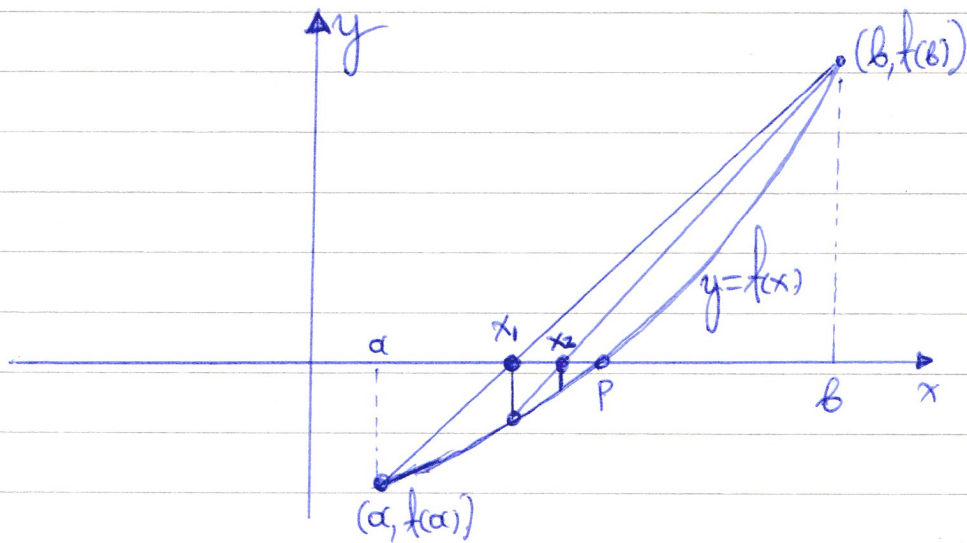


Μέθοδος εφαπμένης θέσης (false position ή regula falsi)

Παρατήρηση.

Ένα από τα μέγεθές της μεθόδου της διχοτόμου, είναι ότι σε κάθε επανάληψη αναζητούμε τη ρίζα ε' ένα διάστημα (a_k, b_k) , το μήκος του οποίου είναι το μισό του μήκους του διαστήματος της προηγούμενης επανάληψης (a_{k-1}, b_{k-1}) , a_j, b_j = άκρα διαστημάτων της j -επανάληψης). Δεν داریم ιδιαίτερη σημασία στις τιμές της συνάρτησης ε' άκρα $f(a_k), f(b_k)$. Εάν π.χ το $f(a_k)$ είναι κοντύτερα στο μηδέν (σε σχέση με το $f(b_k)$), η ρίζα θα είναι κοντύτερα στο a_k .

Μια ενδιαφέρουσα μέθοδος που εκμεταλλεύεται αυτή την παρατήρηση είναι να ενώσουμε τα σημεία $(a_k, f(a_k))$ ή $(b_k, f(b_k))$ με μια ευθεία. Η τομή της ευθείας με τον άξονα των x είναι μια (βελτιωμένη) εκτίμηση της ρίζας. Ονομάζεται εφαπμένης θέσης γιατί η αντίστοιχη σταθερή της καμπύλης από μια ευθεία δίνει μια "εφαπμένη θέση" της ρίζας.



Περιγραφή της μεθόδου.

- Επιλέγουμε (όπως πριν) ένα διάστημα $[a, b]$ το οποίο περιέχει την (πραγματική) αναζητούμενη ρίζα r . (Θα πρέπει $f(a) \cdot f(b) < 0$)
- Σχηματίζουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(a, f(a))$

και $(b, f(b))$, η οποία έχει εξίσωση:

$$\frac{y - f(b)}{x - b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\text{ή } \frac{y - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Το σημείο τμήσης x_1 της ευθείας αυτής με τον άξονα των Ox προκύπτει από (αυτή) την εξίσωση με $x = x_1$ ή $y = 0$, οπότε

$$\frac{0 - f(b)}{x_1 - b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\frac{0 - f(a)}{x_1 - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\text{ή } x_1 = b - f(b) \frac{b - a}{f(b) - f(a)}$$

