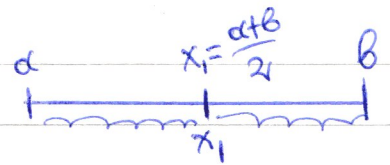


Μέθοδος διχοτόμου (bisection method) ή μέθοδος Bolzano

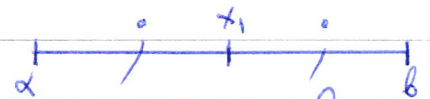


Ιδέα

Υπολογίζουμε προεγγιστικές τιμές x_k της πραγματικής ρίζας p , με τη βοήθεια διαστήματος, που σε κάθε επανάληψη/βήμα, το μήκος του είναι το μισό του μήκους του διαστήματος του προηγούμενου βήματος (διχοτόμηση).

Περιγραφή μεθόδου

(α) Επιλέγουμε ένα διάστημα $[a, b]$, το οποίο περιέχει την ζητούμενη ρίζα. (πρέπει $f(a) \cdot f(b) < 0$ ή τα a, b όσο το δυνατόν πιο κοντά στη ρίζα).

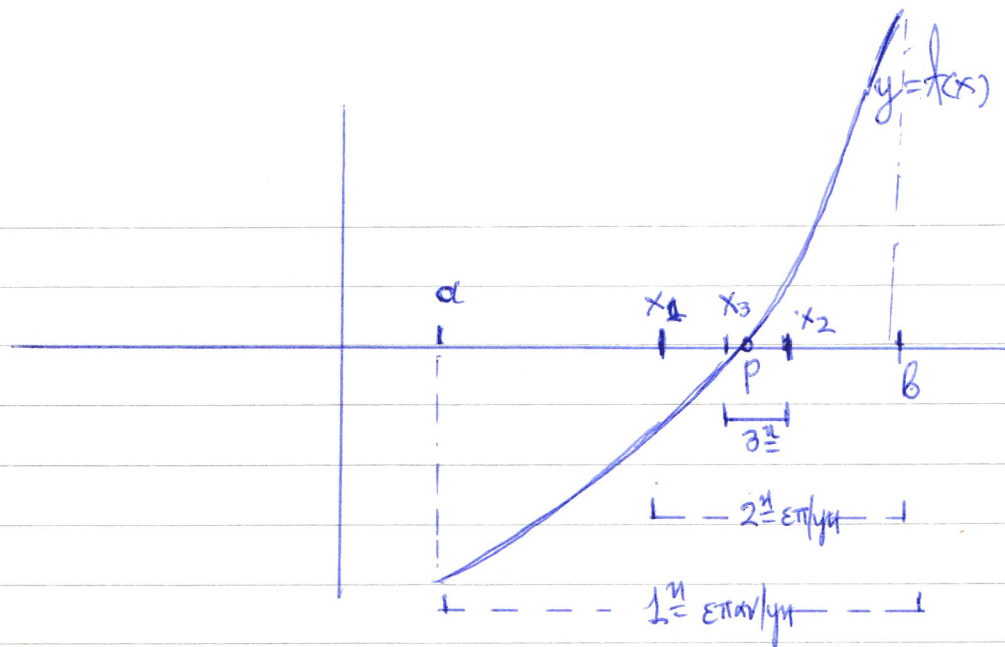


(β) Μια πρώτη προέγγιση της p είναι το $x_1 = \frac{a+b}{2}$ (μέσο του διαστήματος $[a, b]$).

Η p θα περιέχεται στο διάστημα $[a, x_1]$ εάν $f(a) \cdot f(x_1) < 0$ ή στο διάστημα $[x_1, b]$ εάν $f(x_1) \cdot f(b) < 0$. Καθένα από τα δύο διαστήματα έχει μήκος το μισό του μήκους του $[a, b]$.

(γ) Ας υποθέσουμε ότι η ρίζα ανήκει στο διάστημα $[a, x_1]$. Μια δεύτερη προέγγιση της ρίζας είναι το $x_2 = \frac{a+x_1}{2}$. Η ρίζα p θα περιέχεται στο διάστημα $[a, x_2]$ ή στο $[x_2, x_1]$.

(δ) Συνεχίζουμε αναλόγως.



Παρατήρηση

① Πρόκειται για τη μέθοδο με τη μικρότερη ταχύτητα σύγκλισης. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιείται συνήδως (μόνον) σαν αρχικό στάδιο υπολογισμού κάποιας εκτίμησης της ρίζας p ή με την βοήθεια αυτής της εκτίμησης/προσέγγισης, χρησιμοποιούμε κάποια άλλη ταχύτερη μέθοδο.

② Μπορεί να υπολογιστεί εκ των προτέρων, ο αριθμός των απαιτούμενων επαναληπτικών βημάτων που απαιτούνται για την εύρεση προσέγγισης με δεδομένη ακρίβεια (εκτίμηση ταχύτητας σύγκλισης). Εάν n ο αριθμός των επαναληπτικών βημάτων, $[a, b]$ το αρχικό διάστημα ή ε η προκαθορισμένη προσέγγιση ($|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$) τότε:

$$|x_n - x_{n-1}| = \frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon \Rightarrow \log(b-a) - \log 2^n \leq \log \varepsilon$$

$$\log(b-a) - n \log 2 \leq \log \varepsilon$$

$$n \geq \frac{\log(b-a) - \log \varepsilon}{\log 2}$$

Παράδειγμα

Δίνεται η εξίσωση $x^3 - 6x^2 + 4 = 0$.

