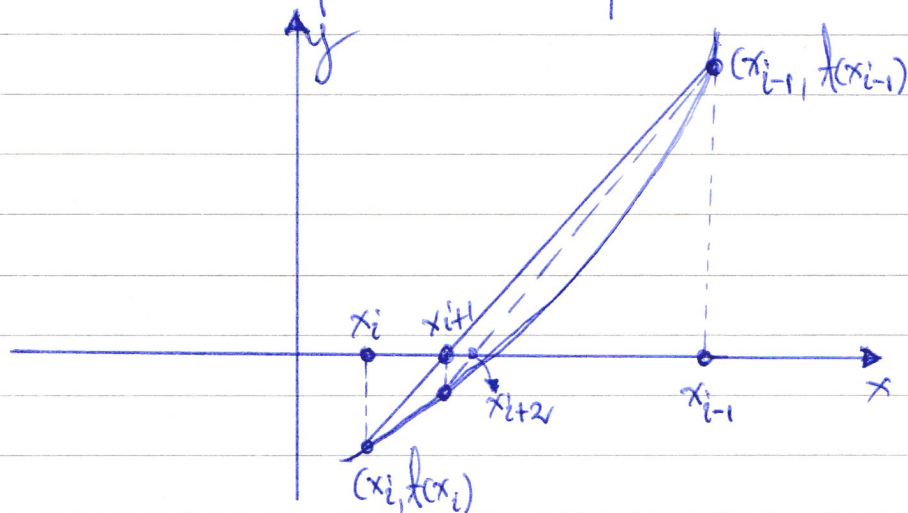


Μέθοδος της Τέμνουσας

Είδαμε ότι, όταν η μέθοδος Newton-Raphson συγκλίνει, συγκλίνει ταχύτερα από τις υπόλοιπες μεθόδους. Ένα από τα μειονεκτήματά της N-R είναι ότι απαιτεί τον υπολογισμό της $f'(x)$, εχχίρνια μερικές φορές δύσκολο ή και αδύνατο. Γιατί: (I) είναι δύσκολος ο υπολογισμός ενός αιώου για την παράγωγο ακόμα κ' αν δίνεται η $f(x)$ (περίπτωση που η $f(x)$ δεν δίνεται αναλυτικά). (II) Σε διάφορους επιστημονικούς κλάδους (π.χ. βιολογία), δεν υπάρχει συχνά (κλειστός) τύπος για την $f(x)$, γιατί η $f(x)$ είναι αποτέλεσμα προσομοίωσης ή πειραματικές μετρήσεις. Σε τέτοιες περιπτώσεις δίνει γύρη η μέθοδος της τέμνουσας που ακολουθεί.



Περιγραφή της μεθόδου.

Αρχικά εντοπίζουμε ένα διάστημα $[a, b]$ μέσα στο οποίο υπάρχει η ζητούμενη ρίζα r (π.χ. $f(a) \cdot f(b) < 0$). θεωρούμε δύο αρχικά σημεία x_0 κ' x_1 στο διάστημα. Η ευθεία που περνά από τα σημεία $(x_0, f(x_0))$ κ' $(x_1, f(x_1))$ έχει εξίσωση:

$$y - f(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_1).$$

Εάν x_2 είναι το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον άξονα Ox , τότε το x_2 δίνεται από τη σχέση:

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \cdot f(x_1)$$

(β) θεωρούμε τώρα τα σημεία x_1, x_2 κ' επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία με το (α).

(γ) επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία, προκύπτει ο αναδρομικός τύπος (της μεθόδου της τέμνουσας)

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot f(x_i) \quad i=1, 2, 3, \dots$$

Σύγκριση.

Η μέθοδος της τέμνουσας δεν συγκρίνει πάλους. Όταν συγκρίνει, συγκρίνει αρχότερα από τη μέθοδο N-R, αλλά ταχύτερα από τη μέθοδο της εφαπτόμενης θέσης.

