



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Εργαστήριο Φυσικής Ι

Σχολών ΜΗΧΟΠ και ΜΗΠΕΡ

physicslab@isc.tuc.gr

Εισαγωγή στην Θεωρία Σφαλμάτων και Γραφικές Παραστάσεις

Επιμέλεια παρουσίασης: Δρ. Ναθαναήλ Κορτσαλιουδάκης,
Φυσικός, Εργαστηριακό Διδακτικό Προσωπικό

Για την παρούσα έκδοση συνεργάστηκαν οι
Δρ. Γλυτσός Θεόδωρος
Δρ. Παπαδόπουλος Θανάσης
Δρ. Σπυριδάκη Αθηνά
Κανάκης Ιωάννης
Σφακιωτάκης Στέλιος

Εισαγωγή(I)

- Η Φυσική είναι μια επιστήμη που στηρίζεται κατ' εξοχή στο **πείραμα**.
- Επομένως ο σχεδιασμός ενός **ελεγχόμενου πειράματος** στο εργαστήριο έχει σαν σκοπό τον έλεγχο ή την «επαλήθευση» κάποιας συμπερασμάτων στα πλαίσια μιας θεωρίας, την μέτρηση κάποιων φυσικών μεγεθών, την «ανίχνευση» κάποιων θεωρητικών οντοτήτων (πχ του ηλεκτρονίου) ή την μέτρηση κάποιων ιδιοτήτων τους.
- Η ανάπτυξη μιας φυσικής θεωρίας είναι πάντα διαδικασία **αλληλεπίδρασης θεωρίας και πειράματος** που αρχίζει και τελειώνει με παρατηρήσεις ή (και)πειράματα.

Εισαγωγή(II)

Τα πειράματα στο **εκπαιδευτικό εργαστήριο** της Φυσικής έχουν ως σκοπό να δώσουν μια **αρχική πειραματική εμπειρία στον φοιτητή** ώστε αυτός

- να εξασκηθεί πρακτικά στο τρόπο διεξαγωγής πειραμάτων,
- να εξοικειωθεί με την λειτουργία και τη χρήση οργάνων μέτρησης καθώς και με μεθόδους ανάλυσης δεδομένων
- αλλά επίσης και να γνωρίσει τη φιλοσοφία που διέπει την όλη διαδικασία ενός πειράματος.
- Όλα τα πειράματα ξεκινούν με τις **πειραματικές μετρήσεις** και την συλλογή των **εργαστηριακών δεδομένων**.
- **Αλλά τι είναι μέτρηση;;;;;**

ΜΕΤΡΗΣΗ (I)

Μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους είναι η διεργασία σύγκρισης του με ένα ομοειδές μέγεθος που σχετικώς αυθαίρετα το ορίζουμε σαν μονάδα. Αποτέλεσμα αυτής της διεργασίας είναι η **αριθμητική τιμή** του μεγέθους, που συνοδεύεται από τις κατάλληλες μονάδες (π.χ.3 kg, 5.5 m, 8 s).

Ακρίβεια (accuracy) μιας μέτρησης είναι αυτή που χαρακτηρίζει το πόσο αξιόπιστη είναι. Η ακρίβεια αυτή εξαρτάται από διάφορα **σφάλματα** τα οποία υπεισέρχονται κατά τη μέτρηση, είτε όταν αυτή είναι **άμεση**, είτε όταν αυτή είναι **έμμεση** δηλαδή όταν η τιμή του μετρούμενου μεγέθους είναι αποτέλεσμα αλγεβρικού συνδυασμού τιμών, που έχουν προκύψει από άμεσες μετρήσεις.

ΜΕΤΡΗΣΗ (II)

Όταν μετράμε ένα μέγεθος πολλές φορές, αυτό που προσέχουμε να δούμε είναι αν βρίσκουμε το ίδιο περίπου αποτέλεσμα κάθε φορά. Αυτό γίνεται γιατί η πιθανότερη τιμή ενός μεγέθους που προσεγγίζει την **πραγματική** τιμή είναι η **Μέση τιμή** και προκύπτει ως αποτέλεσμα πολλών μετρήσεων, με την προϋπόθεση ότι οι μετρήσεις δίνουν σχετικώς κοντινές τιμές (εφ' όσον δεν υπάρχουν συστηματικά σφάλματα).

Μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι βρήκαμε την πιθανότερη πραγματική πειραματική τιμή ενός μεγέθους (δηλαδή την **Μέση Τιμή**) αν επαναλάβουμε τη μέτρησή του πολλές φορές, κάτω πάντα από τις ίδιες συνθήκες και οι αριθμητικές τιμές που βρίσκουμε διαφέρουν πολύ λίγο μεταξύ τους.



ΘΕΩΡΙΑ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

ΣΦΑΛΜΑΤΑ

- **Πειραματικό σφάλμα (ή αβεβαιότητα)** μιας μέτρησης ορίζουμε την διαφορά μεταξύ της «πραγματικής» τιμής ενός μεγέθους και της μετρούμενης πειραματικής τιμής.

$$\text{Σφάλμα} = \chi_{\text{πραγμ.}} - \chi_{\text{πειραμ.}}$$

ΕΙΔΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Τα σφάλματα τα διακρίνουμε στις παρακάτω κατηγορίες :

- Ακούσια σφάλματα ή λάθη
- Συστηματικά σφάλματα
- Στατιστικά ή τυχαία σφάλματα

Τα ακούσια σφάλματα

- Τα σφάλματα αυτής της κατηγορίας μπορεί να οφείλονται σε λανθασμένη ανάγνωση των αποτελεσμάτων και καταγραφή των παρατηρήσεων - μετρήσεων ή στη κακή τους επεξεργασία.
- Η αποφυγή τους στηρίζεται στην ιδιαίτερη προσοχή του πειραματιστή.

Τα συστηματικά σφάλματα (I)

Είναι εκείνα που επιδρούν στο αποτέλεσμα συνήθως κατά την ίδια φορά, όσες φορές και αν επαναλάβουμε τη μέτρηση κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Τα σφάλματα αυτά οφείλονται κυρίως:

- Στην μη σωστή **βαθμονόμηση** (calibration) των οργάνων.
(α) Κακός σχεδιασμός της κλίμακας του οργάνου (πχ ενός χάρακα με πραγματικό μήκος 99,9cm αντί 100,0cm).
(β) Μετάθεση του μηδενός του οργάνου («σφάλμα του μηδενός»).
- **Από προσεγγίσεις στις εξισώσεις ή στις σχέσεις που χρησιμοποιούνται**, προκειμένου να αντικαταστήσουμε πολύπλοκους τύπους με απλούστερες εξισώσεις και να καταλήξουμε σε ένα προσεγγιστικό αποτέλεσμα.

Τα συστηματικά σφάλματα(II)

Για παράδειγμα, κάνουμε συστηματικό σφάλμα όταν για να μετρήσουμε την περίοδο του απλού εκκρεμούς, χρησιμοποιούμε την προσεγγιστική σχέση

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

για μικρές γωνίες θ ($\theta \approx \sin\theta$), ενώ η ακριβής σχέση δίνεται από τη σειρά:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\theta}{2} + \dots \right)$$

Η εξάλειψη των συστηματικών σφαλμάτων εξαρτάται από την ικανότητα και την μεγάλη εργαστηριακή πείρα του πειραματιστή.