(α) Να δείξει ότι έχει ρίζα στο διάστημα $[0,1]$

(β) Να βρεθεί η ρίζα (πρόσέγγιση) με τη μέθοδο της διχοτόμησης ή με ακρίβεια (πρόσέγγιση) 10^{-2} .

Λύση

(α) Αν $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4 \Rightarrow f(0) = 4 > 0$
 $f(1) = 1 - 6 + 4 = -1 < 0$
 (το 0 ή 1 όχι ρίζες) $\Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0$ Άρα από το θ. Bolzano, ΄υια ρίζα της $f(x) = 0$ στο $[0,1]$ ($a=0$ ή $b=1$)

(β) Από τον τύπο:

$$\varepsilon = 10^{-2}$$

$$n \geq \frac{\log(b-a) - \log \varepsilon}{\log 2} = \frac{\log(1-0) - \log 10^{-2}}{\log 2} \approx 6,64$$

Άρα θα απαιτηθούν 7 βήματα για να έχουμε τη ζητούμενη ακρίβεια.

1^η διχοτόμηση

(πρώτη πρόσέγγιση) $x_1 = \frac{0+1}{2} = 0,5$

$$\text{ή } f(0,5) = 0,5^3 - 6 \cdot 0,5^2 + 4 = 2,625$$

$$\text{ή } f(0,5) \cdot f(1) < 0$$

Άρα η ρίζα βρίσκεται στο $[0,5, 1]$

2^η διχοτόμηση

(πρόσέγγιση)

$$x_2 = \frac{1+0,5}{2} = 0,75 \text{ ή } f(0,75) = 1,047$$

$$f(0,75) \cdot f(1) < 0$$

Άρα η ρίζα βρίσκεται στο $[0,75, 1]$

$$\text{Σφάλμα } |0,75 - 0,50| = 0,25 > 10^{-2}$$

3^η διχοτόμηση

$$x_3 = \frac{1+0.75}{2} = 0.875 \quad \text{η} \quad f(0.875) = 0.076$$

$$f(0.875) \cdot f(1) < 0$$

άρα η ρίζα βρίσκεται στο $[0.875, 1]$

$$\text{Σφάλμα: } |0.875 - 0.75| = 0.125 > 10^{-2}$$

4^η διχοτόμηση

$$x_4 = \frac{0.875+1}{2} = 0.9375 \quad \text{η} \quad f(0.9375) = -0.449$$

$$\text{η} \quad f(0.875) \cdot f(0.9375) < 0$$

άρα η ρίζα βρίσκεται στο $[0.875, 0.9375]$

$$\text{Σφάλμα: } |0.9375 - 0.875| = 0.0625 > 10^{-2}$$

5^η διχοτόμηση

$$x_5 = \frac{0.875+0.9375}{2} = 0.90625 \quad \text{η} \quad f(0.90625) = -0.183$$

$$\text{η} \quad f(0.875) \cdot f(0.90625) < 0$$

άρα η ρίζα βρίσκεται στο $[0.875, 0.90625]$

$$\text{Σφάλμα } |0.90625 - 0.9375| = 0.0313 > 10^{-2}$$

6^η διχοτόμηση

$$x_6 = \frac{0.875+0.90625}{2} = 0.890625 \quad \text{η} \quad f(0.890625) = -0.05$$

$$f(0.890625) \cdot f(0.90625) < 0 \quad \text{άρα η ρίζα βρίσκεται στο διάστημα } [0.890625, 0.90625]$$

6^η διχοτόμηση.

$$x_6 = \frac{0.875 + 0.90625}{2} = 0.890625 \quad \checkmark$$

$$f(0.890625) = -0.05$$

$\checkmark$ $f(0.875) \cdot f(0.890625) < 0$, άρα η ρίζα βρίσκεται στο διάστημα:
 $[0.875, 0.890625]$

$$\text{Σφάλμα: } |0.890625 - 0.875| = 0.015625 > 10^{-2}$$

7^η διχοτόμηση

$$x_7 = \frac{0.875 + 0.890625}{2} = 0.8828125$$

$$\checkmark f(0.8828125) = 0.01$$

άρα $f(0.8828125) \cdot f(0.890625) < 0$ άρα η ρίζα βρίσκεται στο διάστημα
 $[0.8828125, 0.890625]$

$$\text{Σφάλμα } |0.8828125 - 0.890625| = 0.0078125 < 10^{-2}$$

Άρα εκτίμηση/πρόσγγιση
ρίζας $= x_7 = 0.8828125$
 (με την απαιτούμενη ακρίβεια)