Κριτήριο διακοπής

Στη μέθοδο της τέμνουσας, εάν δώσει μια προσέγγιση ε είναι πιθανό να ισχύει η σχέση:

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$$

χωρίς να εγγυάται την εύρεση της ρίζας. Για γύρι στο πρόβλημα είναι η ταυτόχρονη χρήση των σχέσεων:

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon \quad \vee \quad |x_k - x_{k-2}| < \varepsilon \quad \text{περιορίζει την ποσότητα του σφάλματος χωρίς να το μηδενίζει.}$$

Συνήθως χρησιμοποιείται το (φερεχύτερο) κριτήριο:

$$|f(x_k)| < \varepsilon.$$

Παρατήρηση

- (1) Η μέθοδος της τένυουσας μοιάζει (αλλά δεν είναι ίδια) με τη μέθοδο της εφαπμένης θέσης (ίσος αναδρομικός τύπος). Χρησιμοποιούν κ' οι δύο δύο αρχικές τιμές, κατασκευάζεται με τη βοήθειά τους μία ευθεία, η οποία της οποίας με τον άξονα Ox δίνει την επόμενη προσεγγιστική τιμή. Η διαφορά τους είναι βεβαιώς οι αρχικές τιμές αντικαθίστανται από νέες εκτιμήσεις. Στην εφαπμένη θέση, η τελευταία εκτίμηση αντικαθίσταται οριστικά από τις αρχικές τιμές παράγει τιμή της συνάρτησης με το ίδιο πρόσημο (οι δύο εκτιμήσεις περιλαμβάνουν τη ρίζα). Η μέθοδος της τένυουσας αντικαθιστά τις τιμές με συγκεκριμένο τρόπο: το x_{k+1} αντικαθιστά το x_k , το οποίο έχει αντικαταστήσει το x_{k-1} (οι τιμές μπορεί να βρίσκονται στην ίδια πλευρά της ρίζας).

Το πλεονέκτημα της μεθόδου της εφαπμένης θέσης (να περιλαμβάνει πάντα ε' ένα διάστημα τη ρίζα με τις προσεγγίσεις), γίνεται μειονέκτημα ως προς το ρυθμό σύγκλισης. Η αδυναμία βασίζεται στο ότι το ένα άκρο παραμένει σταθερό για να διατηρεί τον "κλωδικό" της ρίζας. Έτσι ενώ η μέθοδος συγκλίνει πάντα, συγκλίνει με αργότερο ρυθμό από αυτόν της τένυουσας.

- (2) Η μέθοδος της τένυουσας, μοιάζει κ' με την μέθοδο Newton-Raphson. Πράγματι, αντικαθιστούμε στην N-R το:

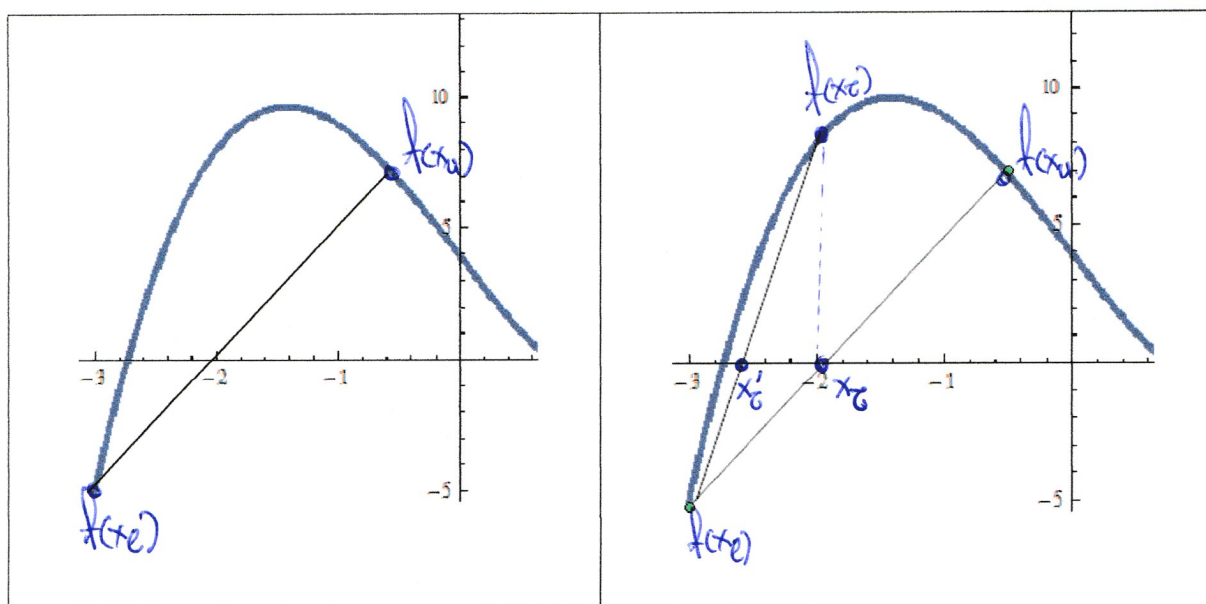
$$f(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{συμφωνεί με τον} \\ \text{ορίσμο της} \\ \text{παραγώγου} \end{array} \right\}$$