Τα τυχαία σφάλματα

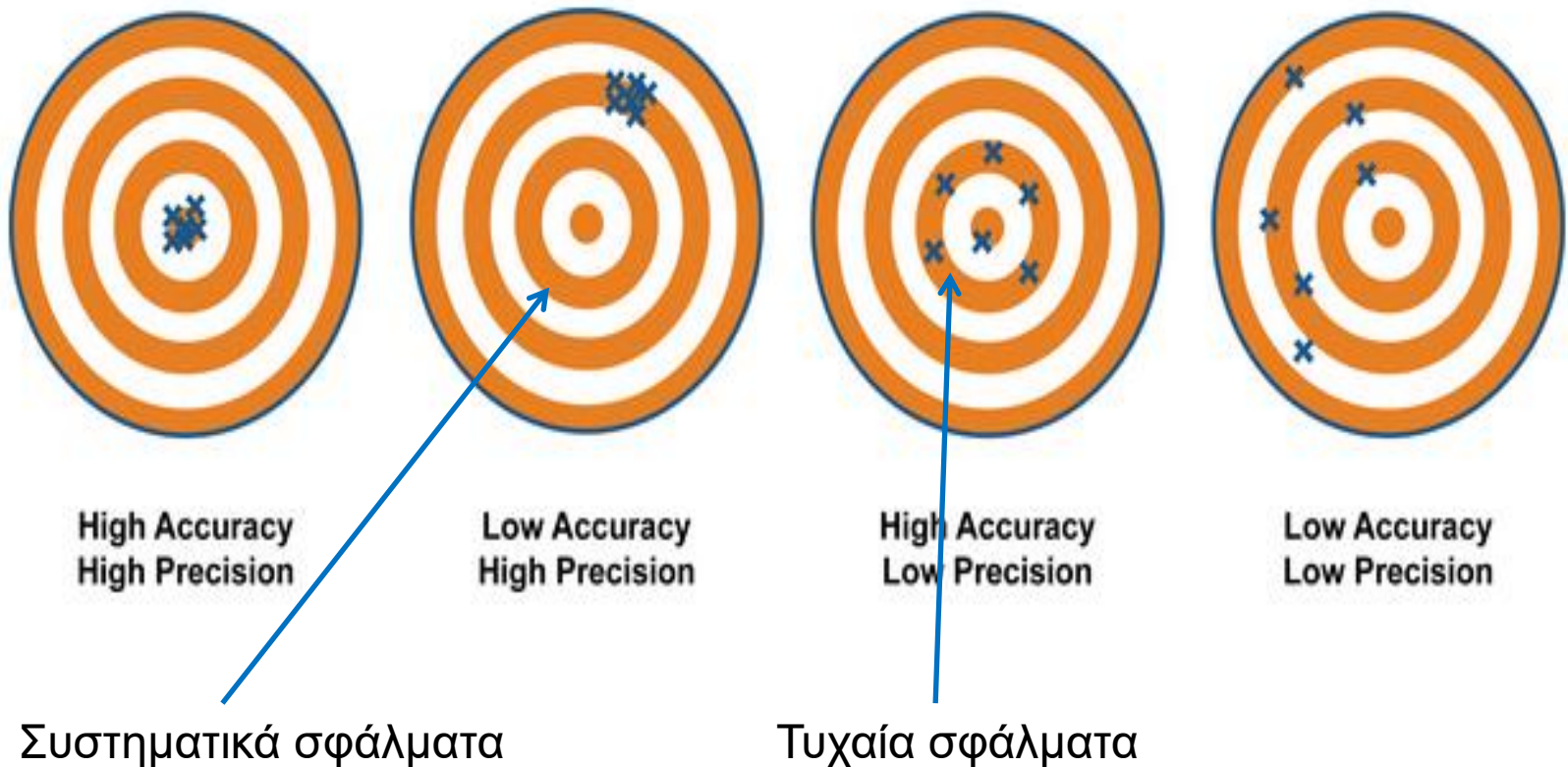
- Τα σφάλματα αυτά οφείλονται σε διάφορα αίτια που **δεν ελέγχει ο πειραματιζόμενος** (π.χ. η εκτίμηση ανάγνωσης ενός αναλογικού οργάνου, ακαθόριστες μεταβολές σε διάφορες πειραματικές συνθήκες που υποτίθεται ότι δεν αλλάζουν κ.α.), συμβαίνουν **τυχαία** και δεν επαναλαμβάνονται αναγκαστικά με τον ίδιο τρόπο, όταν επαναληφθεί η μέτρηση. **Είναι παρόντα ακόμα κι όταν τα ακούσια και τα συστηματικά σφάλματα απαλειφθούν.**
- Ορισμένα συστηματικά σφάλματα μπορούμε πιθανώς να τα αποφύγουμε. Τα τυχαία σφάλματα μπορούμε μόνο να τα περιορίσουμε.
- Στο εξής όταν θα μιλάμε για **σφάλματα** θα εννοούμε τα **τυχαία**.

Accuracy (ακρίβεια) vs. Precision(αξιοπιστία)

Η **ακρίβεια (Accuracy)** μιας σειράς πειραματικών μετρήσεων συνδέεται με τα **συστηματικά σφάλματα** ενώ η **αξιοπιστία (στατιστική ακρίβεια) (Precision)** με τα **τυχαία σφάλματα**.

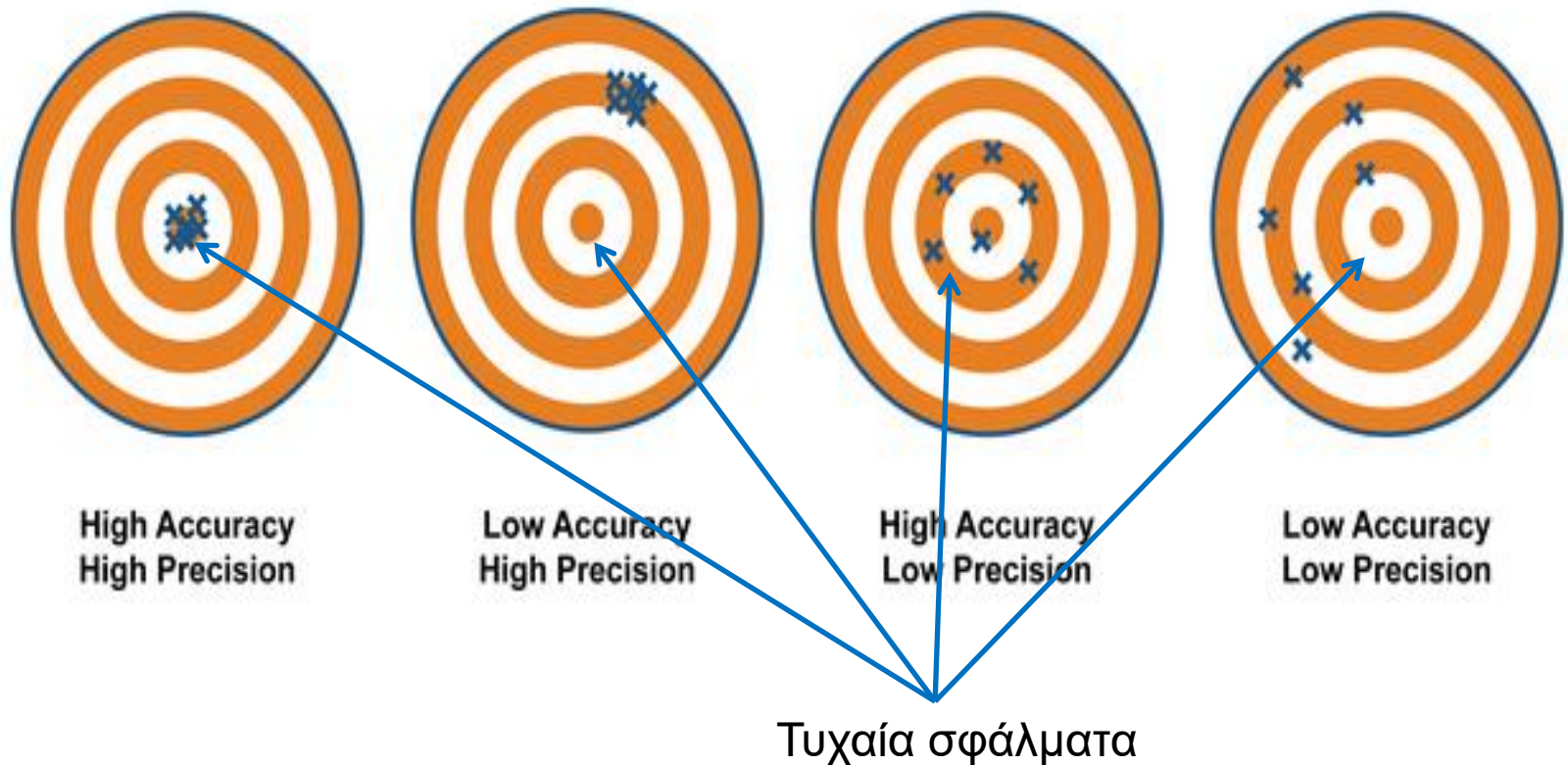
Πραγματική τιμή :το κέντρο του στόχου

Πειραματικές τιμές: τα σημάδια τύπου x



Accuracy (ακρίβεια) vs. Precision(αξιοπιστία)

τυχαία σφάλματα υπάρχουν πάντα !!



Έκφραση της Ακρίβειας (accuracy) μιας μέτρησης

Η **ακρίβεια** (accuracy) μέτρησης ενός οργάνου υποδηλώνει τα **όρια** μέσα στα οποία κυμαίνεται η τιμή που μπορεί να μας δώσει το συγκεκριμένο όργανο στην μέτρηση μιας φυσικής ποσότητας.

Η ακρίβεια στη μέτρηση ενός μεγέθους μπορεί να εκφρασθεί με βασικά δύο (2) τρόπους:

- **Απόλυτα πάνω στη μετρούμενη τιμή**

Παρ.1: Μάζα 50 ± 2 g, που σημαίνει ότι η τιμή της μάζας κυμαίνεται από 48 g μέχρι 52 g.

- **Ποσοστιαία (%) στην μετρούμενη τιμή**

Παρ.1: Αντίσταση $R = 680 \Omega \pm 5\% * 680 \Omega = (680 \pm 34)\Omega$, που σημαίνει ότι η τιμή της αντίστασης κυμαίνεται από 646Ω μέχρι 714Ω.

