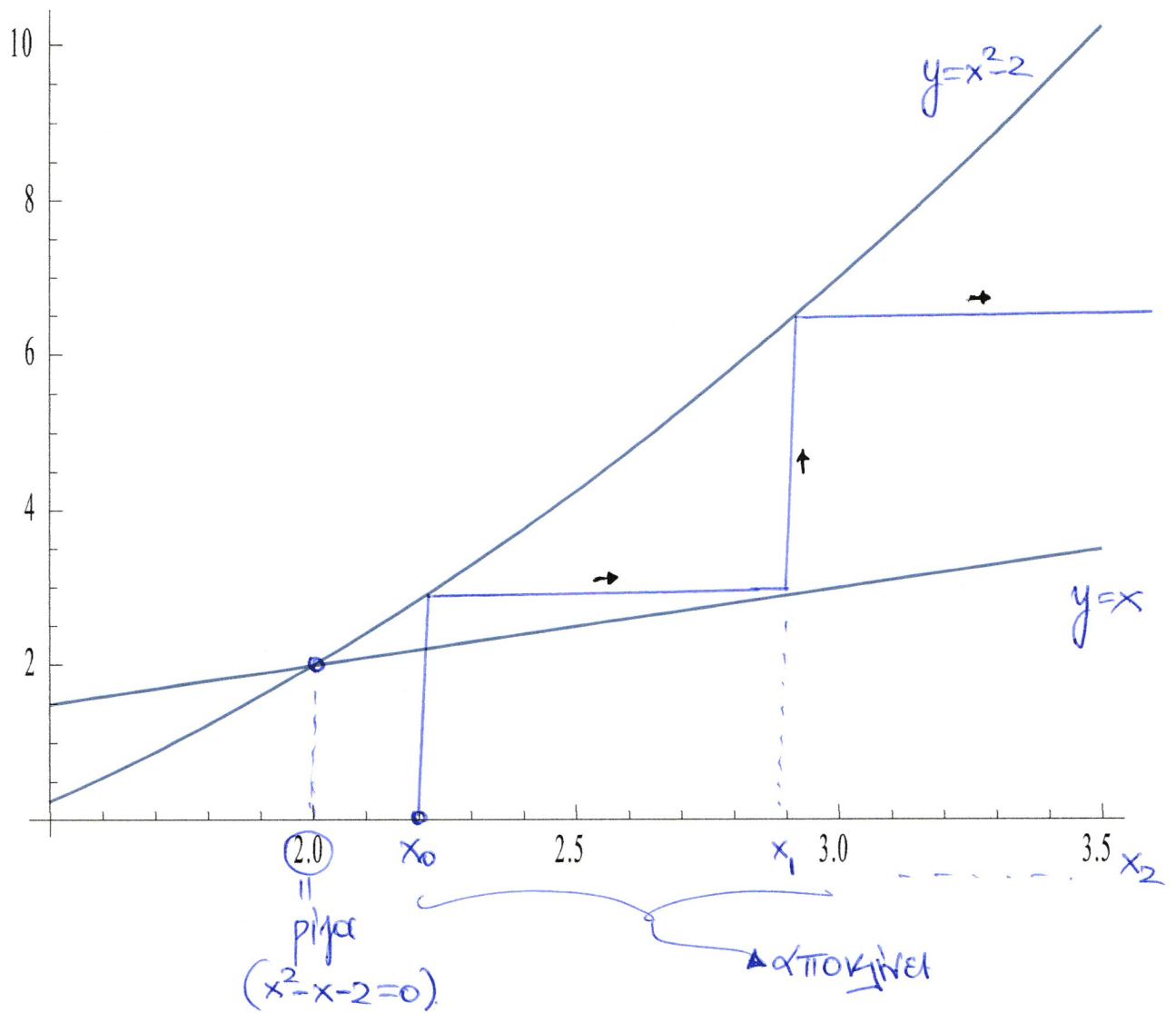
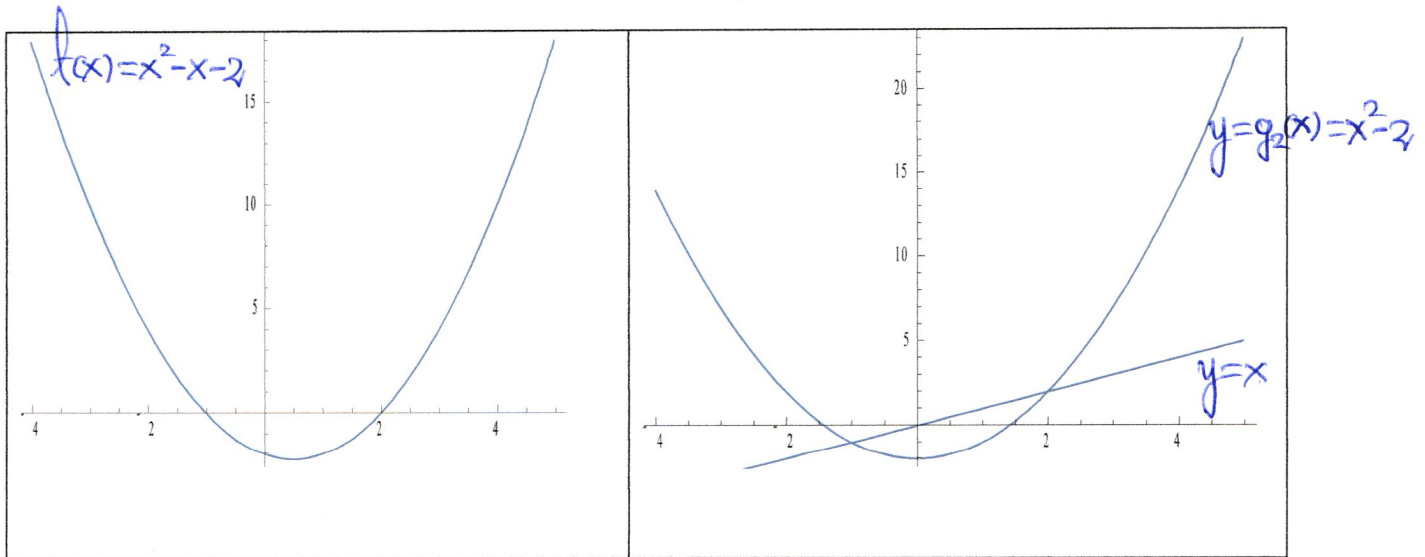


