

5^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ:
Θεωρίες
Ατμοσφαιρικής Διάχυσης -
Αναλυτικές Λύσεις

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 5^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

5.1 Θεωρίες Ατμοσφαιρικής Διάχυσης	3
5.2 Περιγραφή Euler.....	3
5.3 Περιγραφή Lagrange	4
5.4 Εξισώσεις που διέπουν τη μέση συγκέντρωση των ρύπων σε τυρβώδεις συνθήκες	5
5.4.1 Περιγραφή Euler	5
5.4.2 Περιγραφή Lagrange	6
5.4.3 Λύση της εξίσωσης διάχυσης για μη συνεχή πηγή με τη μέθοδο του Euler	7
5.5 Μοντέλο θυσάνου του Gauss.	8
5.5.1 Περιορισμοί του μοντέλου θυσάνου του Gauss.	9
5.5.2 Υπολογισμός των συντελεστών σ_y και σ_z . Μέθοδος Ευστάθειας.	10
5.5.3 Ανύψωση πλουμίου.....	14
5.6 Αναλυτικές Λύσεις της Ατμοσφαιρικής Διάχυσης.....	16
5.7 Δισδιάστατη, χρονικά ανεξάρτητη επιφανειακή συνεχής γραμμική πηγή με μεταβαλλόμενες τιμές ταχύτητας και συντελεστή διάχυσης.	21
5.8 Παραδείγματα & Εφαρμογές	23
Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 5	29

5.1 Θεωρίες Ατμοσφαιρικής Διάχυσης

Η μαθηματική περιγραφή της κατανομής των διαφόρων χημικών ενώσεων στην Ατμόσφαιρα μετά την εκπομπή τους είναι μια από τις εφαρμογές των ατμοσφαιρικών μοντέλων. Υπάρχουν δύο γενικοί τρόποι περιγραφής της τυρβώδους διάχυσης στην Ατμόσφαιρα, η μέθοδος του Euler και η μέθοδος του Lagrange. Με τη μέθοδο του Euler η συμπεριφορά του συστήματος εξετάζεται σε ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων και είναι η πιο διαδεδομένη μέθοδος εξέτασης μεταφοράς μάζας και θερμότητας. Στη μέθοδο του Lagrange οι μεταβολές των συγκεντρώσεων περιγράφονται σχετικά με το μεταφερόμενο μέσο (π.χ. αέρας). Οι παραπάνω τρόποι μελέτης οδηγούν σε διαφορετικές εξισώσεις που μπορούν να συσχετιστούν, όπως θα εξετάσουμε στο παρόν Κεφάλαιο.

5.2 Περιγραφή Euler

Η συγκέντρωση κάθε χημικής ένωσης κάθε χρονική στιγμή πρέπει να ικανοποιεί την ισορροπία μάζας μέσα στον όγκο που περιέχεται. Η εξίσωση αυτή είναι η εξίσωση συνέχειας και η απόδειξη της παρουσιάζεται στο Παράρτημα Α του βιβλίου. Η μεταβολή της μάζας μέσα στον όγκο λόγω μεταφοράς (convection) αντισταθμίζεται με μεταφορά μάζας, η οποία παράγεται από χημικές αντιδράσεις και εκπομπές μέσα στον όγκο καθώς και από μεταφορά με μοριακή διάχυση. Η μαθηματική περιγραφή του φαινομένου για κάθε στοιχείο i μας οδηγεί στην παρακάτω εξίσωση για τη συγκέντρωση c_i :

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j c_i) = D_i \frac{\partial^2 c_i}{\partial x_j \partial x_j} + R_i(c_1, \dots, c_N, T) + S_i(\vec{x}, t) \quad (5-1)$$

όπου u_j είναι το j συστατικό της ταχύτητας του μέσου (π.χ. αέρα), D_i ο συντελεστής μοριακής διάχυσης της ένωσης i , R_i ο ρυθμός παραγωγής της ενώσεως i με χημικές αντιδράσεις και S_i ο ρυθμός εκπομπής της ένωσης i στο σημείο $\vec{x}$ για χρόνο t .

Πρέπει να τονίσουμε, ότι ενώ η συγκέντρωση c_i ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας, πρέπει και οι ταχύτητες του μέσου u_j και η θερμοκρασία T να ικανοποιούν τις εξισώσεις Navier-Stokes, οι οποίες συνδέονται μέσω των u_j , c_i και T με την εξίσωση συνέχειας και το νόμο των τελείων αερίων σε αέρια συστήματα. Το θέμα αυτό το έχουμε διαπραγματευθεί διεξοδικά στο Κεφάλαιο 3.

Υποθέτουμε ότι οι ρύποι δεν επηρεάζουν τη μετεωρολογία και εκφράζουμε την ταχύτητα σε δύο όρους, τη μέση τιμή ($\overline{u_j}$) και τη στοχαστική συνιστώσα (u'_j) της ταχύτητας, έτσι ώστε: $u_j = \overline{u_j} + u'_j$ όπως μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 2. Στις παρακάτω παραγράφους επιλύουμε την εξίσωση της συνέχειας. Αντικαθιστώντας την ταχύτητα στην εξίσωση 5-1 έχουμε:

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\overline{u_j} + u'_j) c_i \right) = D_i \frac{\partial^2 c_i}{\partial x_j \partial x_j} + R_i(c_1, \dots, c_N, T) + S_i \left(\vec{x}, t \right) \quad (5-2)$$

Αναπτύσσοντας επίσης τη συγκέντρωση σε δύο όρους όπως και με την ταχύτητα έχουμε ότι: $c_i = \langle c_i \rangle + c'_i$. Ισχύει ότι $\langle c'_i \rangle = 0$ και με βάση τα παραπάνω έχουμε:

$$\frac{\partial \langle c_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_j} \langle c_i \rangle) + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_j c'_i \rangle = D_i \frac{\partial^2 \langle c_i \rangle}{\partial x_j \partial x_j} + R_i(\langle c_1 \rangle + c'_1, \dots, \langle c_N \rangle + c'_N, T) + S_i \left(\vec{x}, t \right) \quad (5-3)$$

Υψηλότερες τάξεις της παραπάνω εξίσωσης όπου παρουσιάζονται υψηλότεροι όροι της μορφής $\langle u'_j u'_k c' \rangle$ μπορούν να δημιουργηθούν με πολλαπλασιασμό της παραπάνω σχέσης με u'_j , αφαίρεση από την προηγούμενη εξίσωση και παίρνοντας στη συνέχεια το μέσο όρο. Σε κάθε περίπτωση όμως έχουμε περισσότερους αγνώστους από αριθμό εξισώσεων, που αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως το πρόβλημα ολοκλήρωσης (closure problem) της περιγραφής του Euler. Επιπλέον άγνωστοι όροι εμφανίζονται επίσης όταν έχουμε μη γραμμικές χημικές αντιδράσεις.

5.3 Περιγραφή Lagrange

Στη μέθοδο του Lagrange επικεντρωνόμαστε στη συμπεριφορά των σωματιδίων του μέσου (fluid particles). Η κίνηση του σωματιδίου περιγράφεται από την τροχιά του. Εισάγουμε την έννοια της πιθανότητας $\psi \left(\vec{x}, t \right)$, όπου

$$\psi(x_1, x_2, x_3, t) \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = \psi \left(\vec{x}, t \right) \, d\vec{x} \quad \text{είναι η πιθανότητα το σωματίδιο να}$$

βρίσκεται στο χρόνο t σε όγκο που περικλείεται από x_1 έως x_1+dx_1 , x_2 έως x_2+dx_2 και x_3 έως x_3+dx_3 . Από τον ορισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας έχουμε ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) dx = 1 \quad (5-4)$$

Η πυκνότητα πιθανότητας $(Q \left(\vec{x}, t \mid \vec{x}', t' \right))$ μπορεί να εκφραστεί ως το

γινόμενο δύο όρων, της πυκνότητας πιθανότητας ενός σωματιδίου που βρίσκεται στο σημείο $\vec{x}'$ τη χρονική στιγμή t' να μετατοπιστεί στο σημείο $\vec{x}$ τη στιγμή t και της πυκνότητας πιθανότητας το σωματίδιο που ήταν στο $\vec{x}'$ τη χρονική στιγμή t' να ολοκληρωθεί ως προς όλα τα αρχικά σημεία $\vec{x}'$. Έχουμε ως αποτέλεσμα η πιθανότητα να εκφράζεται ως εξής:

$$\psi\left(\vec{x}, t\right)=\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q\left(\vec{x}, t \mid \vec{x}', t'\right) d \vec{x}' \quad (5-5)$$

Η παραπάνω σχέση για την πυκνότητα πιθανότητας έχει εκφραστεί για ένα σωματίδιο. Για αριθμό σωματιδίων m που βρίσκονται αρχικά στο χώρο η πυκνότητα πιθανότητας εκφράζεται με το άθροισμα της πυκνότητας πιθανότητας όλων των σωματιδίων ως εξής:

$$\left\langle c\left(\vec{x}, t\right)\right\rangle=\sum_{i=1}^m \psi_i\left(\vec{x}, t\right) \quad (5-6)$$

Οπότε εκφράζοντας την $\psi(\vec{x}, t)$ σε σχέση με την αρχική συγκέντρωση σωματιδίων και τη χωρική και χρονική κατανομή των πηγών $S(\vec{x}, t)$ των σωματιδίων έχουμε:

$$\left\langle c\left(\vec{x}, t\right)\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q\left(\vec{x}, t \mid \vec{x}_o, t_o\right)\left\langle c\left(\vec{x}_o, t_o\right)\right\rangle d \vec{x}_o+\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t_o}^t Q\left(\vec{x}, t \mid \vec{x}', t'\right) S\left(\vec{x}', t'\right) d t' d \vec{x}' \quad (5-7)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι η βασική σχέση του Lagrange που διέπει τη μέση συγκέντρωση σωματιδίων σε τυρβώδες μέσο. Ο πρώτος όρος στα δεξιά της εξίσωσης (5-7) περιλαμβάνει τη συγκέντρωση που υπάρχει στο χρόνο t_o ενώ ο δεύτερος όρος τη συγκέντρωση που προκύπτει από εκπομπές σε χρόνους μεταξύ t_o και t . Το πρόβλημα που διέπει τη χρήση της παραπάνω σχέσης είναι, ότι γενικά είναι δύσκολο να υπολογίσουμε την πυκνότητα πιθανότητας μια και δε διαθέτουμε συνήθως λεπτομερή γνώση των ιδιοτήτων της τύρβης εκτός από συγκεκριμένες περιπτώσεις. Επίσης η παραπάνω ανάπτυξη ισχύει για την περίπτωση που τα σωματίδια δεν αντιδρούν χημικά μεταξύ τους.