$$\text{ή } x_1 = a - f(a) \frac{b - a}{f(b) - f(a)}$$

(γ) Εάν $f(a)f(x_1) < 0$ η ρίζα περιέχεται στο διάστημα $[a, x_1]$, ενώ εάν $f(x_1)f(b) < 0$ η ρίζα περιέχεται στο διάστημα $[x_1, b]$. Έστω ότι η ρίζα περιέχεται στο $[x_1, b]$. Θεωρούμε την ευθεία που ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ ή $(b, f(b))$. Το σημείο τμήσης x_2 της ευθείας αυτής με τον άξονα των Ox είναι η νέα εκτίμηση της ρίζας. Το x_2 δίνεται από τη σχέση:

$$x_2 = x_1 - f(x_1) \frac{f(b) - f(x_1)}{b - x_1}$$

$$\left(\text{ή } x_2 = b - f(b) \frac{f(b) - f(x_1)}{b - x_1} \right)$$

(δ) Η διαδικασία συνεχίζεται αναλόγως (μέχρι να υπολογιστεί η ρίζα με την επιθυμητή ακρίβεια).

Παρατήρηση

Εάν $(x_l, f(x_l))$ ή $(x_u, f(x_u))$ είναι το αριστερό ή δεξιό άκρο του διαστήματος (στην κ επανάληψη) που περιέχει τη ρίζα ή x_l εκτίμηση της ρίζας (τομή της ευθείας που περνά από τα σημεία $(x_l, f(x_l))$ ή $(x_u, f(x_u))$ με τον άξονα Ox), τότε:

$$x_0 = x_u - f(x_u) \frac{f(x_u) - x_l}{f(x_u) - f(x_l)}$$

$$\left(x_0 = x_l - f(x_l) \frac{x_u - x_l}{f(x_u) - f(x_l)} \right)$$

Σύγκριση

Η μέθοδος συγκρίνει πάντα στην πραγματική ρίζα ή τις περισσότερες φορές γρηγορότερα από τη μέθοδο της διχοτόμησης. Η ταχύτητα σύγκρισης εξαρτάται σημαντικά από την επιλογή του αρχικού διαστήματος $[a, b]$. Αν τα σημεία a, b είναι "αρκετά κοντά" στη ρίζα p , τότε η ταχύτητα είναι μεγαλύτερη.

Κριτήριο διακοπής

Εδώ δεν μπορούμε να υπολογίσουμε (όπως πριν) τον αριθμό των διψύπων που απαιτούνται για τον προσδιορισμό της ρίζας με απαιτούμενη ακρίβεια. Όταν καθορίζεται η προέχουσα ϵ του υπολογισμού, χρησιμοποιούμε συνήδως το:

$$|f(x)| < \epsilon$$

Παρατήρηση

- (1) Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(x_l, f(x_l)), (x_u, f(x_u))$ δίνεται από τη σχέση:

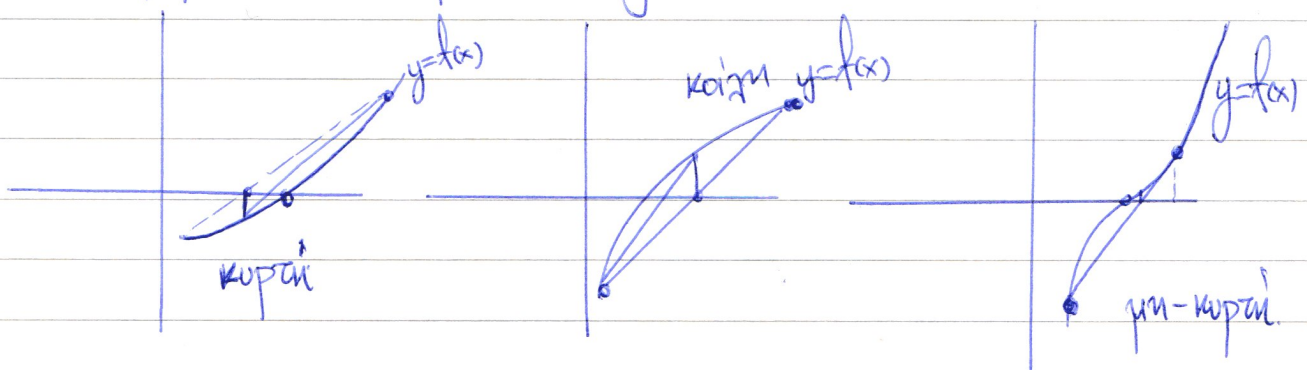
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_l & f(x_l) & 1 \\ x_u & f(x_u) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Για τις προεχούσες x_0 της ρίζας έχουμε $y=0$, οπότε η προέχουσα της ρίζας δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{vmatrix} x_0 & 0 & 1 \\ x_e & f(x_e) & 1 \\ x_u & f(x_u) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(2)(α) η ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου της εφαπμένης θέσης είναι μεγαλύτερη (εν γένει) από τη μέθοδο της διχοτόμησης, γιατί λαμβάνει υπόψη ή το μέγεθος των τιμών της συνάρτησης $f(x_e)$, $f(x_u)$ ή όχι μόνον τα πρόσημά τους.