Παρατήρηση

- (i) Όλα τα παραπάνω μπορούν να γραφούν σαν έναν πίνακα της μορφής που ακολουθεί.
- (ii) Εάν θέσουμε $|f(x)| < 10^{-2}$ τότε απαιτούνται περισσότερα βήματα (2 επιπλέον, με κίτρινο χρώμα, στον πρώτο πίνακα).
- (iii) Εάν αντί για το διάστημα $[0, 1]$, επιλέγαμε το $[0.8, 0.9]$ χρειαζόντου 5 μόνο βήματα (2ος πίνακας)

Παράδειγμα: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4 = 0$

$\frac{4}{6}$

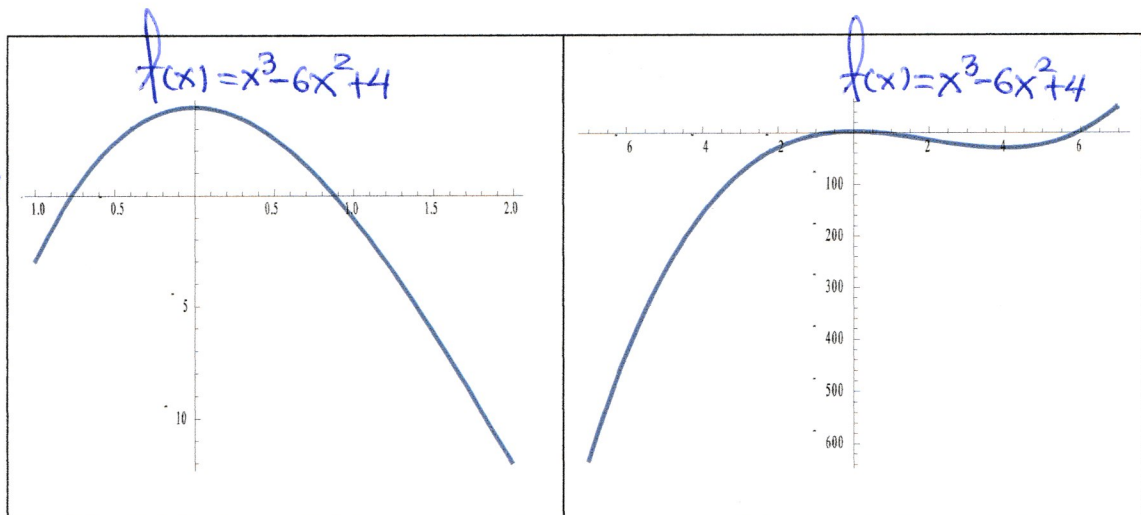
$[0, 1]$

επαναλήψεις	αριστερό άκρο	δεξι άκρο	μέσο	τιμή	απόλυτο σφάλμα	σχετικό σφάλμα
n	a	b	x _n	f(x _n)	x _n -x _{n-1}	x _n -x _{n-1} /x _n
1	0	1	0,5	2,625		
2	0,5	1	0,75	1,046875	0,25	0,333333333
3	0,75	1	0,875	0,076172	0,125	0,142857143
4	0,875	1	0,9375	-0,44946	0,0625	0,066666667
5	0,875	0,9375	0,90625	-0,18344	0,03125	0,034482759
6	0,875	0,90625	0,890625	-0,05282	0,015625	0,01754386
7	0,875	0,890625	0,882813	0,011879	0,0078125	0,008849558
8	0,882813	0,890625	0,886719	-0,02042	0,00390625	0,004405286
9	0,882813	0,886719	0,884766	-0,00426	0,001953125	0,002207506

$[0,8, 0,9]$

n	a	b	x _n	f(x _n)	x _n -x _{n-1}	x _n -x _{n-1} /x _n
1	0,8	0,9	0,85	0,279125		
2	0,85	1	0,925	-0,3423	0,075	0,081081081
3	0,85	0,925	0,8875	-0,02689	0,0375	0,042253521
4	0,85	0,8875	0,86875	0,127309	0,01875	0,021582734
5	0,86875	0,8875	0,878125	0,050504	0,009375	0,010676157

Διάγραμμα
 $[-1, 2]$



πίτες
"ακριβείς"

In[10]: Solve[x^3 - 6x^2 + 4 == 0, x]

$$\text{Out[10]} = \left\{ \left\{ x \rightarrow 2 - \frac{2^{2/3} (1 + i\sqrt{3})}{(3 + i\sqrt{7})^{1/2}} - \frac{(1 - i\sqrt{3}) (3 + i\sqrt{7})^{1/2}}{2^{2/3}}, \right. \right. \\ \left. \left\{ x \rightarrow 2 - \frac{2^{2/3} (1 - i\sqrt{3})}{(3 - i\sqrt{7})^{1/2}} - \frac{(1 + i\sqrt{3}) (3 - i\sqrt{7})^{1/2}}{2^{2/3}}, \right. \right. \\ \left. \left\{ x \rightarrow 2 + \frac{2 \cdot 2^{2/3}}{(3 + i\sqrt{7})^{1/2}} + (2 (3 + i\sqrt{7}))^{1/2} \right\} \right\}$$