Παρ.2: Μια ζυγαριά με **ακρίβεια $\pm 1\%$** επί της μετρούμενης τιμής, χρησιμοποιείται για την μέτρηση μιας **μάζας**. Στην κλίμακα της ζυγαριάς διαβάζεται η τιμή 12 gr. Η πιθανότερη τιμή της πραγματικής τιμής της μάζας κυμαίνεται στην περιοχή από **11,88 g μέχρι 12,12 g**.

$$m = (12,00 \pm 1\% * 12)g = (12,00 \pm 0,12)g$$

Ακρίβεια (accuracy) μέτρησης οργάνου (II)

Όταν δεν γνωρίζουμε από τον κατασκευαστή την ακρίβεια μέτρησης ενός οργάνου θα πρέπει να εκτιμήσουμε μόνοι μας την ακρίβεια των μετρήσεων μας. Η εκτίμηση που θα κάνουμε βασίζεται στην **κλίμακα του οργάνου, στον τύπο του οργάνου** (αναλογικό ή ψηφιακό) καθώς και στις **συνθήκες μέτρησης**. Συνήθως αυτή η εκτίμηση ονομάζεται **σφάλμα ανάγνωσης του οργάνου**.

Το σφάλμα ανάγνωσης του οργάνου ταυτίζεται τις περισσότερες φορές με την **διακριτική ικανότητα του οργάνου (διακριτότητα)** που συνήθως είναι και η μικρότερη υποδιαίρεσή του.

Διακριτότητα ή διακριτική ικανότητα(resolution) ενός οργάνου

Η διακριτότητα ή διακριτική ικανότητα (resolution) ενός οργάνου είναι η μικρότερη δυνατή διαφοροποίηση στη μέτρηση ενός μεγέθους που μπορεί να μετρηθεί από το συγκεκριμένο όργανο.

Π.χ. ένα ψηφιακό ρολόι με ένδειξη 3 ψηφίων (μέγιστη ένδειξη 99,9 s) έχει διακριτική ικανότητα 0,1 s (όση είναι η μονάδα του τελευταίου ψηφίου της απεικόνισης). Δηλαδή μπορεί να απεικονίσει τιμή χρόνου ίση με 27,3 s ή μια άλλη 27,4 s αλλά δεν μπορεί να μετρήσει ενδιάμεση τιμή.

Ακρίβεια (accuracy) μέτρησης οργάνου (II)- Σφάλμα ανάγνωσης βάσει διακριτικής ικανότητας

Υπενθύμιση: Το σφάλμα ανάγνωσης του οργάνου ταυτίζεται τις περισσότερες φορές με την **διακριτική ικανότητα του οργάνου (διακριτότητα)** που συνήθως είναι και η μικρότερη υποδιαίρεσή του.

Για παράδειγμα για έναν χάρακα που έχει ως μικρότερη υποδιαίρεση το 1mm και μετράμε ένα μήκος 132 mm, η μέτρησή μας έχει σφάλμα (αβεβαιότητα) 1mm και μπορούμε να γράψουμε ότι το μήκος X που μετρήσαμε είναι:

$$X = (132 \pm 1) \text{ mm}$$

ή

$$X = (0,132 \pm 0,001) \text{ m}$$

Ακρίβεια (accuracy) μέτρησης οργάνου (II)

Αν για παράδειγμα για έναν χάρακα που έχει ως μικρότερη υποδιαίρεση το 0,1 mm και μετράμε ένα μήκος 132,2 mm, η μέτρησή μας έχει σφάλμα (αβεβαιότητα) 0,1 mm και μπορούμε να γράψουμε ότι το μήκος X που μετρήσαμε είναι:

$$X = (132,2 \pm 0,1) \text{ mm}$$

ή

$$X = (0,1322 \pm 0,0001) \text{ m}$$

Ακρίβεια (accuracy) μέτρησης οργάνου (II)

Αν για παράδειγμα για έναν χάρακα που έχει ως μικρότερη υποδιαίρεση το 1 cm και μετράμε ένα μήκος 13 cm, η μέτρησή μας έχει σφάλμα (αβεβαιότητα) 1 cm και μπορούμε να γράψουμε ότι το μήκος X που μετρήσαμε είναι:

$$X = (13 \pm 1) \text{ cm}$$

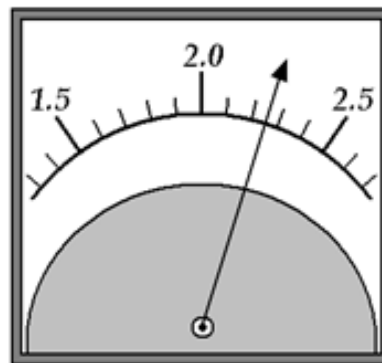
ή

$$X = (0,13 \pm 0,01) \text{ m}$$

Εκτίμηση (estimation) της ανάγνωσης

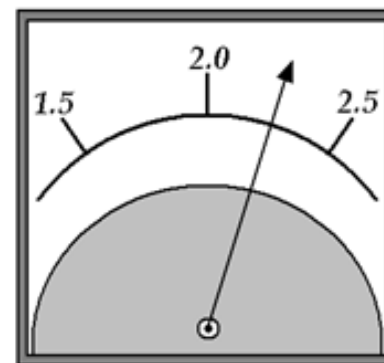
Κατά την μέτρηση ενός μεγέθους, πολλές φορές απαιτείται η εκτίμηση (estimation) της ανάγνωσης, της αριθμητικής του τιμής, επειδή το όργανο που χρησιμοποιείται δεν παρέχει την απαραίτητη διακριτική ικανότητα.

Π.χ. στο σχήμα (1α) δείχνεται η κλίμακα ενός πολύμετρου με διακριτική ικανότητα 0,1 της μονάδας. Η βελόνα είναι τοποθετημένη μεταξύ των χαραγών 2,2 και 2,3. Η θέση θα μπορούσε να εκτιμηθεί στα 2,25. Το τελευταίο ψηφίο, επειδή προέρχεται από εκτίμηση, σημειώνεται ιδιαίτερα.



(α)

(α) Κλίμακα οργάνου με διακριτικότητα 0.1



(β)

(β) Κλίμακα οργάνου με διακριτικότητα 0.5

ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΨΗΦΙΑ

Ο όρος «σημαντικά ψηφία» σε ένα αριθμητικό αποτέλεσμα αναφέρεται στον **αριθμό των ψηφίων** για τα οποία ο πειραματιστής έχει εμπιστοσύνη ότι είναι ακριβή. Ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων καθορίζεται από την συσκευή μέτρησης και την μέθοδο μέτρησης.

Σημαντικά ψηφία (significant digits) ενός αριθμού, ονομάζονται όλα τα ψηφία του αριθμού, εκτός από τα μηδενικά **στην αρχή του**, που δηλώνουν την τάξη των υπόλοιπων ψηφίων.

Π.χ. στον αριθμό **0,007040** τα τρία πρώτα δεν είναι σημαντικά ψηφία και χρησιμεύουν για να υποδηλώσουν την τάξη των άλλων ψηφίων.

Αντίθετα το 0 μεταξύ του 7 και του 4 καθώς και το 0 στο τέλος του αριθμού είναι σημαντικά ψηφία.

Επίσης το 0 στο τέλος του αριθμού είναι απαραίτητο, διότι συμβάλλει στον προσδιορισμό της ακρίβειας του.

Επομένως ο παραπάνω αριθμός **έχει 4 σημαντικά ψηφία**.

Αυτό φαίνεται επίσης καθαρά αν ο αριθμός γραφεί σε εκθετική μορφή:

$$0,007040 = 7040 \cdot 10^{-6}$$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΨΗΦΙΑ (συνέχεια)

Στην περίπτωση μεγάλων ακέραιων αριθμών είναι προτιμότερο ο αριθμός να γράφεται **σε εκθετική μορφή**, ώστε να είναι εμφανή τα σημαντικά ψηφία, επειδή τα μηδενικά στο τέλος χρησιμεύουν είτε για να δηλώσουν την τάξη των άλλων ψηφίων είτε για να δηλώσουν σημαντικά ψηφία.