σύγκριση για  $x_0$   
(ή) για  $x_0'$



$$f(x) = x^2 - x - 2 = 0 / \text{μέθοδος σταθερού σημείου}$$

MSS  
12



## Παράδειγμα

Δίνεται η εξίσωση  $f(x) = e^x - 1 - 2x = 0$

(α) Να ελεγχθεί ότι έχει μοναδική ρίζα στο  $[1, 2]$

(β) Να ελεγχθεί αν συγκλίνουν οι παρακάτω επαναληπτικοί μέθοδοι:

$$(i) \quad x_n = g_1(x_{n-1}) = \frac{e^{x_{n-1}} - 1}{2} \quad (ii) \quad x_n = g_2(x_{n-1}) = \ln(1 + 2x_{n-1})$$

Λύση

$$(α) \quad \left. \begin{aligned} f(1) &= e^1 - 1 - 2 = 2.72 - 3 < 0 \\ f(2) &= e^2 - 1 - 2 \cdot 2 = 7.4 - 5 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{η } f(x) = e^x - 1 - 2x = 0 \text{ έχει μία ταυράχιστη ρίζα στο } [1, 2]$$

$$\text{Αλλά } f'(x) = e^x - 2 > 0 \text{ δηλαδή η } f(x) \text{ αύξουσα στο } [1, 2] \text{ (} e^x \approx 2.72 \text{)}$$

Επομένως, έχει μία ακριβώς ρίζα στο  $[1, 2]$

$$(β)(i) \quad g_1(x) = \frac{e^x - 1}{2} \Rightarrow \max_{x \in [1, 2]} |g_1'(x)| = \max_{x \in [1, 2]} \frac{e^x}{2} = \frac{e^2}{2} > 1$$