5.4 Εξισώσεις που διέπουν τη μέση συγκέντρωση των ρύπων σε τυρβώδεις συνθήκες

5.4.1 Περιγραφή Euler

Όπως έχουμε δει, η περιγραφή της τυρβώδους διάχυσης με τη μέθοδο του Euler οδηγεί στο πρόβλημα ολοκλήρωσης (closure problem) λόγω της παρουσίας καινούργιων μεταβλητών $\langle u_j' c_i' \rangle$, $j=1,2,3$, όπως και άλλων μεταβλητών που εμφανίζονται στον όρο $\langle R_i \rangle$ λόγω μη γραμμικών χημικών αντιδράσεων. Χρειάζεται με κάποια σχέση να συνδέσουμε τους όρους $\langle u_j' c_i' \rangle$ με τη μέση συγκέντρωση $\langle c_i \rangle$ και αυτό γίνεται στη βιβλιογραφία με τη μέθοδο του μήκους ανάμιξης (mixing length) που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 3. Στη μέθοδο αυτή υποθέτουμε ότι:

$$\langle u'_j c' \rangle = -K_{jk} \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x_k} \quad j=1,2,3 \quad (5-8)$$

όπου ο όρος K_{jk} ονομάζεται συντελεστής διάχυσης (eddy diffusivity) και η έκφραση (5-8) είναι η μαθηματική έκφραση της K θεωρίας. Επιλέγουμε τους άξονες του συστήματος συντεταγμένων να συμπίπτουν με τους κύριους άξονες του τανυστή της διάχυσης K_{jk} με αποτέλεσμα μόνο οι όροι K_{11} , K_{22} , K_{33} να είναι διαφορετικοί από το μηδέν και άρα να έχουμε:

$$\langle u'_j c' \rangle = -K_{jj} \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x_j} \quad (5-9)$$

Για την εξίσωση διάχυσης κάνουμε δύο βασικές υποθέσεις: (α) η μοριακή διάχυση είναι αμελητέα σε σχέση με τη διάχυση λόγω τύρβης:

$$D_i \frac{\partial^2 \langle c \rangle}{\partial x_j \partial x_j} \ll \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_j c' \rangle \quad (5-10)$$

και (β) ότι η Ατμόσφαιρα είναι ασυμπίεστη:

$$\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j} = 0 \quad (5-11)$$

Μετά τις παραπάνω παραδοχές καταλήγουμε στην παρακάτω μορφή της ατμοσφαιρικής εξίσωσης διάχυσης:

$$\frac{\partial \langle c_i \rangle}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \langle c_i \rangle}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(K_{jj} \frac{\partial \langle c_i \rangle}{\partial x_j} \right) + R_i(\langle c_1 \rangle, \dots, \langle c_N \rangle, T) + S_i(\vec{x}, t) \quad (5-12)$$

Μπορεί να αποδειχθεί, ότι η παραπάνω εξίσωση περιγράφει την ατμοσφαιρική διάχυση με χημικές αντιδράσεις, όταν οι χημικές αντιδράσεις είναι αργές (πιο αργές από τη μεταφορά των ρύπων) και η κατανομή των πηγών ομαλή.

5.4.2 Περιγραφή Lagrange

Θα εξετάσουμε την επίλυση της εξίσωσης διάχυσης στο σύστημα συντεταγμένων του Lagrange. Λαμβάνουμε αρχικά την εξίσωση διάχυσης (5-3) χωρίς τον όρο της μοριακής διάχυσης και των χημικών αντιδράσεων και εξετάζουμε την επίλυση της για την περίπτωση της μονοδιάστατης ροής. Υποθέτουμε ότι έχουμε μόνο ένα όρο πηγής $S(x,t)$ και επομένως η εξίσωση διάχυσης εκφράζεται ως εξής:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u c) = S(x, t) \quad (5-13)$$

Λόγω του ότι η u είναι τυχαία ποσότητα τότε και η τιμή της c είναι τυχαία. Οπότε ζητάμε να βρούμε μια αναλυτική λύση για τη συγκέντρωση c για ορισμένες τιμές του u . Υποθέτουμε, ότι η u είναι ανεξάρτητη του x και εξαρτάται μόνο από t . Υποθέτουμε επίσης, ότι η πυκνότητα πιθανότητας για την $u(t)$ είναι Γκαουσιανή με αποτέλεσμα να έχουμε:

$$p_u(u) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma_u} \exp\left(-\frac{(u - \bar{u})^2}{2 \sigma_u^2}\right) \quad (5-14)$$

με μέση τιμή της ταχύτητας $\bar{u}$ και διασπορά σ_u . Υποθέτουμε επίσης, ότι η $u(t)$ είναι μια σταθερή τυχαία διεργασία (stationary random process), όπου η συσχέτιση για την ταχύτητα δίνεται από τη σχέση:

$$\langle (u(t) - \bar{u})(u(\tau) - \bar{u}) \rangle = \sigma_u^2 \exp(-b |t - \tau|) \quad (5-15)$$

Η λύση της σχέσης (5-15) για μεταβλητή πηγή $S(t)$ στο $x=0$ είναι:

$$c(x, t) = \int_0^t \delta(x - X(t, \tau)) S(\tau) d\tau \quad \text{όπου} \quad X(t, \tau) = \int_{\tau}^t u(t') dt' \quad (5-16)$$

όπου $\delta(x)$ η συνάρτηση δέλτα ($\delta(0)=1$, $\delta(x)=0$ όταν $x \neq 0$).

Η παραπάνω σχέση δηλώνει, ότι το μέγιστο της συσχέτισης μεταξύ των ταχυτήτων σε δύο χρονικές στιγμές συμβαίνει, όταν οι χρόνοι είναι ίδιοι και ισούται με σ_u^2 . Όσο αυξάνεται η απόσταση μεταξύ των ταχυτήτων $u(t)$ και $u(\tau)$ τόσο η συσχέτιση φθίνει εκθετικά με χαρακτηριστικό χρόνο $1/b$. Επίσης η έννοια της σταθερής τυχαίας διεργασίας αναφέρεται στο ότι οι στατιστικές ιδιότητες της ταχύτητας u σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές t και τ εξαρτώνται από τη διαφορά $t-\tau$ και όχι από τα ίδια t και τ .

Η επίλυση της σχέσης (5-16) μετά από σειρά αλγεβρικών πράξεων δίνει:

$$\langle c(x, t) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma_x(t)} \exp\left(-\frac{(x - \bar{u}t)^2}{2 \sigma_x^2(t)}\right) \quad (5-17)$$

Σε τρεις διαστάσεις η επίλυση εκφράζεται ως:

$$\langle c(x, y, z, t) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x(t) \sigma_y(t) \sigma_z(t)} \exp\left(-\frac{(x - \bar{u}t)^2}{2 \sigma_x^2(t)} - \frac{y^2}{2 \sigma_y^2(t)} - \frac{z^2}{2 \sigma_z^2(t)}\right) \quad (5-18)$$

5.4.3 Λύση της εξίσωσης διάχυσης για μη συνεχή πηγή με τη μέθοδο του Euler

Στην παράγραφο αυτή θα λύσουμε την εξίσωση διάχυσης για την περίπτωση μιας σημειακής πηγής που εκπέμπει ρύπους δυναμικότητας S στην αρχή του

συστήματος συντεταγμένων για άπειρο μέσο με ταχύτητα $\bar{u}$ στην κατεύθυνση x. Από την εξίσωση (5-12) και υποθέτοντας ότι τα K_{xx} , K_{yy} και K_{zz} είναι σταθερές ποσότητες έχουμε:

$$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x} = K_{xx} \frac{\partial^2 \langle c \rangle}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 \langle c \rangle}{\partial y^2} + K_{zz} \frac{\partial^2 \langle c \rangle}{\partial z^2} \quad (5-19)$$

υπό συνθήκες $\langle c(x, y, z, 0) \rangle = S \delta(x) \delta(y) \delta(z)$ και $\langle c(x, y, z, 0) \rangle = 0$ όταν $x, y, z \rightarrow \pm\infty$. Η συνάρτηση $\delta(x)$ είναι η συνάρτηση δέλτα ($\delta(0)=1$, $\delta(x)=0$ όταν $x \neq 0$).

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι:

$$\langle c(x, y, z, t) \rangle = \frac{S}{8(\pi t)^{3/2} (K_{xx} K_{yy} K_{zz})^{1/2}} \exp \left(-\frac{(x - \bar{u}t)^2}{4K_{xx}t} - \frac{y^2}{4K_{yy}t} - \frac{z^2}{4K_{zz}t} \right) \quad (5-20)$$

και εξετάζοντας την εξίσωση (5-20) και (5-12) καταλήγουμε ότι οι λύσεις του Euler και του Lagrange συμπίπτουν όταν $\sigma_x^2 = 2K_{xx}t$, $\sigma_y^2 = 2K_{yy}t$ και $\sigma_z^2 = 2K_{zz}t$.

5.5 Μοντέλο θυσάνου του Gauss.

Για την περιγραφή της διασποράς των ρύπων στην Ατμόσφαιρα χρησιμοποιούνται σε πολλές περιπτώσεις μοντέλα, στα οποία θεωρείται ότι η κατανομή των ρύπων μετά την απελευθέρωση τους από την πηγή είναι κανονική (Γκαουσιανή κατανομή), όπως εξετάσαμε στις προηγούμενες παραγράφους. Τα μοντέλα αυτά ονομάζονται μοντέλα θυσάνου Gauss ή Γκαουσιανά.