Στην μέθοδο N-R χρησιμοποιούμε την εφαπτομένη στο σημείο $(x_k, f(x_k))$, ενώ στην τένυουσα των ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, $(x_k, f(x_k))$ (των τεινόμενων τένυουσας). Όταν τα σημεία αυτά είναι πολύ κοντά, η

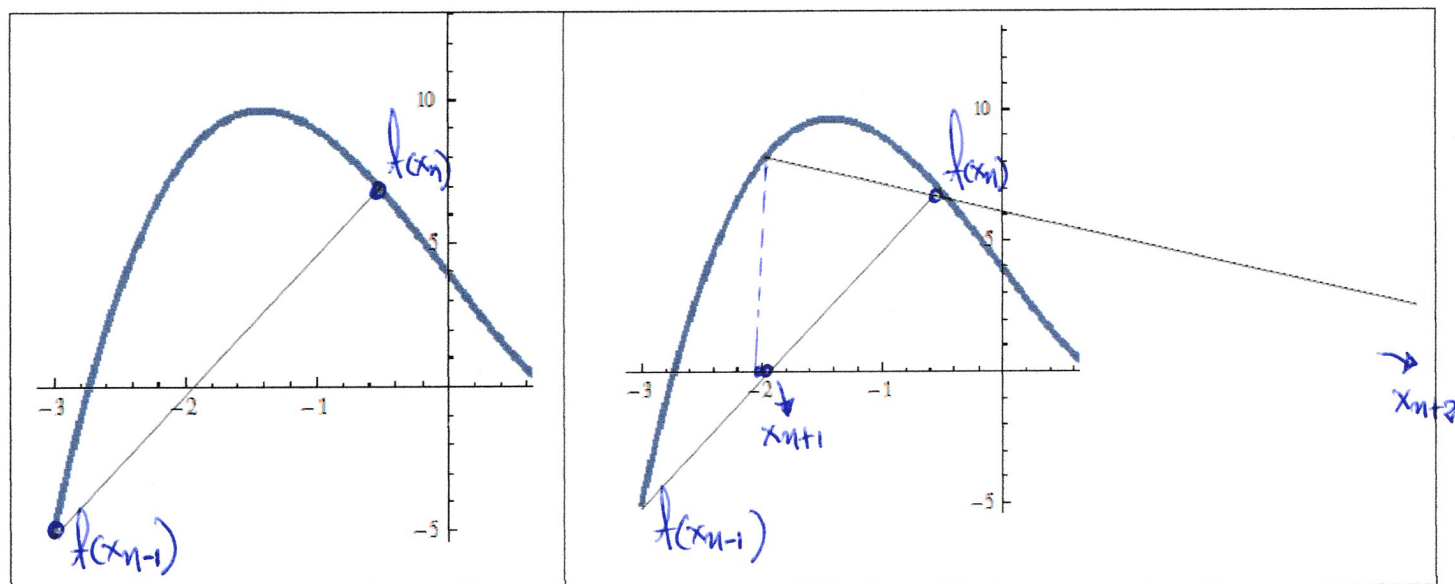
Τέμνουσα τείνει να γίνει εφαπτομένη (η μέθοδος της τέμνουσας, γίνεται αυτή των $N-R$).