Π.χ. ο αριθμός 527000 πρέπει να γράφεται $5,27 \times 10^5$ στην περίπτωση που έχει 3 σημαντικά ψηφία ή $5,270 \times 10^5$ αν έχει 4 σημαντικά ψηφία

Διάφορα άλλα παραδείγματα:

1.35	(3 σημαντικά)
101.12	(5 σημαντικά)
500.0	(4 σημαντικά)
5×10^2	(1 σημαντικό)
0.107	(3 σημαντικά)
1.520×10^5	(4 σημαντικά)

Ερώτηση

Υπάρχει διαφορά ανάμεσα στις παρακάτω πειραματικές μετρήσεις του μήκους;

25,10cm

25,1 cm

Πώς αναγράφονται η Διακριτική Ικανότητα/ Ακρίβειας Μέτρησης οργάνου βάσει σημαντικών ψηφίων

Παραδείγματα

1) i) Η μέτρηση $X=(13 \pm 1)$ cm ή $X=(0,13 \pm 0,01)$ m πόσα σημαντικά ψηφία έχει;

2 σημαντικά ψηφία

ii) Ποια είναι η μικρότερη υποδιαίρεση που έχει ο χάρακάς μου;

1cm

iii) Τι ισχύει για τη μέτρηση $X=(0,132 \pm 0,001)$ m;

**3 σημαντικά ψηφία,
ακρίβεια χάρακα $0,001\text{m}=1\text{mm}$**

2) Ζυγίζω με ζυγαριά ακρίβειας/διακριτικής ικανότητας 0,1g κάτι που έχει μάζα μισού κιλού. Πώς θα γραφεί το αποτέλεσμα της ζύγισης;

(500,0 $\pm$ 0,1) g ή (0,5000 $\pm$ 0,0001) kg

Πώς αναγράφονται η Διακριτική Ικανότητα/ Ακρίβειας Μέτρησης οργάνου βάσει σημαντικών ψηφίων

Παραδείγματα

3) i) Μετράω με χρονόμετρο ακρίβειας/διακριτικής ικανότητας 1 εκατοστού του δευτερολέπτου μια κίνηση που διαρκεί 10 δευτερόλεπτα. Πώς θα γραφεί το αποτέλεσμα της μέτρησης;

$$(10,00 \pm 0,01) \text{ s}$$

ii) Αν η κίνηση είχε διαρκέσει 10 δευτερόλεπτα και 6 εκατοστά του s;

$$(10,06 \pm 0,01) \text{ s}$$

iii) Αν το χρονόμετρο είχε διακριτική ικανότητα 5 εκατοστά του δευτερολέπτου και η κίνηση είχε διάρκεια 10 δευτερόλεπτα και 20 εκατοστά του s;

$$(10,20 \pm 0,05) \text{ s}$$

iv) Θα μπορούσε, με το παραπάνω χρονόμετρο, να είχε ληφθεί μέτρηση 10,23 s;

Όχι, γιατί η διακριτική ικανότητα είναι ανά 0,05 s, άρα μια μέτρηση μπορεί να είναι μόνο πολλαπλάσιο αυτού.

Εκτέλεση πράξεων μεταξύ μετρήσεων – Έμμεσες μετρήσεις

Προσοχή πρέπει να δίνεται κατά την εκτέλεση αριθμητικών πράξεων που γίνονται μεταξύ μεγεθών που έχουν μετρηθεί. Η αναγραφή του αποτελέσματος ακολουθεί συγκεκριμένους κανόνες.

Π.χ. για την μέτρηση ενός εμβαδού μετρήθηκαν οι διαστάσεις $L_1 = 1,37\text{mm}$ και $L_2 = 2,56\text{mm}$.

Το εμβαδόν υπολογίζεται από την σχέση $s = L_1 \times L_2 = 3,51 \text{ mm}^2$ (τρία σημαντικά ψηφία –δύο δεκαδικά), και όχι 3.5072mm^2 .

Αυτό σημαίνει ότι το αποτέλεσμα που προκύπτει από την πράξη δύο μετρήσεων (*έμμεση μέτρηση*) δεν μπορεί να έχει καλύτερη ακρίβεια από τις μετρήσεις που την συνιστούν (*άμεση μέτρηση*)

ΠΡΑΚΤΙΚΟΙ ΚΑΝΟΝΕΣ

✓ Κατά τον **πολλαπλασιασμό ή τη διαίρεση αριθμών**, ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων του αποτελέσματος είναι ίσος προς τα σημαντικά ψηφία του αριθμού που πολλαπλασιάζεται ή διαιρείται και έχει τα λιγότερα σημαντικά ψηφία.

π.χ: $1,560 \times 7,80 = 12,168 \rightarrow 12,2$

διότι τα λιγότερα σημαντικά τα έχει ο αριθμός 7,80 και είναι τρία, όσα πρέπει να είναι και αυτά του αποτελέσματος.

✓ Κατά την **πρόσθεση ή την αφαίρεση** το αποτέλεσμα έχει τόσα δεκαδικά όσα είναι και αυτά του αριθμού που προστίθεται ή αφαιρείται με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία.

π.χ: $2,15 + 0,1 = 2,25 \rightarrow 2,3$

(με 1 δεκαδικό όσα και ο αριθμός 0,1)

ΚΑΝΟΝΕΣ ΣΤΡΟΓΓΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΑΡΙΘΜΩΝ

Οι κανόνες που καθορίζουν τη στρογγυλοποίηση ενός αριθμού είναι:

- ✓ Σύμφωνα με τους κανόνες των σημαντικών ψηφίων, καθορίζουμε ποια θα πρέπει να είναι η δεκαδική θέση του τελευταίου ψηφίου
- ✓ Αφού καθορίζουμε τη δεκαδική θέση του τελευταίου ψηφίου, κοιτάμε αν το ψηφίο που βρίσκεται δεξιά από το τελευταίο αυτό σημαντικό ψηφίο είναι μικρότερο από 5. Στη περίπτωση αυτή απορρίπτουμε όλα τα ψηφία που είναι στα δεξιά από αυτό.
- ✓ Αν το ψηφίο που βρίσκεται δεξιά από το τελευταίο αυτό σημαντικό ψηφίο είναι μεγαλύτερο από 5, τότε αυξάνουμε το τελευταίο αυτό σημαντικό ψηφίο κατά μία μονάδα και αυτή απορρίπτουμε όλα τα ψηφία που είναι στα δεξιά του.
- ✓ Αν το ψηφίο που βρίσκεται δεξιά από το τελευταίο αυτό σημαντικό ψηφίο είναι ίσο με το 5, τότε αν το τελευταίο σημαντικό ψηφίο είναι περιττός αριθμός στρογγυλοποιούμε προσθέτοντας μια μονάδα ενώ αν είναι άρτιος αριθμός το αφήνουμε όπως είναι.

Παράδειγματα:

α) Έστω ότι μετά την εφαρμογή των κανόνων των σημαντικών ψηφίων θέλουμε να στρογγυλοποιήσουμε τον αριθμό 23,4677 στο πρώτο δεκαδικό ψηφίο. Το τελευταίο σημαντικό ψηφίο είναι το 4. Το ψηφίο δεξιά από το 4 είναι το 6, (δηλαδή μεγαλύτερο από το 5). Άρα σύμφωνα με τους κανόνες στρογγυλοποίησης το 4 θα αυξηθεί κατά μία μονάδα και ο αριθμός θα γραφτεί 23,5.

β) Έστω ότι θέλουμε να στρογγυλοποιήσουμε τον αριθμό 9,375 στο δεύτερο δεκαδικό ψηφίο. Το τελευταίο σημαντικό ψηφίο είναι το 7. Το ψηφίο δεξιά από το 7 είναι το 5. Άρα σύμφωνα με τους κανόνες στρογγυλοποίησης επειδή το 7 είναι περιττός αριθμός θα αυξηθεί κατά μία μονάδα και ο αριθμός θα γραφτεί 9.38.

Παραδείγματα

1) i) Ζητάω να υπολογίσω την απόσταση που έχει διανύσει ένα όχημα το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, έχοντας μετρήσει ταχύτητα 70,6 m/s και χρονικό διάστημα 5,24 s:

$$\text{Απόσταση} = 70,6 * 5,24 = 369,944 \text{ m} \rightarrow \text{370 m}$$

ii) Αν οι μετρήσεις μου ήταν: ταχύτητα 70,60 m/s και χρόνος 5,24 s;

$$\text{Απόσταση} = 70,60 * 5,24 = 369,944 \text{ m} \rightarrow \text{370 m}$$

iii) Αν οι μετρήσεις μου ήταν: ταχύτητα 70,60 m/s και χρόνος 5,240 s;

$$\text{Απόσταση} = 70,60 * 5,240 = 369,944 \text{ m} \rightarrow \text{369,9 m}$$

2) Αν έχω ζυγίσει δύο προϊόντα με διαφορετικές ζυγαριές και έχω μετρήσει Μάζα A= 30,47 g και Μάζα B= 100,1 g, πόση θα είναι η συνολική μάζα;

$$\text{Μάζα} = 30,47 + 100,1 = 130,57 \text{ g} \rightarrow \text{130,6 g}$$

ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΚΑΤΑ ΤΙΣ ΑΜΕΣΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ – ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ

Αν επαναλάβουμε μια σειρά μετρήσεις με τον ίδιο τρόπο και κάτω από τις ίδιες συνθήκες, τότε μπορούμε να μελετήσουμε από στατιστική άποψη τις αποκλίσεις των τιμών που καταγράψαμε από τη **μέση τιμή** η οποία είναι η **καλύτερη εκτίμηση** που έχουμε της “πραγματικής τιμής”.