Τα μοντέλα θυσάνου Gauss χρησιμοποιούνται σήμερα ευρύτατα καθώς έχει διαπιστωθεί μετά από σύγκριση με πειραματικές μετρήσεις, ότι περιγράφουν ρεαλιστικά τη διασπορά των ρύπων σε μια στάσιμη Ατμόσφαιρα. Όπως έχουμε μελετήσει στο παρόν Κεφάλαιο σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, του οποίου η αρχή βρίσκεται στο έδαφος, αν ο άξονας x'x βρίσκεται στη διεύθυνση του ανέμου, ο άξονας y'y κάθετα στη διεύθυνση του ανέμου και ο άξονας z'z κατακόρυφα, η συγκέντρωση ενός αέριου ρύπου σε σημείο με συντεταγμένες (x,y,z) περιγράφεται από την εξίσωση:

$$c(x, y, z) = \frac{Q}{2\pi \sigma_y \sigma_z u} \exp \left[-\frac{y^2}{2\sigma_y^2} \right] \exp \left[-\frac{(H-z)^2}{2\sigma_z^2} \right]$$

όπου $c(x,y,z)$ είναι η συγκέντρωση του αέριου ρύπου στο σημείο (x,y,z) εκφρασμένη συνήθως σε $\mu\text{g}/\text{m}^3$, Q ο ρυθμός εκπομπής του αέριου ρύπου, εκφρασμένος συνήθως σε $\mu\text{g}/\text{s}$, u η ταχύτητα του ανέμου σε m/s , σ_y και σ_z οι

τυπικές αποκλίσεις της κατανομής στους άξονες $y'y$ και $z'z$ αντίστοιχα και H το ενεργό ύψος εκπομπής του θυσάνου.

Οι προϋποθέσεις για να μπορεί να εφαρμοστεί με επιτυχία ένα μοντέλο θυσάνου Gauss και να δώσει αξιόπιστα αποτελέσματα είναι οι ακόλουθες:

- 1) Η εκπομπή των ρύπων θα πρέπει να είναι συνεχής ή τουλάχιστον να γίνεται για μια χρονική περίοδο, η οποία είναι μεγαλύτερη από το χρόνο διαδρομής του ρύπου από την πηγή μέχρι το σημείο που θέλουμε να υπολογίσουμε τη συγκέντρωση.
- 2) Οι ρύποι να είναι χημικά αδρανείς καθώς στο μοντέλο θυσάνου του Gauss δεν λαμβάνονται υπόψη χημικές αντιδράσεις.
- 3) Στη διεύθυνση του ανέμου η μεταφορά των ρύπων κυριαρχεί της τυρβώδους διάχυσης.
- 4) Η διάμετρος των αιωρούμενων σωματιδίων να είναι μικρότερη από 20 μm ώστε να παραμένουν αιωρούμενα στην Ατμόσφαιρα για τις χρονικές κλίμακες που εξετάζουμε.
- 5) Όπως φαίνεται από την εξίσωση της συγκέντρωσης για την εφαρμογή του μοντέλου θα πρέπει η προς μελέτη περιοχή να βρίσκεται σε στάσιμη κατάσταση, όσον αφορά τις μετεωρολογικές παραμέτρους και τις παραμέτρους ευστάθειας τουλάχιστον για το χρονικό διάστημα που χρειάζεται για να μεταφερθούν οι ρύποι από την πηγή στους αποδέκτες. Η συνθήκη αυτή ικανοποιείται σχετικά εύκολα στις περισσότερες περιπτώσεις. Για παράδειγμα αν έχουμε μεταφορά ρύπων σε αποστάσεις από την πηγή μικρότερες των 10 Km και η ταχύτητα του ανέμου είναι 5 m/s, ο χρόνος μεταφοράς των ρύπων είναι περίπου 35 λεπτά.

Θα πρέπει να τονίσουμε, ότι κατά την εφαρμογή ενός Γκαουσιανού μοντέλου διασποράς υπολογίζονται μέσες συγκεντρώσεις των ρύπων σε διάφορα σημεία γύρω από τις πηγές εκπομπής. Υπάρχει διαφορά ανάμεσα στην κατανομή των στιγμιαίων και των μέσων συγκεντρώσεων. Η στιγμιαία συγκέντρωση του ρύπου δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή. Όμως η κατανομή της μέσης συγκέντρωσης εμφανίζει γκαουσιανή κατανομή στην εγκάρσια διεύθυνση και σε μικρότερο βαθμό στην κατακόρυφη διεύθυνση. Τίθεται λοιπόν το ερώτημα, πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το χρονικό διάστημα που λαμβάνονται οι μέσες τιμές ώστε να παρουσιάζουν οι μέσες συγκεντρώσεις κανονική κατανομή. Τις περισσότερες φορές υπολογίζονται οι μέσες ωριαίες συγκεντρώσεις. Υπάρχουν όμως ενδείξεις, ότι η κατανομή του Gauss εμφανίζεται και σε περιπτώσεις που οι μέσες τιμές υπολογίζονται για χρονικό διάστημα λίγων δεκάδων λεπτών.

Από την εξίσωση του θυσάνου του Gauss παρατηρούμε, ότι ένα Γκαουσιανό μοντέλο δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε περιπτώσεις που η ταχύτητα του ανέμου τείνει στο μηδέν (περιπτώσεις άπνοιας). Στην πράξη στις περιπτώσεις αυτές λαμβάνεται ταχύτητα ανέμου ίση με 0,5 ή 1 m/s ανάλογα με το μοντέλο που χρησιμοποιείται.

5.5.1 Περιορισμοί του μοντέλου θυσάνου του Gauss.

A) Συνθήκες μεγάλης αστάθειας

Όταν στην Ατμόσφαιρα επικρατούν συνθήκες μεγάλης αστάθειας, η ροή στο οριακό στρώμα είναι τυρβώδης και εμφανίζονται έντονες ανοδικές και καθοδικές κινήσεις του αέρα. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα οι ρύποι που εκλύονται από μία πηγή να μεταφέρονται πολύ γρήγορα στο ανώτερο όριο του οριακού στρώματος ή στο έδαφος. Οι ανοδικές αναταρακτικές κινήσεις έχουν μεγαλύτερες ταχύτητες από τις καθοδικές κινήσεις και καταλαμβάνουν μικρότερη επιφάνεια. Έτσι οι ρύποι έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα να βρεθούν σε μία καθοδική ροή αέρα, παρά σε μία ανοδική, με τελικό αποτέλεσμα ο κεντρικός άξονας του θύσανου αρχικά να κατέρχεται. Συνολικά ο θύσανος κινείται προς το έδαφος ή προς τη βάση του οριακού στρώματος, ανάλογα με τη ροή αέρα που συναντάει. Η παράμετρος αυτή δε λαμβάνεται υπόψη στα Γκαουσιανά μοντέλα και απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή κατά την εφαρμογή τους σε συνθήκες μεγάλης αστάθειας.

B) Εκπομπές κοντά στο έδαφος

Όταν οι εκπομπές γίνονται πολύ κοντά στο έδαφος δημιουργούνται προβλήματα στην εφαρμογή των Γκαουσιανών μοντέλων εξαιτίας της μεταβολής της ταχύτητας του ανέμου και της δομής της τύρβης. Πιο συγκεκριμένα η ταχύτητα του ανέμου κοντά στο έδαφος μεταβάλλεται λογαριθμικά με το ύψος με αποτέλεσμα να είναι δύσκολη η επιλογή μίας αντιπροσωπευτικής ταχύτητας για ολόκληρο το οριακό στρώμα. Επίσης η ροή της τύρβης δεν είναι ομοιογενής στην κατακόρυφη διεύθυνση και αποκλίνει από την Γκαουσιανή κατανομή. Η εγκάρσια κατανομή για εκπομπές κοντά στο έδαφος εξακολουθεί να είναι κανονική.

5.5.2 Υπολογισμός των συντελεστών σ_y και σ_z . Μέθοδος Ευστάθειας

Οι συντελεστές διάχυσης (σ) καθορίζονται έπειτα από μετρήσεις. Είναι επιστημονικά σωστή πρακτική να υπολογίζονται οι συντελεστές διάχυσης για κάθε συγκεκριμένη τοποθεσία μελέτης έτσι, ώστε τα παρεπόμενα αυτών αποτελέσματα να είναι ακριβή και να ανταποκρίνονται στην εκάστοτε περιοχή μελέτης και μόνο. Ο προσδιορισμός αυτών των συντελεστών είναι σχετικά εύκολος όταν αναφερόμαστε σε κάποια περιοχή κοντά στο έδαφος με γρασίδι ή καλλιέργεια, ενώ γίνεται πιο πολύπλοκος όταν αναφερόμαστε σε μια αστική περιοχή που περιβάλλεται από κτίρια. Οι συντελεστές διάχυσης εξαρτώνται από την τάξη σταθερότητας, από την κατάντη απόσταση και το μέσο χρόνο από τη στιγμή που άρχισε η διασπορά (Schnelle και Dey, 1999).

Οι τιμές στη βιβλιογραφία για τις συναρτήσεις σ_y και σ_z ως συνάρτηση της απόστασης από την πηγή και της ευστάθειας έχουν υπολογιστεί από μερικά πειράματα στις δεκαετίες του '50 και '60 (Hanna et al., 1981). Η περιοχή του πειράματος ήταν ομοιόμορφη, οι εκπομπές έγιναν σε επίπεδο κοντά στο έδαφος και οι μετρήσεις της συγκέντρωσης έγιναν σε αποστάσεις μικρότερες του ενός χιλιομέτρου. Τα πειράματα αυτά οδήγησαν στις καμπύλες του Pasquill το 1961 (Σχήμα 5-1). Οι διακεκομμένες γραμμές οφείλονται στο ότι τα πειράματα έγιναν μέχρι απόστασης ενός χιλιομέτρου και η συνέχιση των

καμπύλων ισχύει σε ιδανικές συνθήκες. Ενδεχομένως θα υπάρχουν μετατοπίσεις από τις καμπύλες αυτές μια και οι συνθήκες στην Ατμόσφαιρα απέχουν πολύ από το να είναι ιδανικές.