Στη μέθοδο της τέμνουσας απαιτούνται περισσότερα βήματα (εν γένει) από αυτά της $N-R$. Είναι οικονομικότερη όπως (π.χ χρόνος) λόγω του ότι απαιτεί τον υπολογισμό μιας τιμής σε κάθε επανάληψη ($f(x_k)$) ή όχι από όπως στην $N-R$ ($f(x_k), f(x_k)$).

Μέθοδος Εφαπμένων Όλων



Μέθοδος Τέτραυγων



Παράδειγμα (συνέχεια)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x + 4$

- (α) Να δείξει ότι η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει μία ρίζα στο διάστημα $[0.5, 1]$
 (β) Αν $x_0 = 0.5$ κ' $x_1 = 1$, να βρεθεί μία εκτίμηση της ρίζας, με σχετικό σφάλμα 0.01
 (γ) Να επαναληφθεί η διαδικασία για: (i) $x_0 = 0$ κ' $x_1 = 1$
 (ii) $x_0 = 0.75$ κ' $x_1 = 1$

Λύση

(α) Έχουμε: $f(0.5) = 0.5^3 - 6 \times 0.5 + 4 = 1.125$
 $f(1) = 1 - 6 + 4 = -1$ $\Rightarrow f(0.5) \cdot f(1) < 0$ άρα από
 το Διόλεζο το διάστημα $[0.5, 1]$ περιέχει
 μία ρίζα.

(β) Έχουμε:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \cdot f(x_1) = 1 - \frac{1 - 0.5}{1 - 1.125} \cdot (-1) = \dots = 0.764705$$

Σχετικό σφάλμα: $\frac{|x_1 - x_2|}{|x_2|} = \frac{0.5 - 0.764705}{0.764705} \approx 0.307 > 0.01$

Στη συνέχεια:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \cdot f(x_2) = 0.764705 - \frac{0.764705 - 1}{0.764705 - 1.125} \cdot (-1) = \dots = 0.726066$$

Σχετικό σφάλμα: $\frac{|x_3 - x_2|}{|x_3|} = \frac{|0.726066 - 0.764705|}{0.726066} = 0.053 > 0.01$

Ακόμα

$$x_4 = x_3 - f(x_3) \cdot \frac{x_3 - x_2}{f(x_3) - f(x_2)} = 0.726066 - f(0.726066) \cdot$$

$$\cdot \frac{0.726066 - 0.764705}{f(0.726066) - f(0.764705)} = \dots = 0.732151$$