(β) Η ταχύτητα σύγκλισης εξαρτάται από την κλίση των διαδοχικών χορών που σχηματίζονται ή αυτές με τη σειρά τους εξαρτώνται από τη μορφή της καμπύλης $y=f(x)$.



Παράδειγμα (συνέχεια)

Δίνεται η εξίσωση $x^3 - 6x^2 + 4 = 0$

(α) Να δείχθει ότι έχει ρίζα στο διάστημα $[0, 1]$.

(β) Να βρεθεί η ρίζα (προσέγγιση) με τη μέθοδο της εφαπτόμενης θέσης ή με ακρίβεια (προσέγγισης) 10^{-3} .

Λύση

(α) $\left. \begin{array}{l} f(0) = 4 \\ f(1) = 1 - 6 + 4 = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0$ άρα, από θ. Bolzano, η $f(x) = 0$ έχει μια ρίζα στο $[0, 1]$

(β) Για τις προσεγγίσεις της ρίζας θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$x_0 = x_u - f(x_u) \frac{x_u - x_l}{f(x_u) - f(x_l)}$$

x_u = δεξιό άκρο
 x_l = αριστερό άκρο διαστήματος

1^η επανάληψη

$$\begin{array}{l} x_u = 1 \quad f(x_u) = f(1) = -1 \\ x_l = 0 \quad f(x_l) = f(0) = 4 \end{array} \quad \text{άρα}$$

$$x_1 = 1 - (-1) \frac{1 - 0}{-1 - 4} = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$\& \left. \begin{array}{l} f(x_1) = f(0.8) = 0.672 \\ f(1) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ρίζα βρίσκεται στο διάστημα } [0.8, 1]$$

2^η επανάληψη

$$\begin{array}{l} x_u = 1 \quad f(x_u) = -1 \\ x_l = 0.8 \quad f(x_l) = f(0.8) = 0.672 \end{array}$$

$$x_2 = 1 - (-1) \frac{1 - 0.8}{-1 - 0.672} \approx 0.880383 \quad f(0.880383) = 0.0319$$

$$\Sigma \text{φάλμα} = |0.8 - 0.880383| = 0.08038 > 0.001$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0.880383) = 0.0319 \\ f(1) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ρίζα στο } [0.880383, 1]$$

3^η επανάληψη

$$x_u = 1 \quad f(x_u) = -1$$

$$x_l = 0.880383, \quad f(x_l) = 0.0319$$

$$x_3 = 1 - (-1) \frac{1 - 0.880383}{-1 - 0.0319} \approx 0.884082$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0.884082) = 0.001387 \\ f(1) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