Αναλυτικές εκφράσεις για τις συναρτήσεις σ_y και σ_z (συντελεστές διάχυσης στις κατευθύνσεις x και y) έχουν δοθεί στη βιβλιογραφία. Μία από τις αρχικές εκφράσεις δόθηκε το 1968 από τον Smith που παρουσίασε ωριαίες μετρήσεις σε απόσταση μέχρι 10 χιλιόμετρα από μια πηγή ύψους 108 μέτρων. Σύμφωνα με τις μετρήσεις του Smith προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις για τα σ_y και σ_z :

$$\sigma_y = a x^b \text{ και } \sigma_z = c x^d \quad (5-21)$$

Πιο πρόσφατα δεδομένα έχουν παρουσιαστεί από τον Briggs (Hanna et al., 1981) (Πίνακας 5-1). Τιμές των συντελεστών a , b , c , και d μπορούν να ληφθούν από τις τιμές του εθνικού εργαστηρίου του Brookhaven, USA (Πίνακας 5-2).

Πίνακας 5-1: Σχέσεις προτεινόμενοι από τον Briggs (1973) για $\sigma_y(x)$ και $\sigma_z(x)$ ($10^2 < x < 10^4$ m).

Κατηγορία Σταθερότητας	$\sigma_y(x)$	$\sigma_z(x)$
Συνθήκες ανοιχτού πεδίου		
A	$0.22 x (1+0.0001 x)^{-1/2}$	$0.20 x$
B	$0.16 x (1+0.0001 x)^{-1/2}$	$0.12 x$
C	$0.11 x (1+0.0001 x)^{-1/2}$	$0.22 x (1+0.0002 x)^{-1/2}$
D	$0.08 x (1+0.0001 x)^{-1/2}$	$0.22 x (1+0.0015 x)^{-1/2}$
E	$0.06 x (1+0.0001 x)^{-1/2}$	$0.22 x (1+0.0003 x)^{-1/2}$
F	$0.04 x (1+0.0001 x)^{-1/2}$	$0.22 x (1+0.0003 x)^{-1/2}$
Συνθήκες πόλεων		
A-B	$0.32 x (1+0.0004 x)^{-1/2}$	$0.22 x (1+0.001 x)^{-1/2}$
C	$0.22 x (1+0.0004 x)^{-1/2}$	$0.20 x$
D	$0.16 x (1+0.0004 x)^{-1/2}$	$0.14 x (1+0.0003 x)^{-1/2}$
E-F	$0.11 x (1+0.0004 x)^{-1/2}$	$0.08 x (1+0.00015 x)^{-1/2}$

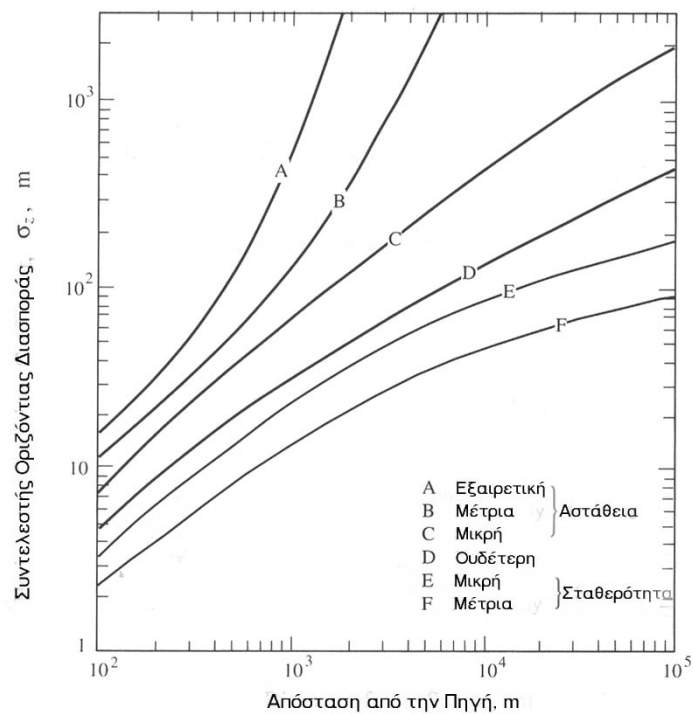
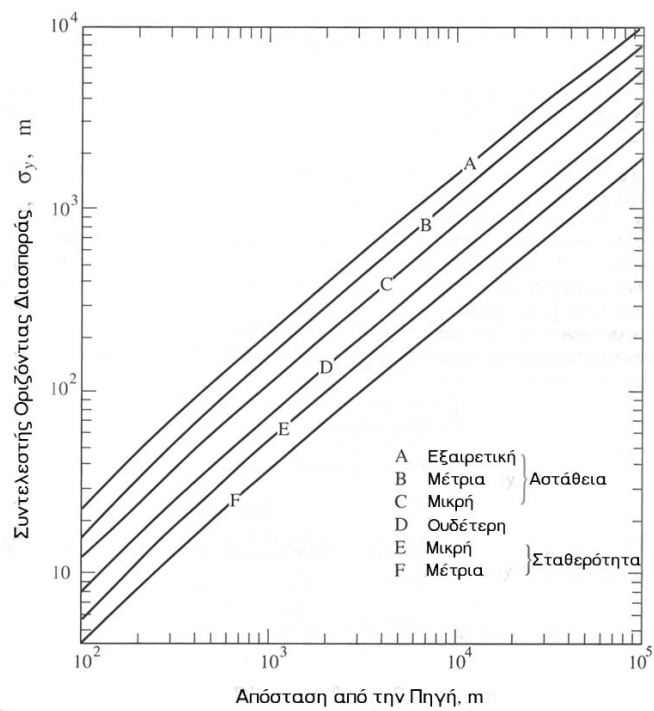
Πίνακας 5-2: Παράμετροι των σχέσεων $\sigma_y = a x^b$ και $\sigma_z = c x^d$.

Κατηγορία Σταθερότητας	Παράμετρος			
	a	b	c	d
B ₂	0.40	0.91	0.41	0.91
B ₁	0.36	0.86	0.33	0.86
C	0.32	0.78	0.22	0.78
D	0.31	0.71	0.06	0.71

Πίνακας 5-3: Εξισώσεις που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του σ_y σε ανοιχτό πεδίο.

Κατηγορία Σταθερότητας	Εξίσωση για TH
A	TH=24.1670-2.5334 ln(x)
B	TH=18.3330-1.8096 ln(x)
C	TH=12.5000-1.0857 ln(x)
D	TH=8.3330-0.72382 ln(x)

E	$TH=6.2500-0.54287 \ln(x)$
F	$TH=4.1667-0.36191 \ln(x)$



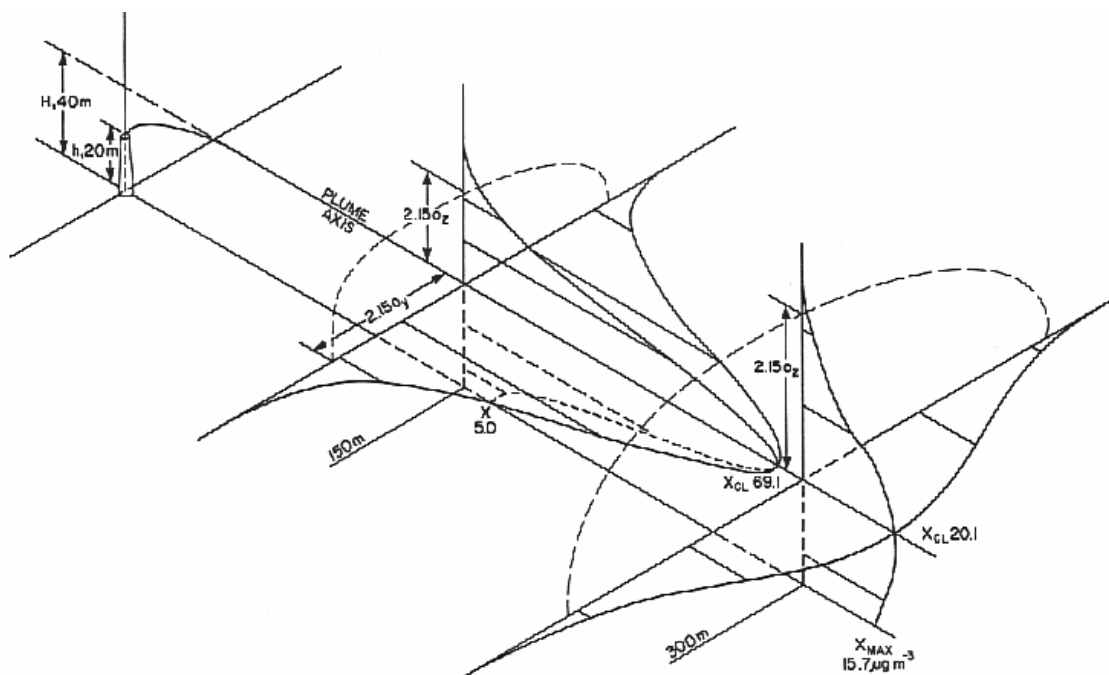
Σχήμα 5-1: Καμπύλες των συναρτήσεων σ_y και σ_z βασισμένες στους υπολογισμούς του Pasquill (Hanna et al., 1981).

Ο Pasquill το 1961 πρότεινε ένα σχήμα τύρβης που έγινε γνωστό ως μεθοδολογία των Pasquill-Gifford. Υπολογισμοί για την κατακόρυφη και οριζόντια διασπορά των ρύπων έγιναν ως συνάρτηση της κλάσεως σταθερότητας από Α έως F. Γραφική παράσταση των συντελεστών Pasquill-Gifford παρουσιάζονται στο Σχήμα 5-1, ενώ οι μαθηματικές συναρτήσεις δίνονται στον Πίνακα 5-1.

Τα τελευταία χρόνια η Αμερικανική Επιτροπή Προστασίας του Περιβάλλοντος (EPA) προτείνει εναλλακτική μεθοδολογία για τον υπολογισμό του σ_y σε ανοιχτό πεδίο:

$$\sigma_y = \frac{1000 \times \tan(TH)}{2.15} \quad (5-22)$$

όπου x είναι η απόσταση κατά τη διεύθυνση του ανέμου σε χιλιόμετρα, ενώ το σ_y δίνεται σε μέτρα. Οι εξισώσεις για την τιμή του TH από την εξίσωση 5-22 δίνονται στον Πίνακα 5-3. Για το σ_z χρησιμοποιείται η σχέση $\sigma_z = a x^b$, όπου το x δίνεται σε χιλιόμετρα και το σ_z σε μέτρα. Γραφική αναπαράσταση της Γκαουσιανής διασποράς των ρύπων από μια καμινάδα παρουσιάζονται στο Σχήμα 5-2, όπου παρουσιάζεται η μεταβολή της συγκέντρωσης των ρύπων κατά την οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση.