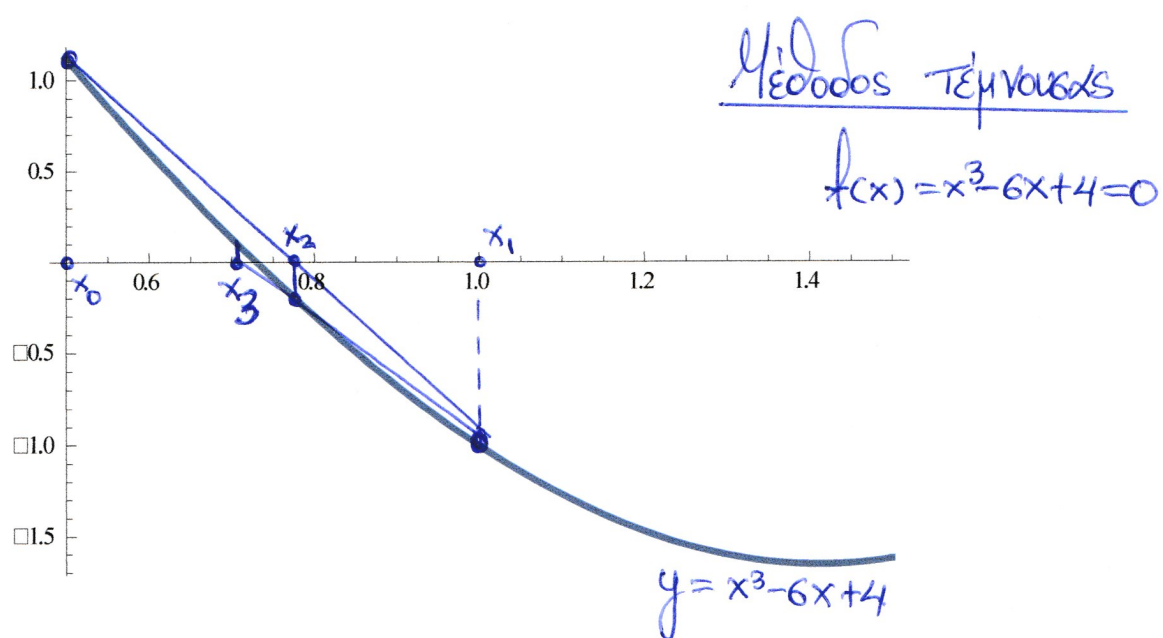
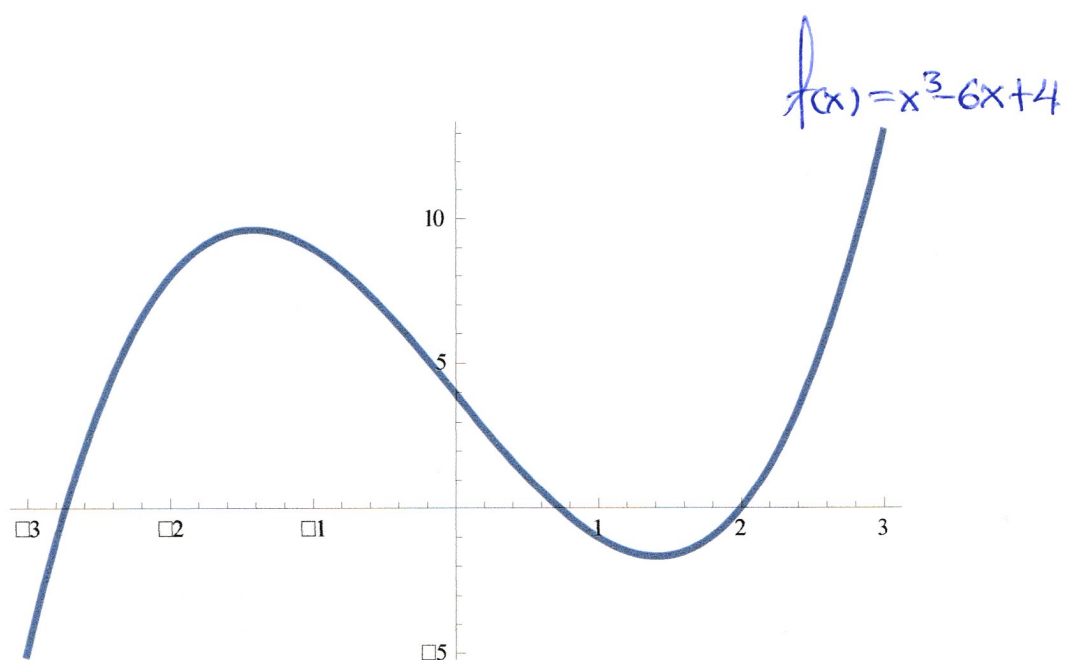
Σχετικό σφάλμα: $\frac{x_4 - x_3}{x_3} = \frac{0.732151 - 0.726066}{0.732151} \approx 0.008$

$$< 0.01$$

Άρα μία εκτίμηση της ρίζας είναι

$$\underline{\underline{x_4 = 0.732151}}$$

(γ) Τα αποτελέσματα των προσεγγίσεων, για τις δύο αυτές περιπτώσεις, φαίνονται στη βερίδα που ακολουθεί.