$g_1(x) = \frac{e^x - 1}{2}$  Ε' επομένως, το θεώρημα σύγκλισης (της μεθόδου σταθερού σημείου) δεν εγγυάται τη σύγκλιση της μεθόδου

$$(ii) \quad g_2(x) = \ln(1 + 2x) \Rightarrow g_2'(x) = \frac{2}{1 + 2x} > 0 \text{ δηλ. } g_2(x) \uparrow [1, 2].$$

$$g_2(1) = \ln 3 = 1.0986, \quad g_2(2) = \ln 5 = 1.6094 \text{ επομένως}$$

$$g_2([1, 2]) = [g_2(1), g_2(2)] = [1.0986, 1.6094] \subseteq [1, 2]$$

Ε'

$$\max_{x \in [1, 2]} |g_2'(x)| = \frac{1}{1 + 2 \cdot 1} = \frac{1}{3} < 1. \text{ Επομένως η μέθοδος συγκλίνει } \forall x_0 \in [1, 2]$$

επίλυση:  $f(x) = e^x - 1 - 2x = 0, [1, 2]$

1552  
14

$x = g_2(x), g_2(x) = \ln(1+2x)$

| n  | $x$      | Σφάλμα   | $x$      | Σφάλμα   | $x$      | Σφάλμα   |
|----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0  | 1.5      |          | 1.2      |          | 1        |          |
| 1  | 1.386294 | -0.11371 | 1.223775 | 0.023775 | 1.098612 | 0.098612 |
| 2  | 1.327761 | -0.05853 | 1.237664 | 0.013889 | 1.162283 | 0.063671 |
| 3  | 1.296239 | -0.03152 | 1.245689 | 0.008025 | 1.201339 | 0.039056 |
| 4  | 1.278842 | -0.0174  | 1.250296 | 0.004608 | 1.224563 | 0.023224 |
| 5  | 1.26911  | -0.00973 | 1.252932 | 0.002636 | 1.238121 | 0.013558 |
| 6  | 1.263624 | -0.00549 | 1.254437 | 0.001505 | 1.245952 | 0.007831 |
| 7  | 1.260518 | -0.00311 | 1.255295 | 0.000858 | 1.250447 | 0.004495 |
| 8  | 1.258755 | -0.00176 | 1.255784 | 0.000489 | 1.253018 | 0.002571 |
| 9  | 1.257753 | -0.001   | 1.256063 | 0.000279 | 1.254486 | 0.001468 |
| 10 | 1.257184 | -0.00057 | 1.256221 | 0.000159 | 1.255323 | 0.000837 |

(συγκρίση  $\forall x_0 \in [1, 2]$ )

$x = g_1(x), g_1(x) = \frac{e^x - 1}{2}$

| n  | $x$      | Σφάλμα   | $x$      | Σφάλμα   | $x$      | Σφάλμα   |
|----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0  | 1.5      |          | 1.2      |          | 1        |          |
| 1  | 1.740845 | 0.240845 | 1.160058 | -0.03994 | 0.859141 | -0.14086 |
| 2  | 2.351079 | 0.610234 | 1.09506  | -0.065   | 0.680566 | -0.17858 |
| 3  | 4.748442 | 2.397364 | 0.994681 | -0.10038 | 0.487497 | -0.19307 |
| 4  | 57.2022  | 52.45375 | 0.851931 | -0.14275 | 0.314118 | -0.17338 |
| 5  | 3.48E+24 | 3.48E+24 | 0.672084 | -0.17985 | 0.184526 | -0.12959 |
| 6  | #NUM!    | #NUM!    | 0.479157 | -0.19293 | 0.101324 | -0.0832  |
| 7  | #NUM!    | #NUM!    | 0.307356 | -0.1718  | 0.053318 | -0.04801 |
| 8  | #NUM!    | #NUM!    | 0.179913 | -0.12744 | 0.027382 | -0.02594 |
| 9  | #NUM!    | #NUM!    | 0.098556 | -0.08136 | 0.01388  | -0.0135  |
| 10 | #NUM!    | #NUM!    | 0.051788 | -0.04677 | 0.006989 | -0.00689 |

Απόκλιση της μεθόδου