Ο μέσος όρος ή μέση τιμή x_{avg} (average, mean value) μιας σειράς n μετρήσεων δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{x} = x_{avg} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$


Ορίζουμε ως **απόκλιση** μιας μέτρησης από τη μέση τιμή το μέγεθος :

$$d_i = x_i - \bar{x}$$

και παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές. Αποτελεί **εκτίμηση** του σφάλματος κάθε μέτρησης αφού η μέση τιμή είναι η πιο αντιπροσωπευτική τιμή του φυσικού μεγέθους που μετράμε

Τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής

$$\sigma_{avg} = \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}$$

A/A Μέτρησης	Χρόνος (sec)
1	6.06
2	5.98
3	6.04
4	6.22
5	6.75
6	6.40
7	6.06
8	6.07
9	6.06
10	6.03
11	6.04
12	6.00
13	5.97
14	6.00
15	6.00
16	6.25
17	6.22
18	6.16

Τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής

A/A Μέτρησης	Χρόνος (sec)	Μέση τιμή	χ-χμέσο	(χ-χμέσο) ²
1	6.06	6.13	-0.07	0.005
2	5.98		-0.15	0.022
3	6.04		-0.09	0.008
4	6.22		0.09	0.008
5	6.75		0.62	0.386
6	6.40		0.27	0.074
7	6.06		-0.07	0.005
8	6.07		-0.06	0.003
9	6.06		-0.07	0.005
10	6.03		-0.10	0.010
11	6.04		-0.09	0.008
12	6.00		-0.13	0.016
13	5.97		-0.16	0.025
14	6.00		-0.13	0.016
15	6.00		-0.13	0.016
16	6.25		0.12	0.015
17	6.22		0.09	0.008
18	6.16		0.03	0.001

Άθροισμα

0.63

Τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής

$$\sigma_{avg} = \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$t_{avg} = 6.1283 \pm 0.045 \text{ s}$$

Σύμφωνα με τους κανόνες αναγραφής των αποτελεσμάτων έμμεσων μετρήσεων, το τελικό αποτέλεσμα θα γραφεί:

$$t_{avg} = 6.128 \pm 0.045 \text{ s}$$

ή

$$t_{avg} = 6.13 \pm 0.05 \text{ s}$$

Κανόνες αναγραφής του αποτελέσματος μαζί με το σφάλμα

Το **σφάλμα** των πειραματικών μετρήσεων (στα εκπαιδευτικά εργαστήρια), γράφεται (συνήθως) με **ένα ή δύο** σημαντικά ψηφία. Τα υπόλοιπα ψηφία στρογγυλοποιούνται.

Η τιμή του πειραματικού αποτελέσματος, όταν αυτό προκύπτει από υπολογισμούς που βασίζονται σε μετρήσεις (έμμεση μέτρηση) γράφεται με τόσα δεκαδικά ψηφία, όσα έχει το σφάλμα. Τα υπόλοιπα ψηφία στρογγυλοποιούνται.

Σύγκριση των πειραματικών τιμών με την πραγματική τιμή

Ένας πολύ συνηθισμένος τρόπος σύγκρισης της πειραματικής με την «πραγματική» τιμή ενός φυσικού μεγέθους είναι η επί τοις εκατό (%) απόκλιση, που δίνει το **σχετικό** σφάλμα της πειραματικής τιμής από τη πραγματική τιμή. Το σχετικό σφάλμα είναι ένας σχετικά αξιόπιστος δείκτης της **ποιότητας** των πειραματικών μετρήσεων

$$\% \text{ απόκλιση της ποσότητας } x = \frac{|x_{\text{πραγμ}} - x_{\text{πειρ}}|}{x_{\text{πραγμ}}} 100\%$$



➤**Ερώτηση:** Συγκρίνετε το σχετικό και το απόλυτο σφάλμα των μετρήσεων:

1000.0±0.5 cm και 10.0±0.5 cm.

Ποια μέτρηση θεωρείται πιο ακριβής ή καλύτερης ποιότητας;;

Κατανομή Gauss ή κανονική κατανομή

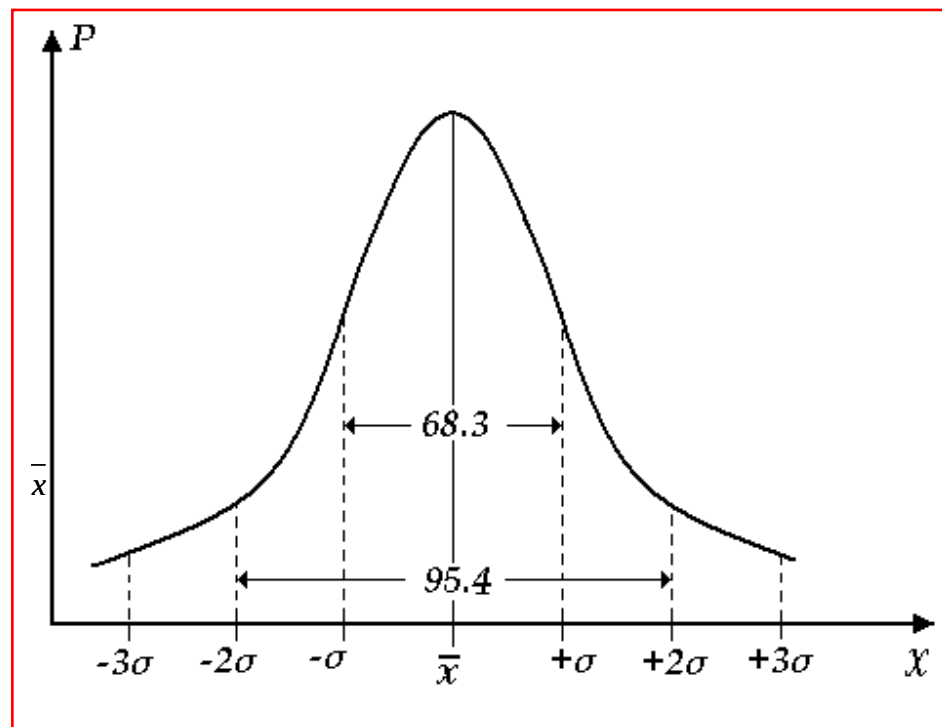
Η κατανομή των τυχαίων σφαλμάτων περιγράφεται με την **κατανομή Gauss** ή κανονική κατανομή.

Η κατανομή Gauss έχει μεγάλη πρακτική σημασία και εκφράζεται μαθηματικά με την σχέση:

$$P = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-d^2/(2\sigma^2)}$$

Όπου P είναι η πυκνότητα πιθανότητας να εμφανιστεί απόκλιση d από την μέση τιμή και όπου σ είναι το εύρος της κατανομής, ονομάζεται **τυπική απόκλιση** (standard deviation) και δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$



Το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη μεταξύ $\bar{x} - \sigma$ και $\bar{x} + \sigma$ είναι ισούται με το 68,3% του εμβαδού όλης της επιφάνειάς της (από $x = -\infty$ έως $x = +\infty$). Η πιθανότητα που έχει μια μέτρηση να δώσει τιμή μεταξύ $\bar{x} - \sigma$ και $\bar{x} + \sigma$ είναι 68,3%, ενώ μεταξύ $\bar{x} - 2\sigma$ και $\bar{x} + 2\sigma$ είναι 95,4%. Άρα η τυπική απόκλιση σ , μπορεί να δείξει το μέτρο της διασποράς των τιμών του x που περιλαμβάνονται στην κατανομή, ενώ η μέση τιμή $\bar{x}$ καθορίζει τη θέση της καμπύλης στον άξονα των x , δηλαδή την τιμή του x , γύρω από την οποία η καμπύλη Gauss είναι συμμετρική.

Τέλος 1^{ης} παρουσίασης

Επόμενη παρουσίαση:

Συνέχεια στην θεωρία σφαλμάτων –
Γραφικές Παραστάσεις – Πρακτική
εξάσκηση (Άσκηση Ι)

2^η παρουσίαση:
Συνέχεια στην θεωρία σφαλμάτων –
Γραφικές Παραστάσεις

ΤΥΧΑΙΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΚΑΤΑ ΤΙΣ ΕΜΜΕΣΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

Στις έμμεσες μετρήσεις, ο **υπολογισμός** ενός μεγέθους x , είναι συνάρτηση πολλών άλλων μεγεθών $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ τα οποία μετρούνται άμεσα. Για να υπολογίσουμε το ολικό σφάλμα του μεγέθους x , χρειάζεται η γνώση των επί μέρους σφαλμάτων που επιβαρύνουν τις μετρήσεις των μεγεθών $q_1, q_2, \dots, q_n$. Το μέγεθος x είναι μία συνάρτηση των $q_1, q_2, \dots, q_n$: $x = f(q_1, q_2, \dots, q_n)$

Η μέση τιμή του $\bar{x}$ θα είναι: $\bar{x} = f(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_n)$

Με βάση τη θεωρία **διάδοσης σφαλμάτων** ορίζουμε σαν **πιθανό σφάλμα** (δx) το μέγεθος που δίνεται από τη σχέση:

$$\delta x = \pm \sqrt{\sum_1^n \left[\frac{\partial x}{\partial q_i} \sigma_{q_i} \right]^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \sigma_{q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial q_2} \sigma_{q_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial x}{\partial q_n} \sigma_{q_n} \right)^2}$$



όπου $\partial x / \partial q_i$ είναι η **μερική παράγωγος** του μεγέθους x ως προς q_i . Μερική παράγωγος είναι όταν παραγωγίζουμε το μέγεθος x ως προς τη μεταβλητή q_i , θεωρώντας τις υπόλοιπες μεταβλητές **σταθερές**.