πίνα 6 το

$$[0.884082, 1]$$

$$\text{σφάλμα} = |0.880383 - 0.884082| = 0.00369 > 0.001$$

4^η επανάληψη

$$x_u = 1 \quad f(x_u) = -1$$

$$x_l = 0.884082, \quad f(x_l) \approx 0.001387$$

$$x_4 = 1 - (-1) \frac{1 - 0.884082}{-1 - 0.001387} \approx 0.884243$$

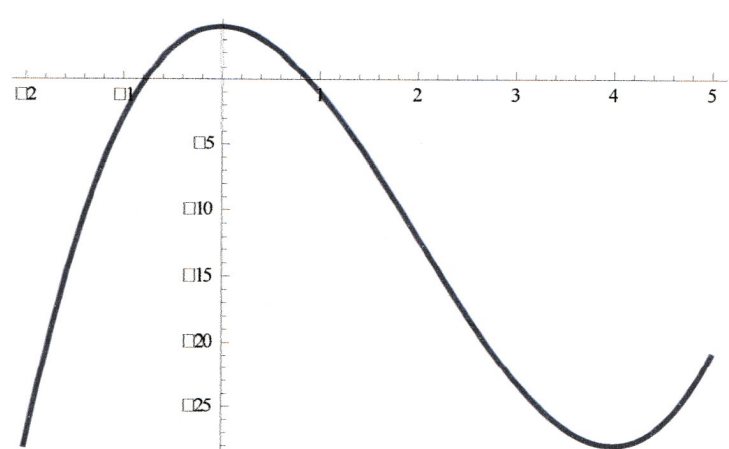
$$\text{Σφάλμα} = |0.884082 - 0.884243| = 0.00016 < 0.001$$

Άρα προσέγγιση πινος

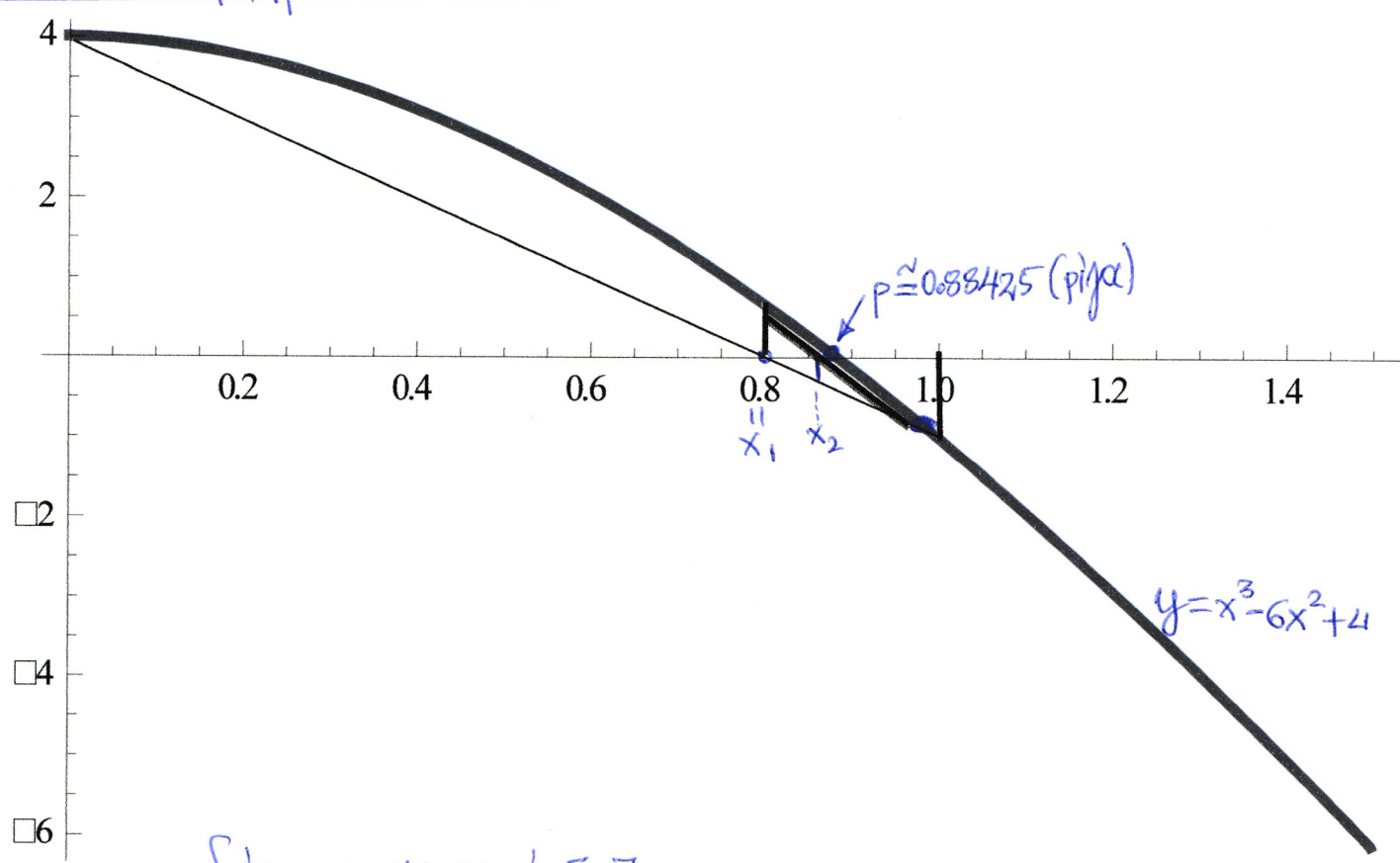
$$\underline{\underline{x_4 = 0.884243}}$$