Σχήμα 5-2: Γκαουσιανή περιγραφή της εκπομπής των ρύπων από καμινάδα.

5.5.3 Ανύψωση πλουμίου

Όταν τα απαέρια μίας καμινάδας έχουν μεγαλύτερη θερμοκρασία από αυτή του περιβάλλοντος, τότε το πλούμιο ανέρχεται λόγω θερμοκρασιακής άνωσης. Επίσης η ανύψωση του πλουμίου λαμβάνει χώρα, όταν τα απαέρια εξέρχονται με μεγάλη ταχύτητα από την καμινάδα. Ορισμένα πλούμια εκπέμπονται έχοντας ίδια θερμοκρασία με αυτήν του περιβάλλοντος, αλλά ανυψώνονται λόγω των χαρακτηριστικών των ρύπων που εκπέμπονται (πυκνότητα και σύνθεση). Αυτά τα αέρια παρουσιάζουν θετική ανύψωση εάν είναι ελαφρότερα από τον αέρα και αρνητική ανύψωση εάν είναι βαρύτερα από τον αέρα (Schnelle και Dey, 1999).

Η ανύψωση του πλουμίου ζεστών αερίων περιγράφεται από τα ακόλουθα στάδια (Σχήμα 5-3):

(1) Θερμικό στάδιο, το οποίο χαρακτηρίζεται από:

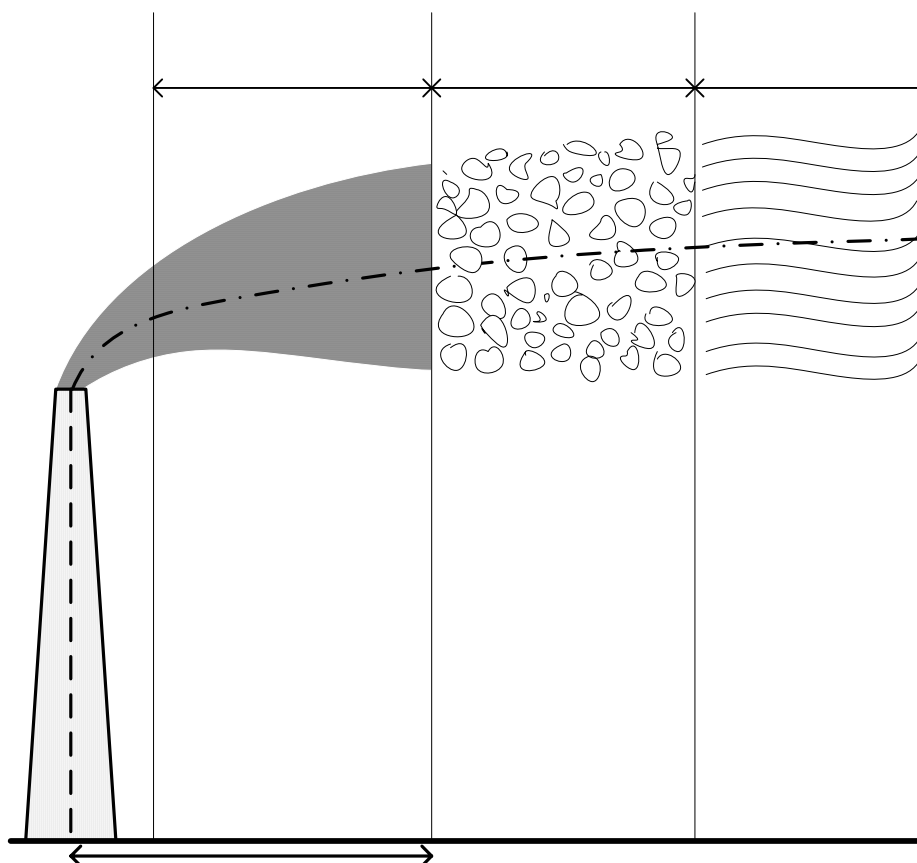
- ανάμιξη λόγω ίδιας τύρβης,
- συγκράτηση μέτριας ανύψωσης και επίπεδου σχήματος,
- εφαρμογή γραμμικού θερμικού μοντέλου και τέλος
- περιγραφή του φαινομένου από τον Briggs που θεωρεί, ότι το πλούμιο φθάνει το μέγιστο ύψος ανύψωσης στο στάδιο αυτό.

(2) Στάδιο διάσπασης, το οποίο χαρακτηρίζεται από:

- κυριαρχία της ατμοσφαιρικής τύρβης,
- διάσπαση του πλουμίου σε μικρά τμήματα και
- βηματική αύξηση της διαμέτρου του πλουμίου.

(3) Στάδιο διάχυσης, το οποίο χαρακτηρίζεται από:

- κυριαρχία της ατμοσφαιρικής τυρβώδους διάχυσης,
- συγκρότηση του πλουμίου— ακόμα μεγαλύτερη διάχυση και
- σχετικά αργή ανάπτυξη.



Σχήμα 5-3: Γραφική περιγραφή της ανύψωσης του πλουμίου.

Έχοντας ως στόχο την εκπομπή των ρύπων σε μεγαλύτερο ύψος οι ρύποι από τις καμινάδες απελευθερώνονται με θερμοκρασίες μεγαλύτερες από την θερμοκρασία του γύρω αέρα και με μεγάλη ορμή. Ως αποτέλεσμα το ενεργό ύψος της καμινάδας (h) είναι το άθροισμα του κανονικού ύψους της καμινάδας (h_s) και της ανύψωσης του πλουμίου (Δh) και εκφράζεται ως:

$$h = h_s + \Delta h \quad (5-23)$$

Ο υπολογισμός της ανύψωσης του πλουμίου είναι αρκετά δύσκολη υπόθεση καθώς εξαρτάται από πολλές παραμέτρους όπως η υπάρχουσα μετεωρολογία, η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ του πλουμίου και του αέρα όπως και η ταχύτητα ανύψωσης. Βασιζόμενοι στις αρχικές συνθήκες το πλούμιο μπορεί να χαρακτηριστεί ως:

Ανυψωμένο πλούμιο (Buoyant plume) όπου έχουμε αρχική ανύψωση $\gg$ αρχική ορμή,

Δυναμικό πλούμιο (Forced plume) με αρχική ανύψωση $\cong$ αρχική ορμή και τέλος,

Τζέτ με αρχική ανύψωση $\ll$ αρχική ορμή.

Η ανύψωση του πλουμίου εκφράζεται συνήθως από την εξίσωση $\Delta h = \frac{E x^b}{u^a}$.

Ως παράδειγμα δίνουμε τους συντελεστές a , b και E για ουδέτερες και μη σταθερές συνθήκες ως $a=1$, $b=0$ και $E=7,4 (F h^2)^{1/3}$ όπου F είναι ο συντελεστής ανύψωσης ροής και ισούται με $F = g d^2 V_s (T_s - T_a) / 4 T_s$ σε μονάδες $m^4 s^{-3}$ και g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας $m s^{-2}$, d η διάμετρος της καμινάδας (m), T_a είναι η θερμοκρασία του αέρα στο ύψος της καμινάδας (K), T_s είναι η θερμοκρασία του εξερχόμενου αέρα από την καμινάδα (K) και V_s είναι η ταχύτητα εξόδου από την καμινάδα ($m s^{-1}$). Επίσης ένας ευρύτατα διαδεδομένος τύπος που χρησιμοποιείται στους υπολογισμούς της Δh είναι ο τύπος του Holland:

$$\Delta h = \frac{2 V_s r_s}{u} \left[1.5 + 2.68 \times 10^{-2} P \left(\frac{T_s - T_a}{T_s} \right) 2 r_s \right] \quad (5-24)$$

όπου r_s είναι η ακτίνα της καμινάδας στην έξοδο της (m) και P είναι η ατμοσφαιρική πίεση (kPa).

5.6 Αναλυτικές Λύσεις της Ατμοσφαιρικής Διάχυσης

Στο Κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τη γενική μορφή των αναλυτικών Γκαουσιανών λύσεων για τη διασπορά των ρύπων στην Ατμόσφαιρα. Σε κάθε μέθοδο υπολογισμού που αναπτύσσεται πρέπει η συγκέντρωση να εκφράζεται απευθείας ανάλογα της δυναμικότητας της πηγής και αντιστρόφως ανάλογα της μέσης ταχύτητας του ανέμου. Τα Γκαουσιανά μοντέλα έχουν αυτές τις προϋποθέσεις, όπως έχουμε μελετήσει. Επίσης τα Γκαουσιανά μοντέλα περιλαμβάνουν παραμετροποιήσεις για τη διασπορά των ρύπων μέσω των συντελεστών σ και K που εκφράζουν την αναλογία του βαθμού ανάμιξης όπως μετράται από την ένταση της τύρβης στα συστήματα συντεταγμένων Lagrange και Euler αντίστοιχα. Δεν υπάρχει κάποιο βασικό μοντέλο στη φυσική που να περιγράφει επακριβώς τη τυρβώδη διάχυση στην Ατμόσφαιρα. Το μοντέλο διάχυσης με την εφαρμογή των συντελεστών διάχυσης K προκύπτει από ένα ισοζύγιο μάζας σε έναν ορισμένο όγκο ελέγχου, όπως εξετάσαμε λεπτομερώς στο Κεφάλαιο 3. Παρόμοια αποτελέσματα προκύπτουν με την εφαρμογή της στατιστικής θεωρίας της τύρβης από την οποία προκύπτει ένα μοντέλο, το οποίο έχει τα ίδια χαρακτηριστικά όπως το μοντέλο διάχυσης με συντελεστή διάχυσης K (Schnelle και Dey, 1999).