Μέθοδος Τεχνουργίας

1/9

Εξίσωση $x^3 - 6x + 4 = 0$

(I) $x_0 = 0.5, x_1 = 1$

επαναλήψεις	ΑΑ σημείου	εκτίμηση	τιμή	απόλυτο σφάλμα	σχετικό σφάλμα
n		x_l	$f(x_r)$	$ x_k - x_{(k-1)} $	$ x_k - x_{(k-1)} /x_k$
0	0	0,5	1,125		
0	1	1	-1	0,5	0,5
1	2	0,764705882	-0,14105	0,235294118	0,307692308
2	3	0,726066351	0,026364	0,038639532	0,053217632
3	4	0,732151063	-0,00044	0,006084713	0,008310734

(II) $x_0 = 0, x_1 = 1$

μεγαλύτερο
διαστήμα,
περισσότερα
βήματα

επαναλήψεις	ΑΑ σημείου	εκτίμηση	τιμή	απόλυτο σφάλμα	σχετικό σφάλμα
n		x_l	$f(x_r)$	$ x_k - x_{(k-1)} $	$ x_k - x_{(k-1)} /x_k$
0	0	0	4		
0	1	1	-1	1	1
1	2	0,8	-0,288	0,2	0,25
2	3	0,719101124	0,057245	0,080898876	0,1125
3	4	0,732514963	-0,00204	0,013413839	0,018312034
4	5	0,732053777	-1,3E-05	0,000461185	0,000629988

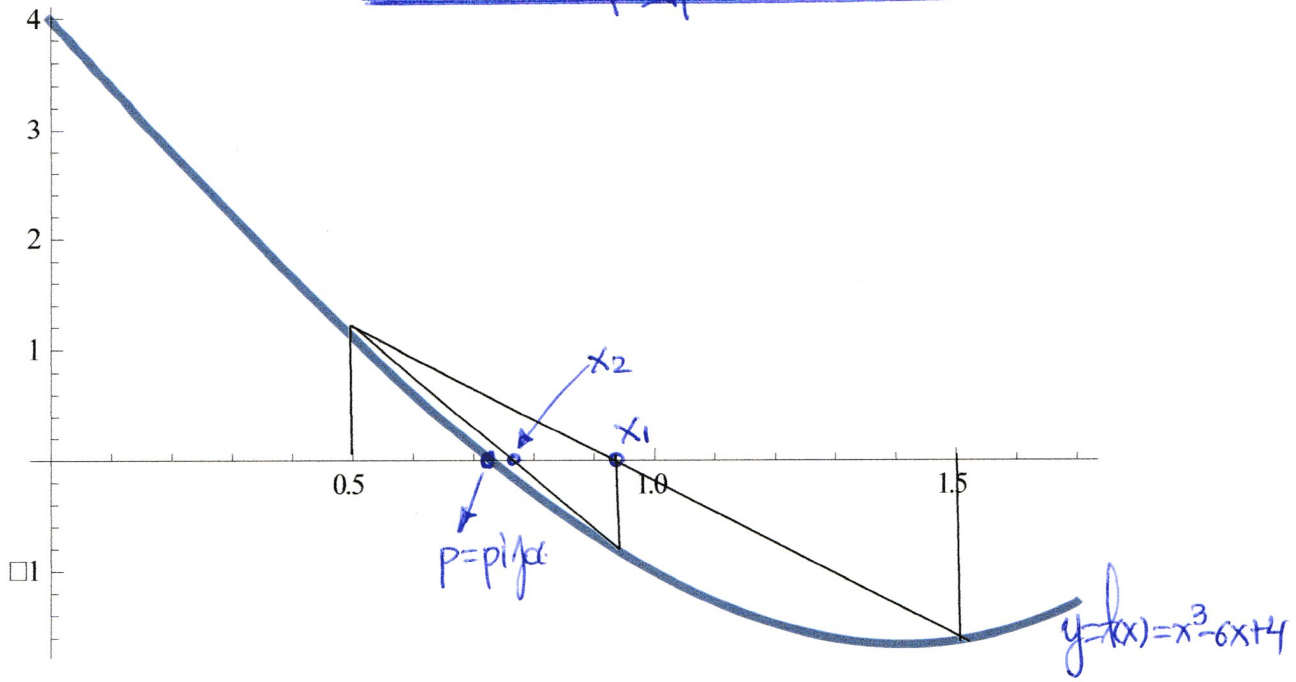
(III) $x_0 = 0.75, x_1 = 1$

μικρότερο
διαστήμα
[0.75, 1]