(βείτε συνέχεια $\rightarrow$)

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$$



Μέθοδος εφαπτόμενης



Διάστημα εντοπισμού [0,1]

επαναλήψεις	αριστερό άκρο	δεξί άκρο	προσέγγιση ρίζας	τιμή	απόλυτο σφάλμα	σχετικό σφάλμα
n	x_l	x_u	x_r	f(x_r)	x_k - x_{(k-1)}	x_k - x_{(k-1)} /x_k
1	0	1	0,8	0,672		
2	0,8	1	0,88038278	0,031918666	0,080382775	0,091304348
3	0,880383	1	0,88408271	0,001387593	0,003699935	0,004185056
4	0,884083	1	0,88424335	5,99835E-05	0,000160636	0,000181665

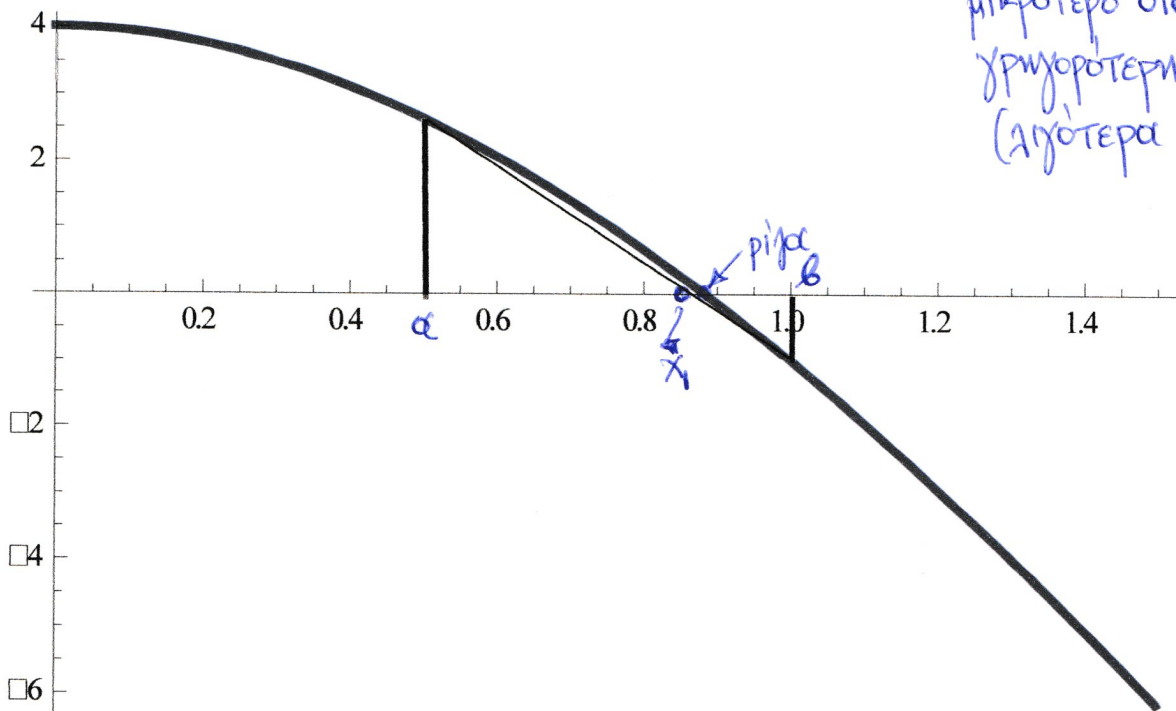
προσέγγιση
ρίζας

$f(x_4) \approx 0$

σφάλμα $< 10^{-3}$

Διάστημα εντοπισμού: $[0,5, 1]$:

μικρότερο διάστημα,
χρησιότερη σύγκριση
(λιγότερα βήματα)



Ε.Θ

Διάστημα εντοπισμού: $[0,5, 1]$

επαναλήψεις	αριστερό άκρο	δεξί άκρο	προσέγγιση ρίζας	τιμή	απόλυτο σφάλμα	σχετικό σφάλμα
n	x_l	x_u	x_r	$f(x_r)$	$ x_k - x_{(k-1)} $	$ x_k - x_{(k-1)} /x_k$
1	0,5	1	0,86206897	0,181680266		
2	0,862069	1	0,8832755	0,008056309	0,021206539	0,024008975
3	0,883276	1	0,88420838	0,000348988	0,000932875	0,001055039

ρίζες της $x^3 - 6x^2 + 4 = 0$: $x \approx -0.76873...$, $x \approx 0.88425...$, $x \approx 5.88448...$

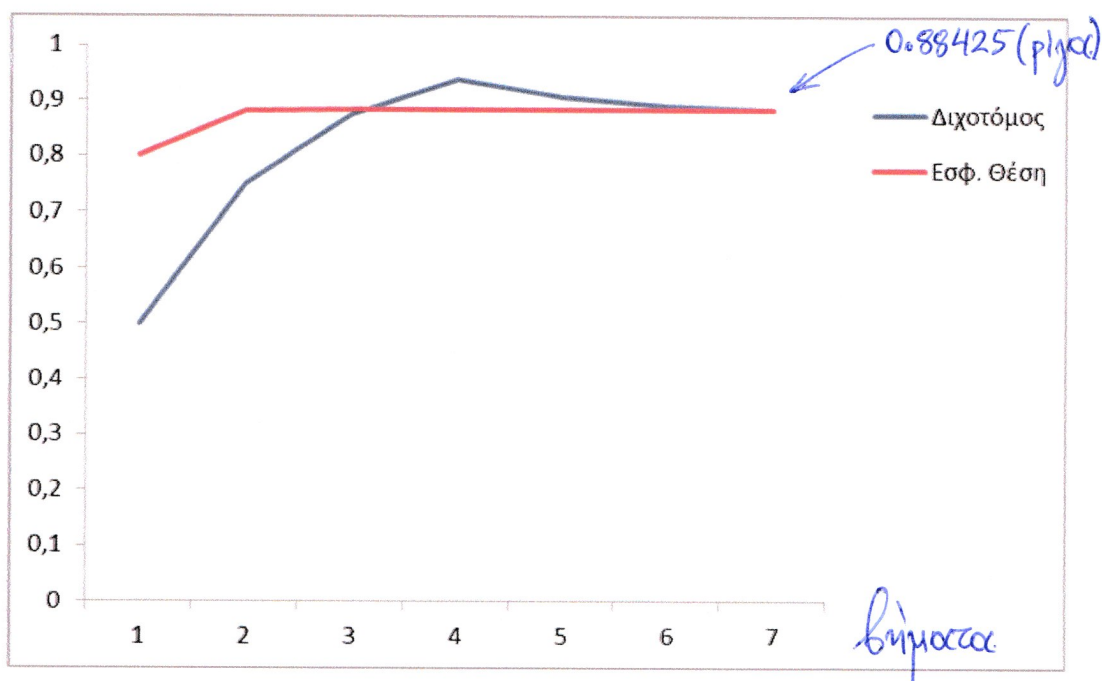
↑
"ακριβής" ρίζα

Μ. Διχοτόμου (σφάλματα εντοπισμού ϵ_0, ϵ_1)

$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$$

επαναλήψεις	αριστερό άκρο	δεξιό άκρο	μέσο	τιμή	απόλυτο σφάλμα	σχετικό σφάλμα
n	a	b	x_n	$f(x_n)$	$ x_n - x_{n-1} $	$ x_n - x_{n-1} /x_n$
1	0	1	0,5	2,625		
2	0,5	1	0,75	1,046875	0,25	0,333333333
3	0,75	1	0,875	0,076172	0,125	0,142857143
4	0,875	1	0,9375	-0,44946	0,0625	0,066666667
5	0,875	0,9375	0,90625	-0,18344	0,03125	0,034482759
6	0,875	0,90625	0,890625	-0,05282	0,015625	0,01754386
7	0,875	0,890625	0,882813	0,011879	0,0078125	0,008849558