Μερική παράγωγος συνάρτησης

Εστω π.χ η συνάρτηση δύο μεταβλητών $f=2 \cdot x^2 \cdot z$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4 \cdot x \cdot z$$

Η μεταβλητή z λογίζεται ως σταθερά κατά την παραγωγήιση

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2 \cdot x^2$$

Η μεταβλητή x λογίζεται ως σταθερά κατά την παραγωγήιση

Μερική παράγωγος συνάρτησης

Έστω π.χ η συνάρτηση μίας μεταβλητής $f=2 \cdot x^2$

$$\frac{\theta f}{\theta x} = 4x$$

$$\frac{\theta f}{\theta y} = 0$$

Μερική παράγωγος συνάρτησης

Έστω π.χ η συνάρτηση τριών μεταβλητών

$$f(x, y, z) = \frac{2x^2y^2}{z}$$

$$\frac{\theta f}{\theta x} = \frac{4xy^2}{z}$$

$$\frac{\theta f}{\theta z} = \frac{2x^2y^2}{-z^2}$$

$$\frac{\theta f}{\theta y} = \frac{4x^2y}{z}$$

Παράδειγμα υπολογισμού σφάλματος και αναγραφής αποτελέσματος

Έστω ότι ζητείται να προσδιορισθεί η πυκνότητα ενός σώματος με ογκομέτρηση και ζύγιση. Η σχέση που υπολογίζει την πυκνότητα είναι:

$$d = \frac{m}{V}$$

όπου m η μάζα και V ο όγκος του σώματος. Για τον προσδιορισμό της μάζας και του όγκου γίνονται πολλές μετρήσεις. Η τιμή της πυκνότητας θα υπολογισθεί από τη παραπάνω σχέση, χρησιμοποιώντας τις μέσες τιμές, της σειράς των μετρήσεων, της μάζας και του όγκου. Δηλαδή γίνεται:

$$\bar{d} = \frac{\bar{m}}{\bar{V}}$$

Και τα m και V έχουν σφάλματα σ_m και σ_V ,

Παράδειγμα υπολογισμού σφάλματος και αναγραφής αποτελέσματος

$$d(m, V) = \frac{m}{V} \longrightarrow \text{Συνάρτηση δύο μεταβλητών}$$

$$\bar{m} \pm \sigma_m \quad \text{και} \quad \bar{V} \pm \sigma_V$$

$$\delta x = \pm \sqrt{\sum_1^n \left[\frac{\partial x}{\partial q_i} \sigma_{q_i} \right]^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \sigma_{q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial q_2} \sigma_{q_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial x}{\partial q_n} \sigma_{q_n} \right)^2}$$

Παράδειγμα υπολογισμού σφάλματος και αναγραφής αποτελέσματος

$$d(m, V) = \frac{m}{V} \longrightarrow \text{Συνάρτηση δύο μεταβλητών}$$

$$\bar{m} \pm \sigma_m \quad \text{και} \quad \bar{V} \pm \sigma_V$$

$$\delta d = \sqrt{\left(\frac{\partial d}{\partial \bar{m}} \sigma_m \right)^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial \bar{V}} \sigma_V \right)^2}$$

Παράδειγμα υπολογισμού σφάλματος και αναγραφής αποτελέσματος

$$d(m, V) = \frac{m}{V} \longrightarrow \text{Συνάρτηση δύο μεταβλητών}$$

$$\bar{m} \pm \sigma_m \quad \text{και} \quad \bar{V} \pm \sigma_V$$

$$\delta d = \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{V}} \sigma_m\right)^2 + \left(\frac{m}{\bar{V}^2} \sigma_V\right)^2}$$

Αναγραφή του αποτελέσματος μαζί με το σφάλμα

Το σφάλμα (στα εκπαιδευτικά εργαστήρια), γράφεται (συνήθως) με **ένα ή δύο** σημαντικά ψηφία. Τα υπόλοιπα ψηφία στρογγυλοποιούνται. Η τιμή του πειραματικού αποτελέσματος γράφεται με τόσα δεκαδικά, όσα έχει το σφάλμα. Τα υπόλοιπα ψηφία **στρογγυλοποιούνται**.

Αν στο παραπάνω πείραμα προσδιορισμού της πυκνότητας, βρέθηκε η τιμή $d=6,384 \text{ gr/cm}^3$ και το σφάλμα υπολογίσθηκε $\delta d = \pm 0,232 \text{ gr/cm}^3$, τούτο σημαίνει ότι πιθανό, η τιμή που βρέθηκε $6,384 \text{ gr/cm}^3$ δεν θα διαφέρει της πραγματικής περισσότερο των $0,232 \text{ gr/cm}^3$ είτε προς μεγαλύτερη, είτε προς μικρότερη τιμή.

Τελική αναγραφόμενη πειραματική : $d \pm \delta d = (6,38 \pm 0,23) \text{ gr/cm}^3$.



ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Συνήθως τα αποτελέσματα ενός πειράματος παρουσιάζονται σε μια γραφική παράσταση. Η γραφική παράσταση μας δίνει τη δυνατότητα να διερευνήσουμε την εξάρτηση μεταξύ των ποσοτήτων (μεταβλητών). Αν σε ένα πείραμα έχουμε δυο μεταβλητές x και y , που η μια εξαρτάται από την άλλη (ανεξάρτητη μεταβλητή x και εξαρτημένη μεταβλητή y), τότε μπορούμε να τις συνδέσουμε μεταξύ τους με μια συνάρτηση $y = f(x)$. Υποθέτουμε για λόγους απλούστευσης ότι η εξαρτημένη μεταβλητή y υπόκειται σε σφάλματα, και αγνοούμε τα σφάλματα στην ανεξάρτητη μεταβλητή x .

Όπου είναι δυνατόν, χρησιμοποιούμε γραφική παράσταση που αποδίδει μια γραμμική συμπεριφορά (ευθεία γραμμή), της μορφής $y = a + b \cdot x$. Αυτή είναι πιο ακριβής στο σχεδιασμό και τα συμπεράσματα είναι πιο αξιόπιστα από ότι σε μια γραφική παράσταση που είναι καμπύλη.

Οι σταθερές a και b πρέπει να είναι καλά επιλεγμένες, ώστε να έχουμε τις καλύτερες προσεγγίσεις. Για να μελετήσουμε μια συνάρτηση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την κλίση « b » της καμπύλης που αντιστοιχεί στη συνάρτηση σε κάποιο σημείο « x ». Η κλίση « b » σε ένα σημείο « x » ορίζεται ως η τιμή της παραγώγου της συνάρτησης, που αντιπροσωπεύει η καμπύλη, στο σημείο « x », δηλαδή :

$$b = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

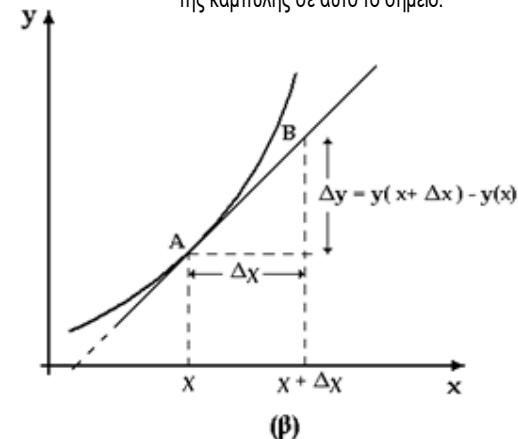
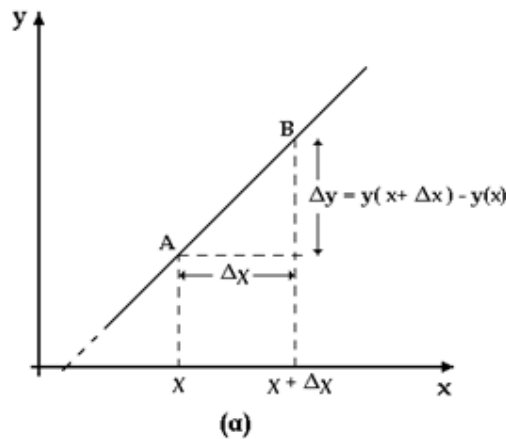
ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ – Στοιχεία γραφικής