Έχουμε περιγράψει στο παρόν Κεφάλαιο, ότι κάτω από ορισμένες ιδεατές συνθήκες η μέση συγκέντρωση των ρύπων που εκλύονται από κάποια σημειακή πηγή έχει Γκαουσιανή κατανομή. Θα παρουσιάσουμε στο παρόν κεφάλαιο τις αναλυτικές λύσεις της Γκαουσιανής μορφής κάνοντας διαφορετικές υποθέσεις για τον τρόπο με τον οποίο αντιδρά ο ρύπος που διαχέεται με την επιφάνεια του εδάφους και για το ύψος του οριακού στρώματος. Θα ακολουθήσουμε την ανάπτυξη που έχει γίνει με τη μέθοδο του Lagrange. Η μέση συγκέντρωση του ρύπου δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\left\langle c(\vec{x}, t) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\vec{x}, t | \vec{x}_o, t_o) \left\langle c(\vec{x}_o, t_o) \right\rangle d\vec{x}_o + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t_o}^t Q(\vec{x}, t | \vec{x}', t') S(\vec{x}', t') dt' d\vec{x}' \quad (5-25)$$

Η πυκνότητα πιθανότητας Q (transition probability density) εκφράζει την πιθανότητα, ότι ένα υποθετικό σωματίδιο που είναι στο σημείο x, y, z τη χρονική στιγμή t θα βρεθεί στο σημείο x, y, z τη χρονική στιγμή t . Σε συνθήκες μη μεταβαλλόμενης ομογενούς τύρβης η πιθανότητα Q έχει Γκαουσιανή μορφή. Στην περίπτωση της μέσης ταχύτητας ανέμου κατά μήκος του άξονα x με $\bar{v} = \bar{w} = 0$ σε άπειρο μέσο έχουμε για την Q την παρακάτω σχέση:

$$Q(x, y, z, t | x', y', z', t') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \exp \left(-\frac{(x - x' - \bar{u}(t - t'))^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y - y')^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(z - z')^2}{2\sigma_z^2} \right) \quad (5-26)$$

Λόγω του ότι μας ενδιαφέρει η επίδραση της επιφάνειας της Γης στην κατακόρυφη διασπορά των ρύπων χωρίζουμε την παραπάνω έκφραση του Q σε δύο μέρη, ώστε να υπολογίσουμε την επίδραση στην κατακόρυφη διεύθυνση z :

$$Q(x, y, z, t | x', y', z', t') = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y} \exp \left(-\frac{(x - x' - \bar{u}(t - t'))^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y - y')^2}{2\sigma_y^2} \right) Q_z(z, t | z', t') \quad (5-27)$$

Υπολογίζουμε την έκφραση του $Q_z(z, t | z', t')$ για διάφορες πιθανότητες: (α) ολική ανάκλαση, (β) ολική απορρόφηση, (γ) μερική απορρόφηση και για δύο μορφές του οριακού στρώματος (H): (α) $0 \leq z \leq \infty$, (β) $0 \leq z \leq H$ χωρίς διάχυση πάνω από το H . Στις παρακάτω σχέσεις παρουσιάζουμε τη μαθηματική έκφραση για το $Q_z(z, t | z', t')$ από συνεχείς σημειακές πηγές (Γκαουσιανή σχέση Πλουμίου) για ομογενή τύρβη.

Ολική ανάκλαση στο $z=0$

Υποθέτουμε ότι η παρουσία της επιφάνειας στο $z=0$ μπορεί να υπολογιστεί προσθέτοντας τη συγκέντρωση από μια υποθετική πηγή στο σημείο $z = -z$ στην πηγή που υπάρχει στο σημείο $z = z'$ για $z \geq 0$. Υποθέτουμε επίσης ότι $0 \leq z \leq \infty$. Η τελική έκφραση του $Q_z(z, t | z', t')$ μπορεί να γραφεί ως:

$$Q_z(z, t | z', t') = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma_z} \left[\exp \left(-\frac{(z - z')^2}{2\sigma_z^2} \right) + \exp \left(-\frac{(z + z')^2}{2\sigma_z^2} \right) \right] \quad (5-28)$$

Ολική απορρόφηση στο $z=0$

Στην περίπτωση που η επιφάνεια της Γης είναι τέλειος απορροφητής τότε η συγκέντρωση στο $z=0$ είναι μηδέν. Η μορφή του $Q_z(z, t | z', t')$ έχει ανάλογη μορφή με την περίπτωση της ολικής ανάκλασης με τη διαφορά, ότι τώρα αφαιρούμε την επίδραση από την υποθετική πηγή στο $z = -z'$. Το αποτέλεσμα (για $0 \leq z \leq \infty$) είναι:

$$Q_z(z, t | z', t') = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma_z} \left[\exp\left(-\frac{(z - z')^2}{2\sigma_z^2}\right) - \exp\left(-\frac{(z + z')^2}{2\sigma_z^2}\right) \right] \quad (5-29)$$

Η μέση συγκέντρωση ρύπων από συνεχή πηγή (ολική ανάκλαση) έντασης q σε ύψος h πάνω από την επιφάνεια της Γης δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \langle c(x, y, z) \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{q}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{(x - \bar{u}t')^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) \\ \times \left[\exp\left(-\frac{(z - h)^2}{2\sigma_z^2}\right) + \exp\left(-\frac{(z + h)^2}{2\sigma_z^2}\right) \right] dt' \quad (5-30) \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τη σχέση στο όριο $\sigma_x \rightarrow 0$ (slender plume) με αποτέλεσμα:

$$\langle c(x, y, z) \rangle = \frac{q}{2\pi \bar{u} \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) \times \left[\exp\left(-\frac{(z - h)^2}{2\sigma_z^2}\right) + \exp\left(-\frac{(z + h)^2}{2\sigma_z^2}\right) \right] \quad (5-31)$$

Για επιφάνεια με ολική απορρόφηση $z=0$:

$$\langle c(x, y, z) \rangle = \frac{q}{2\pi \bar{u} \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) \times \left[\exp\left(-\frac{(z - h)^2}{2\sigma_z^2}\right) - \exp\left(-\frac{(z + h)^2}{2\sigma_z^2}\right) \right] \quad (5-32)$$

Στον Πίνακα 5-4 παρουσιάζουμε διάφορες σχέσεις για συγκέντρωση ρύπων που εκπέμπονται από σημειακές συνεχείς και μη πηγές.

Πίνακας 5-4: Σχέσεις διάχυσης από σημειακές Γκαουσιανές πηγές (Πηγή: Seinfeld and Pandis, 1999).

Μέση Συγκέντρωση	Υποθέσεις
Γκαουσιανή σχέση (puff) $\langle c(x, y, z, t) \rangle = \frac{q}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{(x - x' - \bar{u}(t - t'))^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y - y')^2}{2\sigma_y^2}\right) \times \left[\exp\left(-\frac{(z - z')^2}{2\sigma_z^2}\right) + \exp\left(-\frac{(z + z')^2}{2\sigma_z^2}\right) \right]$	Ολική ανάκλαση στο $z=0$ $\bar{u} = (\bar{u}, 0, 0)$ $S = q \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \delta(t - t')$ $0 \leq z \leq \infty$
Γκαουσιανή σχέση (puff) $\langle c(x, y, z, t) \rangle = \frac{q}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{(x - x' - \bar{u}(t - t'))^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y - y')^2}{2\sigma_y^2}\right) \times \left[\exp\left(-\frac{(z - z')^2}{2\sigma_z^2}\right) - \exp\left(-\frac{(z + z')^2}{2\sigma_z^2}\right) \right]$	Ολική απορρόφηση στο $z=0$ $\bar{u} = (\bar{u}, 0, 0)$ $S = q \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \delta(t - t')$ $0 \leq z \leq \infty$
Γκαουσιανή σχέση (puff) $\langle c(x, y, z, t) \rangle = \frac{q}{2\pi H \sqrt{\bar{K}_{xx} \bar{K}_{yy}}} \exp\left(-\frac{(x - x' - \bar{u}(t - t'))^2}{4\bar{K}_{xx}} - \frac{(y - y')^2}{4\bar{K}_{yy}}\right) \times \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \lambda_n z \cos \lambda_n z' \exp[-\lambda_n^2 \bar{K}_{zz}] \right\}$ $\lambda_n = \frac{n\pi}{H}, \bar{K}_{xx} = \frac{1}{2}\sigma_x^2, \bar{K}_{yy} = \frac{1}{2}\sigma_y^2, \bar{K}_{zz} = \frac{1}{2}\sigma_z^2$	Ολική ανάκλαση στο $z=0$ $\bar{u} = (\bar{u}, 0, 0)$ $S = q \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \delta(t - t')$ $0 \leq z \leq H$
Γκαουσιανή σχέση (puff) $\langle c(x, y, z, t) \rangle = \frac{q}{2\pi H \sqrt{\bar{K}_{xx} \bar{K}_{yy}}} \exp\left(-\frac{(x - x' - \bar{u}(t - t'))^2}{4\bar{K}_{xx}} - \frac{(y - y')^2}{4\bar{K}_{yy}}\right) \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n^2 + \beta^2) \cos[\lambda_n (H - z')] \cos[\lambda_n (H - z)]}{H(\lambda_n^2 + \beta^2) + \beta} \times \exp(-\lambda_n^2 \bar{K}_{zz})$	Τοπική απορρόφηση στο $z=0$ $\bar{u} = (\bar{u}, 0, 0)$ $S = q \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \delta(t - t')$ $0 \leq z \leq H$

$\lambda_n \tan \lambda_n H = \beta \quad \text{και} \quad \beta = \nu_d / K_{zz}$	
Γκαουσιανή σχέση Πλουμίου $\langle c(x, y, z) \rangle = \frac{q}{2\pi \bar{u} \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) \times \left[\exp\left(-\frac{(z-h)^2}{2\sigma_z^2}\right) + \exp\left(-\frac{(z+h)^2}{2\sigma_z^2}\right) \right]$	Ολική ανάκλαση στο $z=0$ $\bar{u} = (\bar{u}, 0, 0)$ $S = q \delta(x) \delta(y) \delta(z-h)$ Υπόθεση Slender $0 \leq z \leq \infty$
Γκαουσιανή σχέση Πλουμίου $\langle c(x, y, z) \rangle = \frac{q}{2\pi \bar{u} \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) \times \left[\exp\left(-\frac{(z-h)^2}{2\sigma_z^2}\right) - \exp\left(-\frac{(z+h)^2}{2\sigma_z^2}\right) \right]$	Ολική απορρόφηση στο $z=0$ $\bar{u} = (\bar{u}, 0, 0)$ $S = q \delta(x) \delta(y) \delta(z-h)$ Υπόθεση Slender $0 \leq z \leq \infty$
Γκαουσιανή σχέση Πλουμίου $\langle c(x, y, z) \rangle = \frac{2q}{\sqrt{2\pi} \bar{u} \sigma_y H} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi z}{H}\right) \cos\left(\frac{n\pi h}{H}\right) \times \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{H}\right)^2 \frac{\sigma_z^2}{2}\right] \right\} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)$	Ολική ανάκλαση στο $z=0$ $\bar{u} = (\bar{u}, 0, 0)$ $S = q \delta(x) \delta(y) \delta(z-h)$ $0 \leq z \leq h$

5.7 Δισδιάστατη, χρονικά ανεξάρτητη επιφανειακή συνεχής γραμμική πηγή με μεταβαλλόμενες τιμές ταχύτητας και συντελεστή διάχυσης.