Σύγκριση: Μ. Διχοτόμου κ' Μ. Εφαγμένης Θέσης



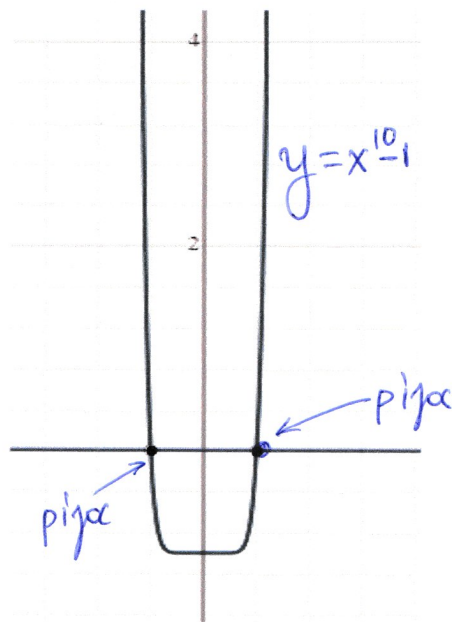
Ποιοτική

Η μέθοδος εφαγμένης θέσης συγκρίνει (αν γένει) ταχύτερα (από τη μέθοδο της διχοτόμου).

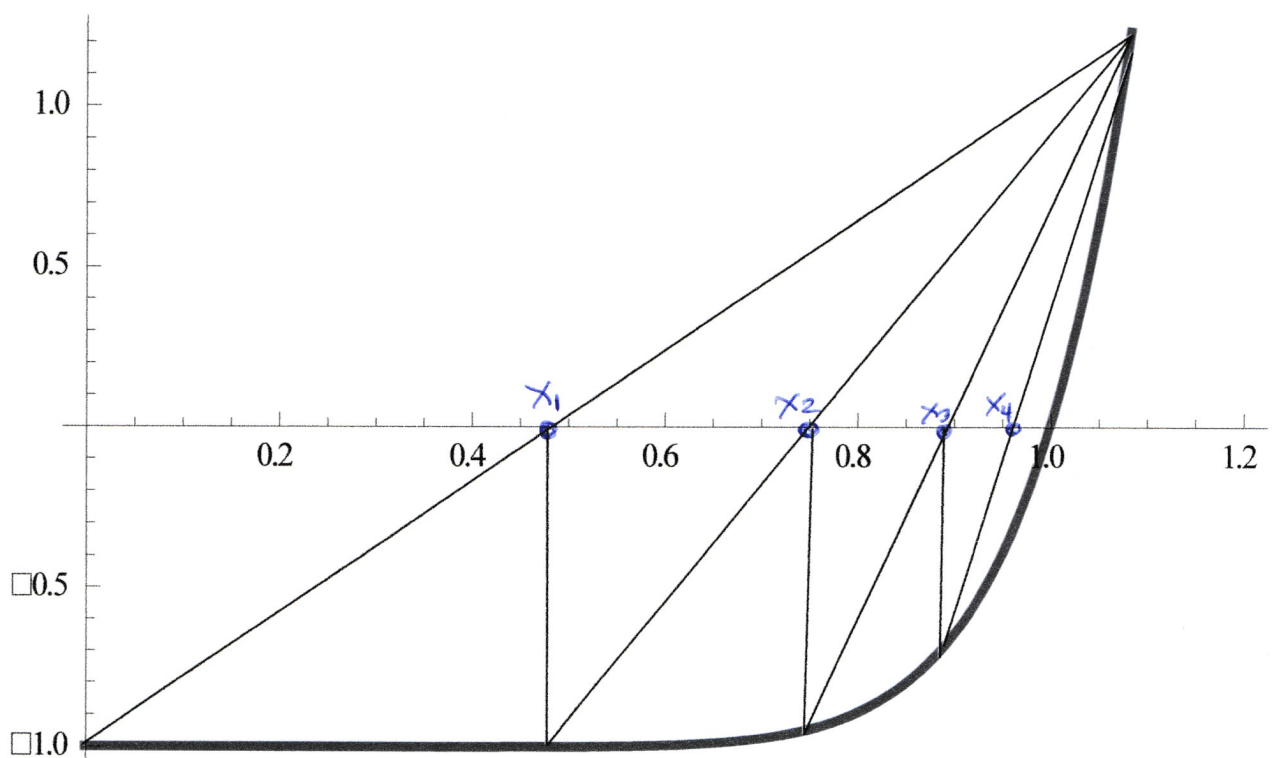
Παράδειγμα: $f(x) = x^{10} - 1$

$$(x^{10} - 1 = 0 : \text{ρίζες } x = 1, x = -1)$$

ΕΘ
10



$$x^{10} - 1 = 0 : x = 1, x = -1$$



Παρατήρηση: η μέθοδος εφαρμόζοντας θέσεις συγκλίνει στη ρίζα $p=1$ αρκετά αργά (η $y = x^{10} - 1$, είναι για μεγάλο διάστημα "εξαιρετικά ευθεία" / μικρή καμπυλότητα)

$$x^{10} - 1 = 0$$

11

Μέθοδος εφαπτόμενης

επαναλήψεις	αριστερό άκρο	δεξί άκρο	προσέγγιση ρίζας	τιμή	απόλυτο σφάλμα	σχετικό σφάλμα
n	x_l	x_u	x_r	$f(x_r)$	$ x_k - x_{(k-1)} $	$ x_k - x_{(k-1)} /x_k$
1	0	1,2	0,193806699	-0,9999999		
2	0,193807	1,2	0,356312525	-0,999967	0,162506	0,456
3	0,356313	1,2	0,492568994	-0,9991592	0,136256	0,277
4	0,492569	1,2	0,606742494	-0,9932385	0,114174	0,188
5	0,606742	1,2	0,70201308	-0,9709295	0,095271	0,136
6	0,702013	1,2	0,780471041	-0,9161375	0,078458	0,101
7	0,780471	1,2	0,84339739	-0,8178947	0,062926	0,075
8	0,843397	1,2	0,891930051	-0,6813544	0,048533	0,054
9	0,89193	1,2	0,927670143	-0,5280067	0,03574	0,039
10	0,92767	1,2	0,952809734	-0,3833172	0,02514	0,026
11	0,95281	1,2	0,969805494	-0,2640532	0,016996	0,018