Η κλίση της ευθείας AB στο παρακάτω σχήμα αντιπροσωπεύεται από το κλάσμα:

$$b = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

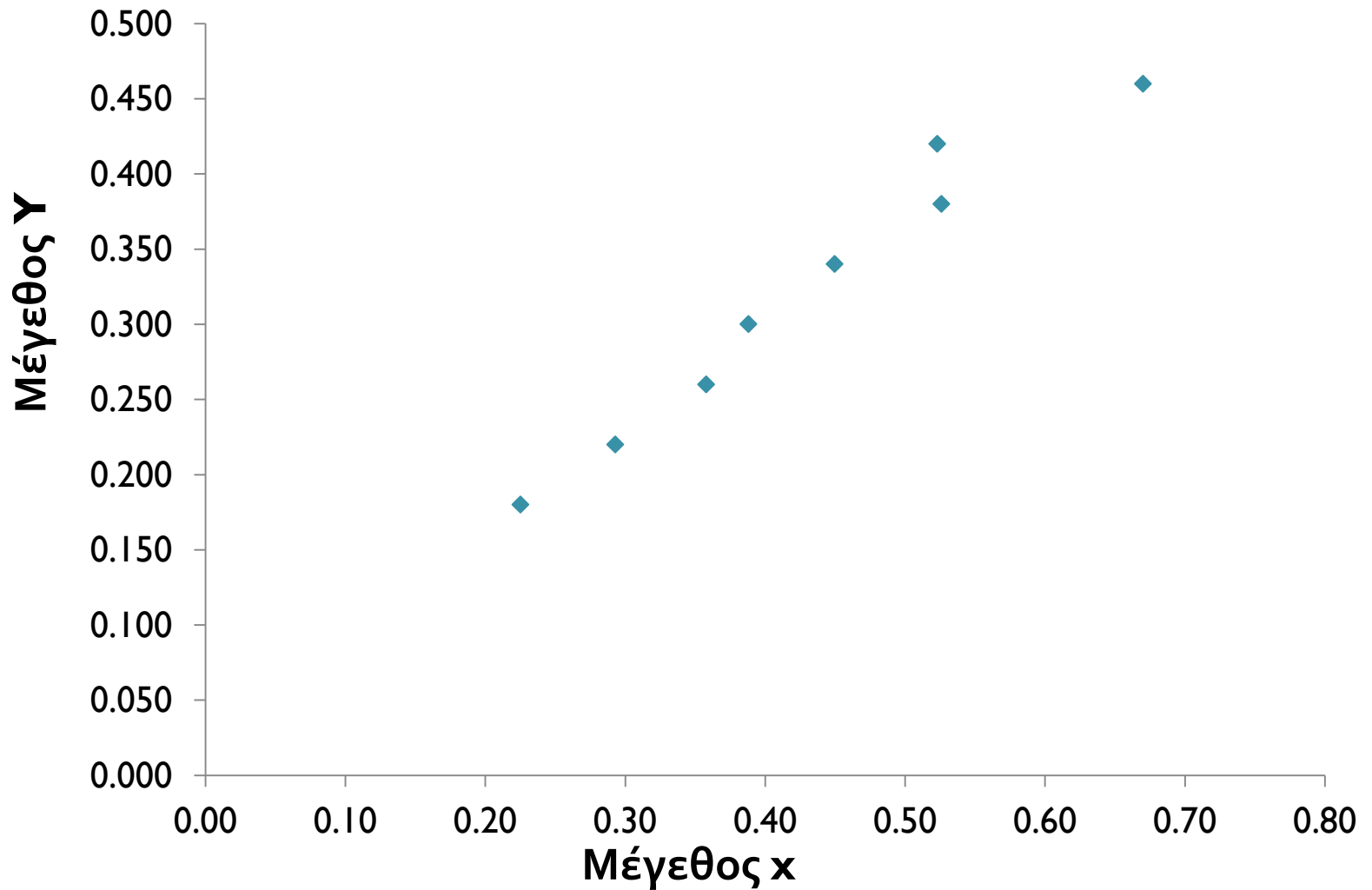


Όταν $\Delta x \rightarrow 0$, η εφαπτομένη (Ε) της καμπύλης στο σημείο "x" ισούται με την κλίση «b» της καμπύλης σε αυτό το σημείο.

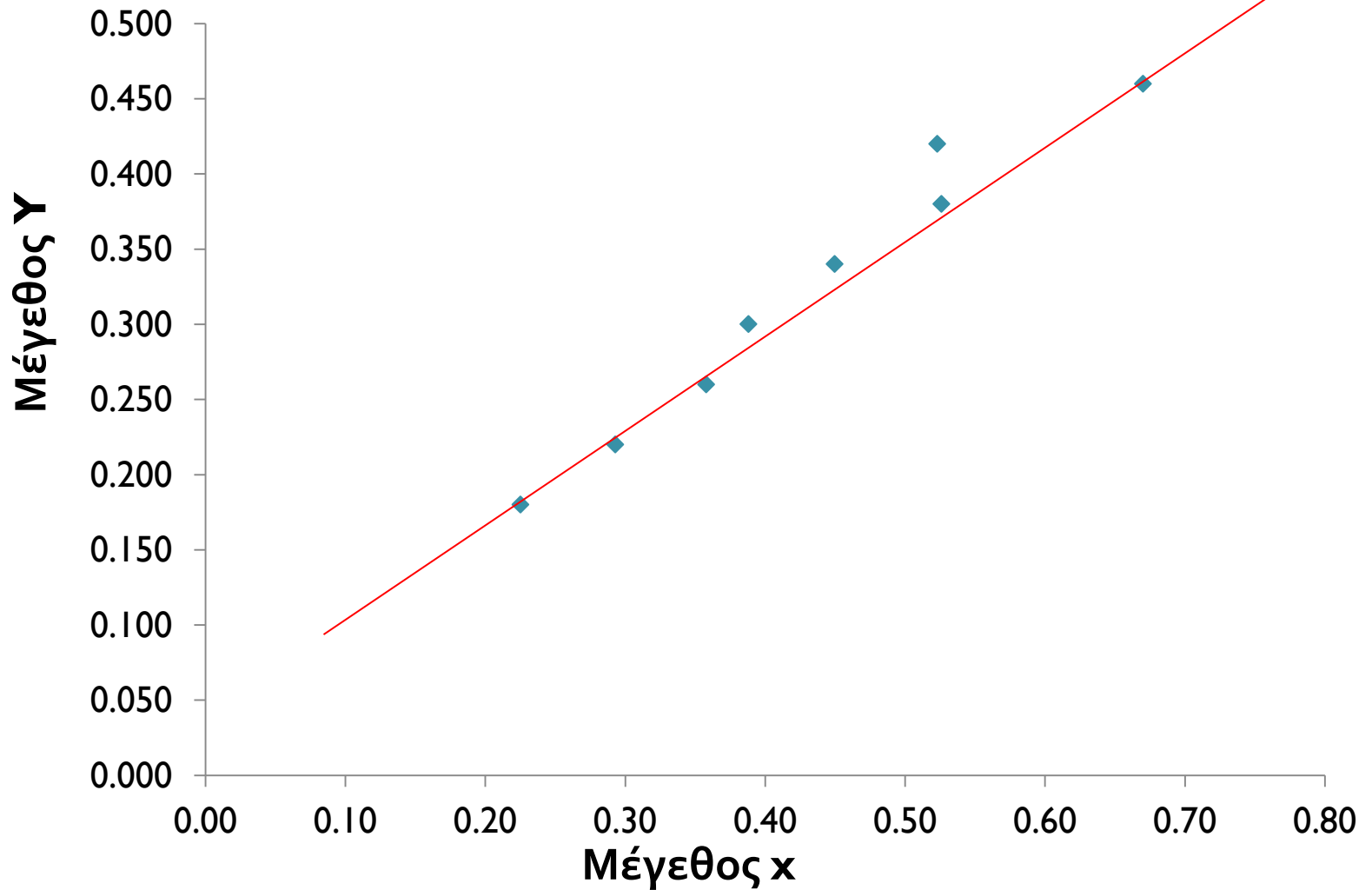


Πρέπει να έχουμε υπόψη ότι η κλίση δεν ταυτίζεται γενικά με την εφαπτόμενη της γωνίας «ω» που δείχνει το σχήμα. Και αυτό, διότι η εφαπτόμενη της γωνίας «ω» είναι αδιάστατο μέγεθος, καθαρός αριθμός, ενώ η κλίση έχει μονάδες. Η μόνη περίπτωση, που η εφω συμπίπτει με την αριθμητική τιμή της κλίσης, είναι όταν έχουμε ισοδιάστατες μονάδες στους δυο ορθογώνιους άξονες .