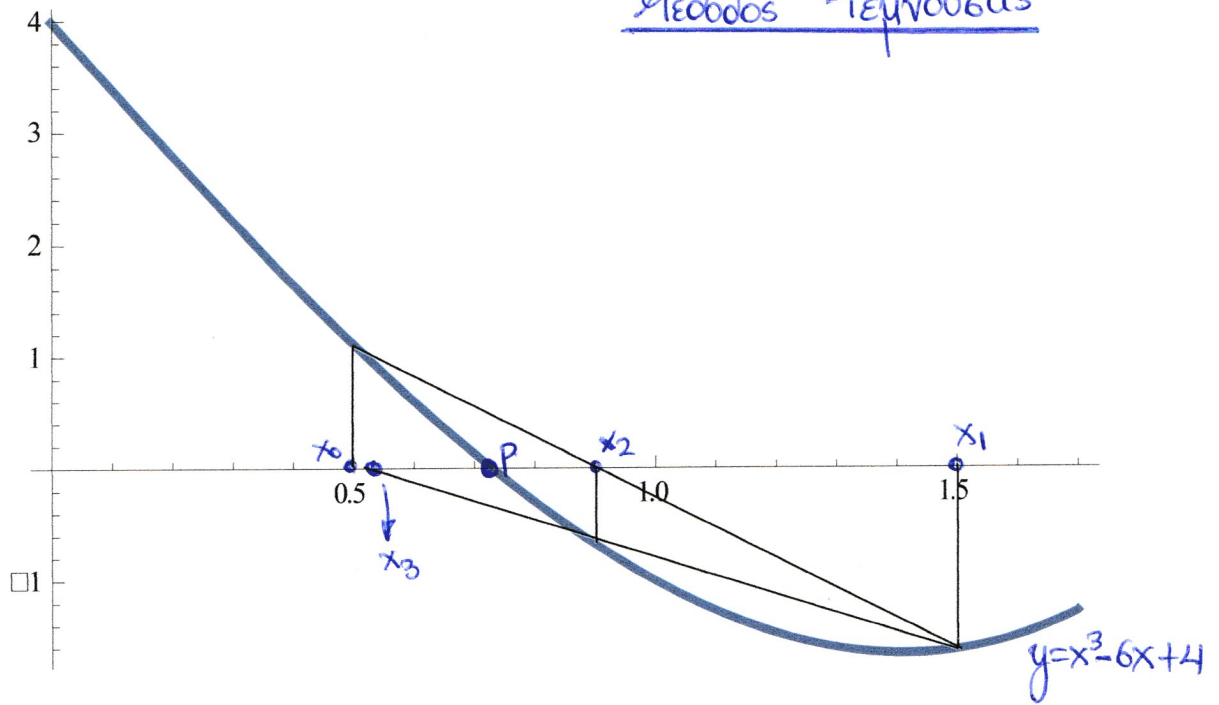
επαναλήψεις	ΑΑ σημείου	εκτίμηση	τιμή	απόλυτο σφάλμα	σχετικό σφάλμα
n		x_l	$f(x_r)$	$ x_k - x_{(k-1)} $	$ x_k - x_{(k-1)} /x_k$
0	0	0,75	-0,07813		
0	1	1	-1	0,25	0,25
1	2	0,728813559	0,014242	0,271186441	0,372093023
2	3	0,732621553	-0,00251	0,003807994	0,005197764