12	0,969805	1,2	0,980946614	-0,1750004	0,011141	0,011
13	0,980947	1,2	0,988089583	-0,1129191	0,007143	0,007
14	0,98809	1,2	0,992600478	-0,0715793	0,004511	0,005
15	0,9926	1,2	0,995421042	-0,0448575	0,002821	0,003
16	0,995421	1,2	0,997173498	-0,0279082	0,001752	0,002
17	0,997173	1,2	0,998257963	-0,0172844	0,001084	0,001
18	0,998258	1,2	0,998927379	-0,0106746	0,000669	0,001

βήματα

εγκρίνεται
ρίζα
 $p=1$

$x_{(k)} \rightarrow 0$

σφάλμα

dixotomos

Μέθοδος διχοτόμου

επαναλήψεις	αριστερό άκρο	δεξί άκρο	μέσο	τιμή	απόλυτο σφάλμα	σχετικό σφάλμα
n	x_l	x_u	x_r	$f(x_r)$	$ x_k - x_{(k-1)} $	$ x_k - x_{(k-1)} /x_k$
1	0	1,3	0,65	-0,986537257		
2	0,65	1,3	0,975	-0,223670379	0,325	0,333
3	0,975	1,3	1,1375	2,626720217	0,1625	0,143
4	0,975	1,1375	1,05625	0,728491386	0,08125	0,077
5	0,975	1,05625	1,015625	0,167706847	0,040625	0,040
6	0,975	1,015625	0,9953125	-0,045898489	0,0203125	0,020
7	0,9953125	1,015625	1,00546875	0,056053141	0,01015625	0,010
8	0,9953125	1,005469	1,00039063	0,003913124	0,005078125	0,005
9	0,9953125	1,000391	0,99785156	-0,02127785	0,002539063	0,003
10	0,997851563	1,000391	0,99912109	-0,008754382	0,001269531	0,001
11	0,999121094	1,000391	0,99975586	-0,002438726	0,000634766	0,001

βήματα

εγκρίνεται

σφάλμα

Παρατήρηση: εδώ η μέθοδος διχοτόμου συζητείται ταχύτερα