Η διάχυση από μια μεγάλης δυναμικότητας συνεχή γραμμική πηγή που εκπέμπει κάθετα στον άνεμο περιγράφεται από την παρακάτω απλοποιημένη εξίσωση (Hanna *et. al.*, 1981):

$$u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial (K_z \partial C / \partial z)}{\partial z} \quad (5-33)$$

με τις εξής οριακές συνθήκες:

$$C \rightarrow 0 \text{ όταν } x = z \rightarrow \infty$$

$$C \rightarrow \infty \text{ όταν } x = z \rightarrow 0$$

$$K_z \frac{\partial C}{\partial z} \rightarrow 0 \text{ όταν } z \rightarrow 0 \text{ και } x > 0$$

$$\int_0^\infty u C dz = Q_l \text{ όταν } x > 0$$

όπου Q_l είναι η δυναμικότητα της συνεχούς γραμμικής πηγής. Η τρίτη κατά σειρά οριακή συνθήκη επιβεβαιώνει, ότι δεν υπάρχει παροχή αέριου ρύπου στο κατώτατο όριο (π.χ. στο έδαφος).

Οι λύσεις του παραπάνω συστήματος αναφέρονται μόνο σε πηγές που βρίσκονται στο επίπεδο του εδάφους. Στη βιβλιογραφία δίνονται οι εξής σχέσεις:

$$K_z = K_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^n \quad (5-34)$$

$$u = u_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^m \quad (5-35)$$

Επομένως η γενική λύση παίρνει τη μορφή:

$$C(x, z) = \frac{Q_l z_1^m (m - n + 2)}{2 u_1 \Gamma(s)} \left[\frac{u_1}{(m - n + 2)^2 z_1^{m-n} K_1 x} \right]^s \times \exp \left[\frac{u_1 z^{m-n+2}}{z_1^{m-n} (m - n + 2)^2 K_1 x} \right] \quad (5-36)$$

όπου: $s = \frac{m+1}{m-n+2}$, και Γ η συνάρτηση γάμμα.

Πίνακας 5-5: Συνάρτηση Γάμμα¹

M	n	S	Γ(s)
0.9	0.1	0.679	1.33
0.8	0.2	0.692	1.31
0.7	0.3	0.708	1.29
0.6	0.4	0.727	1.26
0.5	0.5	0.750	1.23
0.4	0.6	0.778	1.19
0.3	0.7	0.813	1.15
0.2	0.8	0.857	1.11
0.1	0.9	0.917	1.06
0	0	0.5	1.77

Για τις πρώτες 9 γραμμές υποθέτουμε $m=1-n$ ενώ στην τελευταία γραμμή υποθέτουμε σταθερά K και u .

Στην περίπτωση που έχουμε σταθερές τιμές για u και K ($n=m=0$) η λύση είναι Γκαουσιανή:

$$C = \frac{Q_i}{1,23 \, u_1} \left(\frac{u_1}{4 \, K_1 \, x} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{u_1 z^2}{4 \, K_1 \, x} \right) \quad (5-37)$$

¹ $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ που έχει όριο για $n > 0$. Επίσης $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

5.8 Παραδείγματα & Εφαρμογές

Παράδειγμα 1

Υπολογίστε τη συγκέντρωση των ρύπων που εκπέμπονται από μια μη συνεχή επιφανειακή πηγή με σταθερό συντελεστή διάχυσης σε μια διάσταση και μηδενική ταχύτητα ανέμου.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = K \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

Οι οριακές συνθήκες είναι οι εξής:

$$c \rightarrow 0 \quad \text{όταν } t \rightarrow \infty \quad \text{για όλα τα } x.$$

$$c \rightarrow 0 \quad \text{όταν } t \rightarrow 0 \quad \text{για όλα τα } x \text{ εκτός } x=0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} c \, dx = Q$$

όπου Q είναι η στιγμιαία πηγή σε μονάδες μάζας ανά τη μονάδα επιφάνειας, και για λύση έχουμε:

$$\eta = \frac{x^2}{kt}$$

Υποθέτουμε λύση της μορφής:

$$u(x,t) = f(\eta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df(\eta)}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{2x}{kt} \frac{df(\eta)}{d\eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2}{kt} \frac{df(\eta)}{d\eta} + \left(\frac{2x}{kt}\right)^2 \frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{x^2}{kt^2} \frac{df(\eta)}{d\eta}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στην εξίσωση διάχυσης έχουμε:

$$4\eta \frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2} + (2 + \eta) \frac{df(\eta)}{d\eta} = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι συνήθης διαφορική εξίσωση και λύνεται εύκολα (θέτουμε $f'(\eta) = \frac{df(\eta)}{d\eta}$) με αποτέλεσμα:

$$\frac{f''(\eta)}{f'(\eta)} = -\frac{1}{2\eta} - \frac{1}{4} \Rightarrow \ln[\eta^{1/2} f'(\eta)] = -\frac{\eta}{4} + c \Rightarrow f'(\eta) = \frac{A}{\eta^{1/2}} \exp\left(-\frac{\eta}{4}\right)$$

$$\Rightarrow f(\eta) = A \int_{\eta_0}^{\eta} \mu^{-1/2} \exp\left(-\frac{\mu}{4}\right) d\mu$$

$$\zeta = \frac{\eta^{1/2}}{2} = \frac{x}{2(kt)^{1/2}} \Rightarrow d\zeta = \frac{1}{4} \eta^{-1/2} d\eta$$

$$u(x,t) = f(\eta) = g(\zeta) = B \int_{\zeta_0}^{\zeta} \exp(-v^2) dv$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του η έχουμε:

$$c = \frac{1}{(4kt)^{1/2}} \int_0^t \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right) dx$$

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες έχουμε:

$$c = \frac{Q}{(4\pi kt)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right)$$

Η παραπάνω σχέση είναι Γκαουσιανή με τυπική απόκλιση: $\sigma = (2kt)^{1/2}$

Η σχέση μεταξύ σ και k χρησιμοποιείται συχνά για τον υπολογισμό του k από πειραματικές τιμές του σ . Φυσικά η παραδοχή ότι το k είναι σταθερό είναι μια παραδοχή που δεν ισχύει στην πραγματικότητα μια και το k είναι σπάνια σταθερό στο χώρο και χρόνο.

Παράδειγμα 2 Ρυθμός εκπομπής βινυλοχλωριδίου από επιφανειακή πηγή στο επίπεδο του εδάφους.

Μια τετραγωνική επιφάνεια $2.6 \cdot 10^4 \text{ m}^2$ μέσα σε ένα χώρο υγειονομικής ταφής στην περιοχή του Λος Άντζελες εκπέμπει βινυλοχλωρίδιο. Το σημείο μέτρησης Α βρίσκεται 175° νότια και 250m από το κέντρο της επιφανειακής πηγής. Άνεμοι με ταχύτητα που φτάνουν τα 3,08m/s φέρνουν ποσότητες βινυλοχλωριδίου στο σημείο μέτρησης Α, το οποίο βρίσκεται κοντά σε κατοικημένη περιοχή. Κατά τη διάρκεια των μετρήσεων πέντε ημερών μετρήθηκαν συγκεντρώσεις 12, 5, 7, 12 και 9ppb. Υπολογίστε το ρυθμό εκπομπής του βινυλοχλωριδίου σε g/s.

Στο επίπεδο του εδάφους η πιο μεγαλύτερη συγκέντρωση ρύπων βρίσκεται κατά μήκος του άξονα του πλουμίου ($y=0$) με αποτέλεσμα η συγκέντρωση από μια Γκαουσιανή συνεχή πηγή να δίνεται από τη σχέση:

$$c = \frac{Q}{\pi u_x \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{h^2}{2\sigma_z^2}\right) \quad (1)$$

Επειδή οι εκπομπές γίνονται στο επίπεδο του εδάφους έχουμε $h=0$. Το υποθετικό σημείο της πηγής βρίσκεται σε απόσταση x μέσα από τα σύνορα της επιφανειακής πηγής. Η απόσταση αυτή μεταβάλλεται με την υπάρχουσα στην περιοχή μετεωρολογία και παριστάνει μια υποθετική σημειακή πηγή που έχει τα χαρακτηριστικά εκπομπής όπως και η επιφανειακή πηγή. Η τυπική απόκλιση σ_y μιας τέτοιας υποθετικής σημειακής πηγής θα μπορεί να υπολογιστεί θεωρώντας, ότι η μια πλευρά της επιφάνειας ισούται με $4,3 \sigma_y$

(Γκαουσιανή κατανομή). Οπότε $\sigma_y = \frac{w}{4,3}$ όπου w είναι το μήκος μιας πλευράς

της επιφάνειας. Έχουμε $w \cong (2.6 \cdot 10^4 \text{ m}^2)^{1/2} = 161 \text{ m} \Rightarrow \sigma_y = 37,4 \text{ m}$

Βάσει του Πίνακα 4-3 εφαρμόζεται η κλάση ευστάθειας D ή E. Με $\sigma_y = 37,4 \text{ m}$ έχουμε την κλάση ευστάθειας D που αντιστοιχεί σε απόσταση 500 μέτρων από τους πίνακες ευστάθειας Pasquill. Οπότε έχουμε ως αποτέλεσμα η υποθετική σημειακή πηγή να βρίσκεται σε απόσταση $x = 500+250=750 \text{ m}$ από το σημείο μετρήσεων Α. Έχοντας αυτή την απόσταση έχουμε από τους πίνακες ευστάθειας Pasquill $\sigma_y = 55 \text{ m}$ και $\sigma_z = 25 \text{ m}$ για κλάση ευστάθειας D.