$$f(x) = x^3 - 6x + 4 = 0$$

Μέθοδος εσφαλμένης θέσης



Μέθοδος Τεχνουργός



Σύγκριση

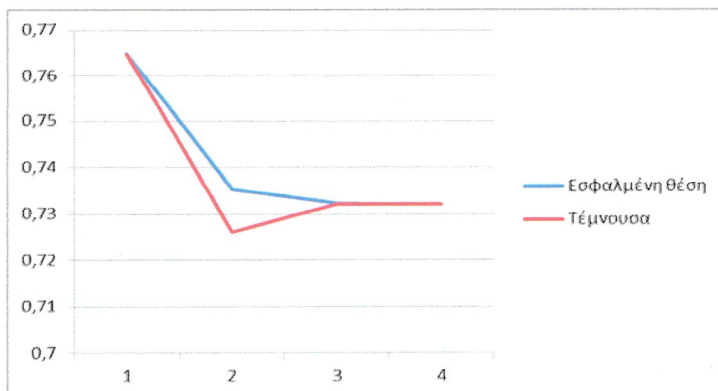
$$f(x) = x^3 - 6x + 4 = 0$$

1/11

ESFALMENH

Μέθοδος εσφαλμένης θέσης

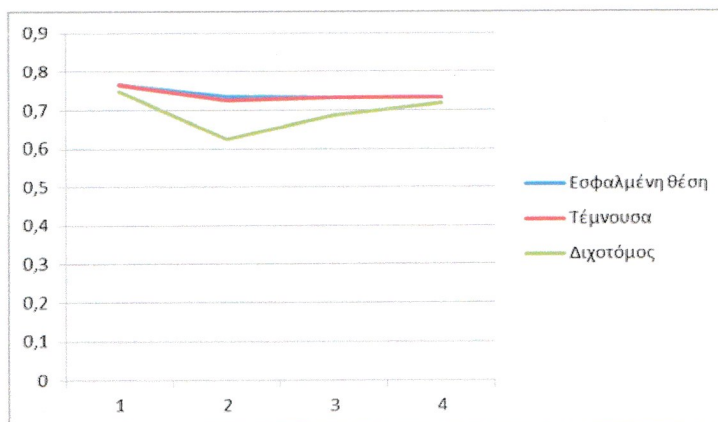
επαναλήψεις	αριστερό άκρο	δεξί άκρο	προσέγγιση ρίζας	τιμή	απόλυτο σφάλμα	σχετικό σφάλμα
n	x_l	x_u	x_r	f(x_r)	x_k - x_{(k-1)}	x_k - x_{(k-1)} /x_k
1	0,5	1	0,764705882	-0,141054346		
2	0,5	0,764705882	0,735214324	-0,01387312	0,029491558	0,040112872
3	0,5	0,735214324	0,732349074	-0,001309882	0,00286525	0,003912411
4	0,5	0,732349074	0,732078855	-0,000123193	0,000270219	0,000369111



Συγκρίνει αργότερα από τη μέτρουσα

Μέθοδος διχοτόμου

επαναλήψεις	αριστερό άκρο	δεξί άκρο	μέσο	τιμή	απόλυτο σφάλμα	σχετικό σφάλμα
n	a	b	x_n	f(x_n)	x_n - x_{n-1}	x_n - x_{n-1} /x_n
1	0,5	1	0,75	-0,078125		
2	0,5	0,75	0,625	0,494140625	0,125	0,2
3	0,625	0,75	0,6875	0,199951172	0,0625	0,090909091
4	0,6875	0,75	0,71875	0,058807373	0,03125	0,043478261
5	0,71875	0,75	0,734375	-0,010196686	0,015625	0,021276596
6	0,71875	0,734375	0,7265625	0,024172306	0,0078125	0,010752688
7	0,7265625	0,734375	0,73046875	0,006954372	0,00390625	0,005347594
8	0,73046875	0,732421875	0,731445313	0,002660324	0,000976563	0,001335113



Συγκρίνει αργότερα από μεθόδους: εσφαλμένης θέσης, τέμνουσας.