Το βινυλοχλωρίδιο έχει μοριακό βάρος $M_A = 62,5 \text{ g/mol}$ και γραμμομοριακό όγκο $9 \cdot 10^{-9} \text{ mole}$. Η συγκέντρωση στον αέρα είναι $\rho_A = y_A M_A p / RT$. Σε κανονικές συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας έχουμε $\frac{RT}{p} = 22,4 \text{ L/mol}$. Αυτό

έχει ως αποτέλεσμα να δώσει $\rho_A = 25,1 \cdot 10^{-9} \text{ g/L}$. Έχουμε από την εξίσωση (1):

$$Q = \pi \rho_A u_x \sigma_y \sigma_z = \pi \left(25,1 \cdot 10^{-9} \frac{\text{g}}{\text{m}^3} \right) 3,08 \frac{\text{m}}{\text{s}} 55 \text{ m} 25 \text{ m} = 0,33 \text{ g/s}$$

Στην περίπτωση που έχουμε ευστάθεια E η εκπομπή θα είναι 0,26 g/s.

Παράδειγμα 3

Υπολογίστε το Δh από ένα σταθμό παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας με τη μέθοδο του Holland. Δίνεται $r_s=4\text{m}$, $T_a=293\text{K}$, $T_s=413\text{K}$, $V_s=15\text{m/s}$, $P=100\text{KPa}$, $u=5\text{m/s}$.

$$\Delta h = \frac{2V_s r_s}{u} \left[1.5 + 2.68 \times 10^{-2} P \left(\frac{T_s - T_a}{T_s} \right) 2r_s \right]$$

Το αποτέλεσμα είναι $\Delta h = 185,5 \text{ m}$

Παράδειγμα 4

Υπάρχει μια συνεχής γραμμική πηγή κάθετη στη διεύθυνση του ανέμου και στο επίπεδο του εδάφους. Έχει μήκος $b \text{ S g Km}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Υποθέστε ότι οι συνθήκες που υπάρχουν είναι τέτοιες ώστε η υπόθεση "slender" να ισχύει (δες Πίνακα 5-4).

α. Παίρνοντας την αρχή του συστήματος συντεταγμένων στο κέντρο της γραμμής, δείξτε, ότι η μέση συγκέντρωση του υλικού στο επίπεδο του εδάφους σε κάθε σημείο στη διεύθυνση του ανέμου (downwind) δίνεται από:

$$\langle c(x, y, 0) \rangle = \frac{S}{(2\pi)^{1/2} \sigma_z u} \left[\text{erf} \left(\frac{b/2 - y}{\sqrt{2} \sigma_y} \right) + \text{erf} \left(\frac{b/2 + y}{\sqrt{2} \sigma_y} \right) \right]$$

β. Για μεγάλες αποστάσεις από την πηγή δείξτε, ότι η συγκέντρωση στο έδαφος στη διεύθυνση του άξονα του πλουμίου ($y=0$) μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση (Seinfeld and Pandis, 1998)

$$\langle c(x, y, 0) \rangle = \frac{S b}{\pi \sigma_y \sigma_z u}$$

Μπορούμε να προσεγγίσουμε τη γραμμική πηγή ως άθροισμα πολλών σημειακών πηγών, η κάθε μία με εκπομπή $Q \, dy$. Για αυτή την παραδοχή υποθέτουμε, ότι η εκπομπή από τη γραμμική πηγή είναι ομογενής. Έχουμε

Ολική εκπομπή = $S = \text{μάζα}/(\text{μήκος}) \times (\text{χρόνος})$

Η διάχυση κατά τη διεύθυνση του ανέμου (x) είναι αμελητέα, οπότε μπορούμε να γράψουμε την Γκαουσιανή λύση ως (για μια σημειακή πηγή):

$$\langle c(x, y, z) \rangle = \frac{q}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp \left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{z^2}{2\sigma_z^2} \right)$$

$$\langle c(x, y, 0) \rangle = \frac{S}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp \left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2} \right)$$

Οπότε για όλη τη γραμμική πηγή έχουμε:

$$\langle c(x, y, 0) \rangle = \frac{S}{\pi \bar{u} \sigma_y \sigma_z} \int_{-b/2}^{b/2} \exp\left(-\frac{(y-y')^2}{2\sigma_y^2}\right) dy'$$

Για να πραγματοποιήσουμε την παραπάνω ολοκλήρωση επιλέγουμε:

$$\beta = \frac{(y-y')}{\sqrt{2}\sigma_y} \Rightarrow y' = y - \sqrt{2}\sigma_y \beta$$

$$\text{και επίσης } dy' = -\sqrt{2}\sigma_y d\beta$$

$$\text{με αποτέλεσμα: } \langle c(x, y, 0) \rangle = \frac{S}{\pi \sigma_y \sigma_z \bar{u}} \int_{\frac{y-b/2}{\sqrt{2}\sigma_y}}^{\frac{y+b/2}{\sqrt{2}\sigma_y}} \exp(-\beta^2) (\sqrt{2}\sigma_y) d\beta$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια της συνάρτησης λάθους (erf): $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\beta^2} d\beta = \text{erf}(-x)$ οπότε:

$$\langle c(x, y, 0) \rangle = \frac{S}{\sqrt{2\pi} \sigma_z \bar{u}} \left[\text{erf}\left(\frac{b/2 - y}{\sqrt{2}\sigma_y}\right) + \text{erf}\left(\frac{b/2 + y}{\sqrt{2}\sigma_y}\right) \right]$$

β. Για $y=0$

$$\langle c(x, 0, 0) \rangle = \frac{S}{\sqrt{2\pi} \sigma_z \bar{u}} \text{erf}\left(\frac{b}{2\sqrt{2}\sigma_y}\right)$$

Η συνάρτηση λάθους μπορεί να εκφραστεί σε σειρά και για μικρές τιμές των όρων μέσα στη συνάρτηση μπορούμε να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση με τον πρώτο όρο της ανάπτυξης:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[x - \frac{x^3}{3} + \dots \right]$$

$$\text{οπότε για μικρά } x: \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x$$

$$\langle c(x \rightarrow \infty, 0, 0) \rangle = \frac{2S}{\sqrt{2\pi} \sigma_z \bar{u}} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) \left(\frac{b}{2\sqrt{2}\sigma_y} \right) = \frac{Sb}{\pi \sigma_y \sigma_z \bar{u}}$$

Η παραπάνω έκφραση είναι ισοδύναμη για εκπομπές από σημειακή πηγή για ολική εκπομπή Q_b .

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Υποθέστε ότι κυψελίδα έχει διαστάσεις $\Delta x=5\text{km}$, $\Delta y=4\text{km}$ και $\Delta z=0.1\text{km}$ και ότι οι αριθμητικές ταχύτητες στη δύση, ανατολή, νότο, βορρά και η ταχύτητα στο κατώτερο επίπεδο z είναι αντίστοιχα:

$$u_1=+3$$

$$u_2=+4$$

$$v_3=-3$$

$$v_4=+2$$

$$w_5=+2$$

Εάν η Ατμόσφαιρα είναι ασυμπίεστη, ποιά είναι η ταχύτητα w_6 στην κορυφή της κυψελίδας;

Άσκηση 2

Οι Murphy & Nelson έχουν δείξει, ότι η εξίσωση Gauss μπορεί να τροποποιηθεί ώστε να περιλαμβάνει την ξηρή εναπόθεση με ταχύτητα εναπόθεσης v_d και με τροποποίηση του ρυθμού εκπομπής q που συνήθως λαμβάνεται σταθερός. Στη νέα προσέγγιση έχουμε μία πηγή που ο ρυθμός εκπομπής $q(t)$ μεταβάλλεται ως συνάρτηση του χρόνου μεταφοράς t όπου:

$$q(t) = q_o \exp \left\{ - \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} v_d \int_0^t \frac{1}{\sigma_z(t')} \exp \left(\frac{h^2}{2\sigma_z^2(t')} \right) dt' \right\}$$

Αποδείξτε την παραπάνω σχέση και έπειτα δείξτε ότι εάν $\sigma_z=(2K_{zz}t)^{1/2}$ τότε:

$$q(t) = q_o \exp \left\{ \frac{2v_d t^{1/2}}{(\pi K_{zz})^{1/2}} \right\}$$

Άσκηση 3

Εργοστάσιο παραγωγής ενέργειας καταναλίσκει 10^4 kg/h κάρβουνο (λιγνίτη) που περιέχει 2.5% θείο. Η εκπομπή γίνεται από καμινάδα ύψους 70m. Η ανύψωση του πλουμίου είναι 30m, οπότε το ενεργό ύψος της καμινάδας είναι 100m. Ο αέρας τη μέρα που μας ενδιαφέρει έχει ταχύτητα 4 m/s και αναφερόμαστε σε μια θερινή ηλιόλουστη ημέρα χωρίς αναστροφή. Χρησιμοποιείστε τις παραμέτρους Pasquill-Gifford ώστε να :

(α) Υπολογίσετε (γραφική παράσταση) το επιφανειακό επίπεδο συγκέντρωσης του SO_2 στο κέντρο του πλουμίου για αποστάσεις από 100m σε 10Km σε λογαριθμική κλίμακα (log-log),

(β) Κάνετε γραφική παράσταση της επιφανειακής συγκέντρωσης του διοξειδίου του θείου κατά πλάτος του πλουμίου σε αποστάσεις μεταξύ 200m και 1Km από την πηγή,

(γ) Κάνετε τη γραφική παράσταση της κατακόρυφης συγκέντρωσης πάνω στο κέντρο του πλουμίου από το επίπεδο του εδάφους μέχρι ύψους 500m για αποστάσεις 200m, 1km & 5km.

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 5

Hanna, S.R., G.A.Briggs, R.P.Hosker, (1981), **Handbook on Atmospheric Diffusion**, Technical Information Center, U.S. Department of Energy.

K.B.Schnelle, P.R.Dey, (1999), **Atmospheric Dispersion Modeling Compliance Guide**, McGraw-Hill.

Seinfeld, J. H. and Pandis, S. N., (1998), **Atmospheric Chemistry and Physics**, John Wiley & Sons.

Slade D., (1968), **Meteorology and Atomic Energy**, U. S. Atomic Energy Commission. Office of Information Services; 1968.