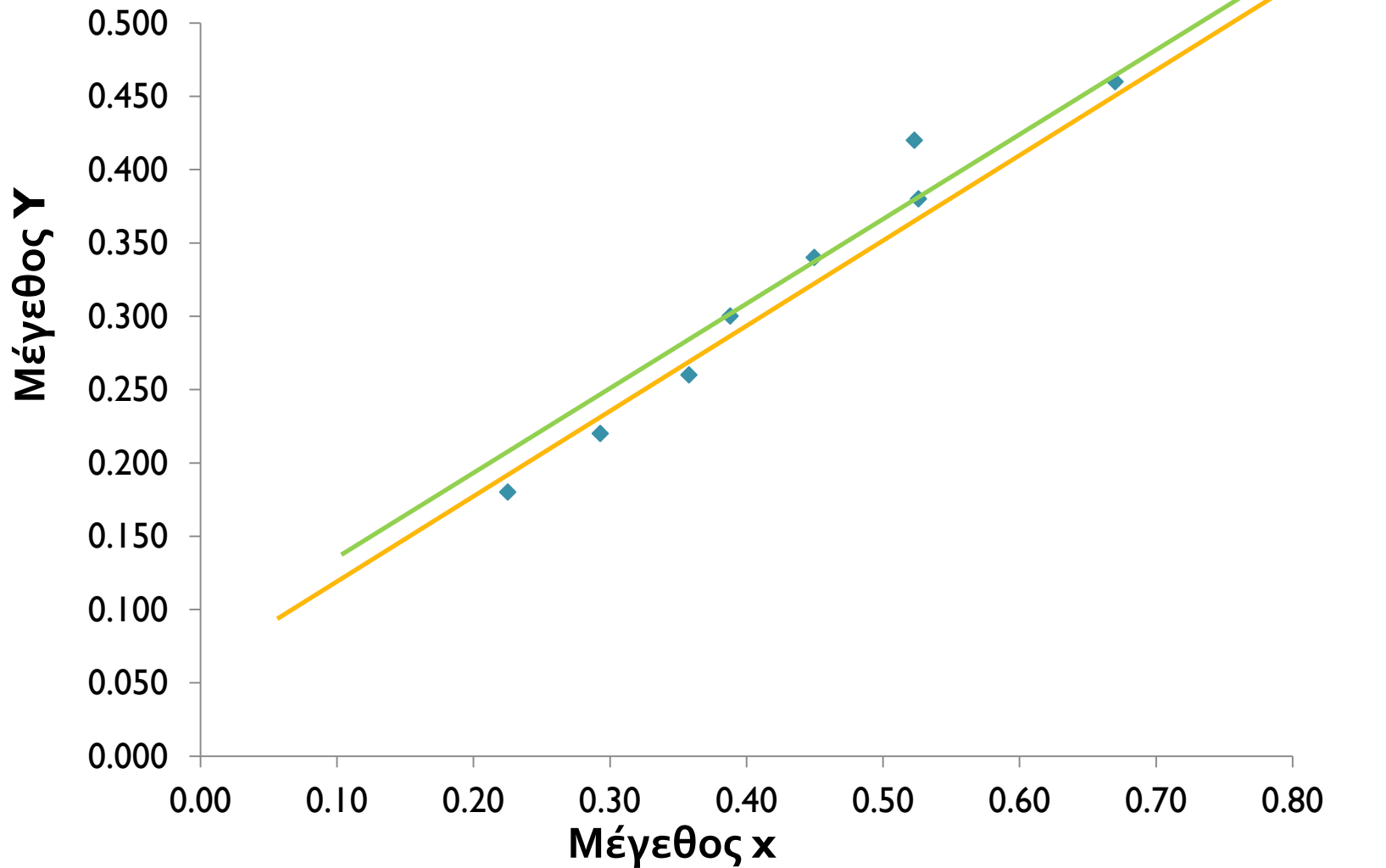
ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ – Χάραξη «καλύτερης» ευθείας



ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ – Χάραξη «καλύτερης» ευθείας

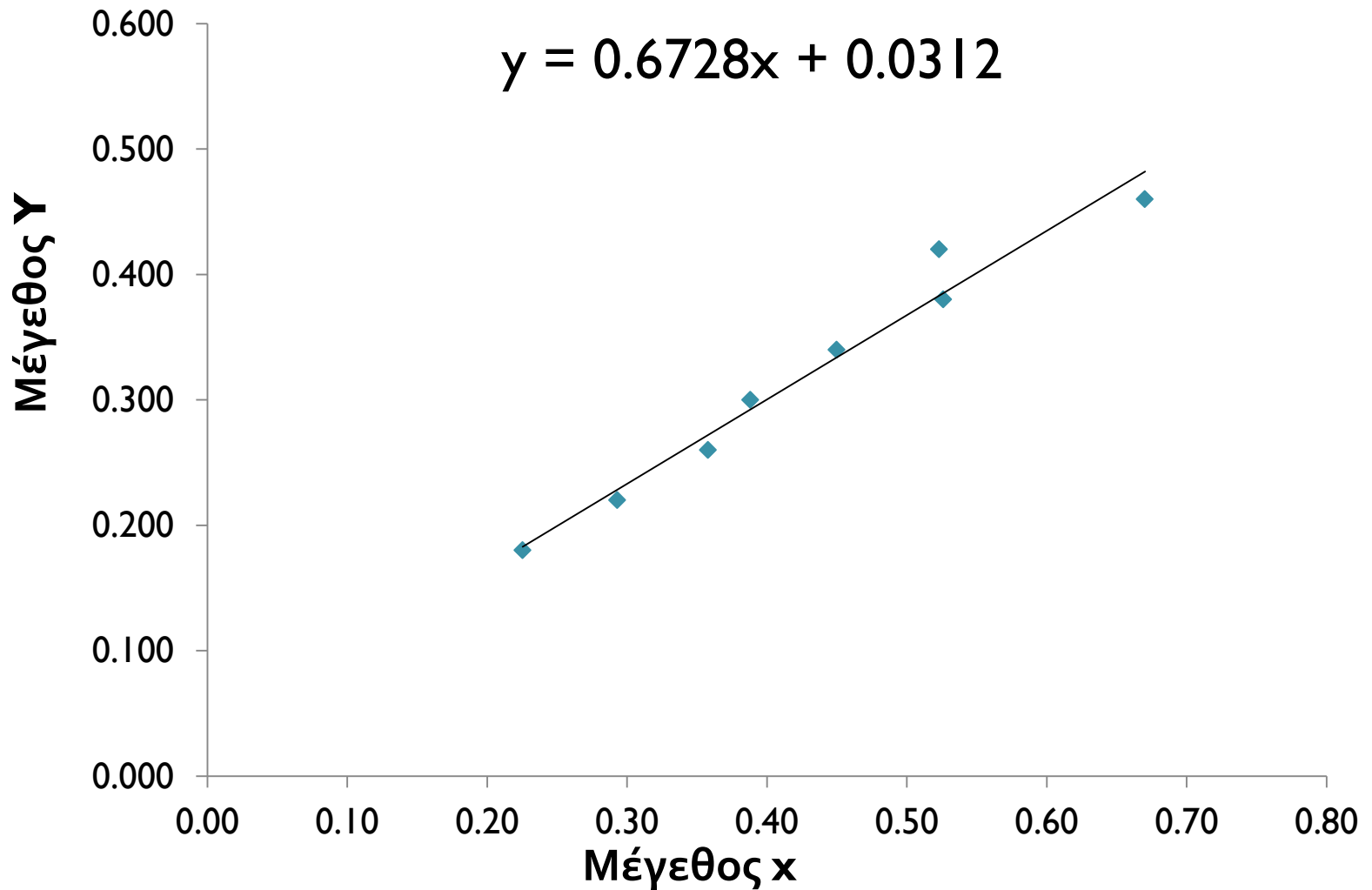


ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ – Χάραξη «καλύτερης» ευθείας



ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ – Χάραξη «καλύτερης» ευθείας

$$y = 0.6728x + 0.0312$$

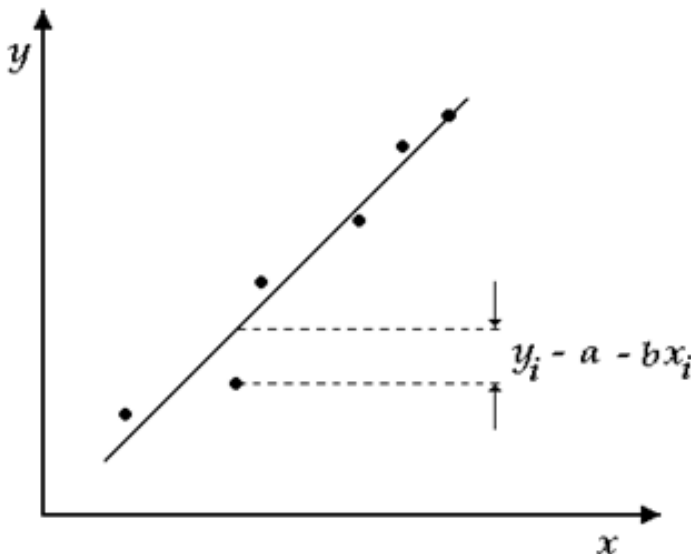


ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ (LEAST SQUARES FIT)

Για να προσδιορίσουμε και να χαράξουμε όσο το δυνατό πιο αξιόπιστα την ευθεία $y = bx + a$ και για να περιορίσουμε την επίδραση των τυχαίων σφαλμάτων, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των **Ελαχίστων Τετραγώνων (Least Squares Fit)**

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων, είναι η αλγεβρική μέθοδος, που ελαχιστοποιεί το άθροισμα των τετραγώνων των κατακόρυφων αποκλίσεων των σημείων από την ευθεία. Δηλαδή ελαχιστοποιεί το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων :

$$\Delta y_i^2 = \sum (y_i - a - bx_i)^2$$



Η εξίσωση, $y = b x + a$ περιέχει τις σταθερές a και b , που πρέπει να ικανοποιούν όσο το δυνατό καλύτερα όλες τις εξισώσεις μεταξύ των ζευγών των τιμών.

Υπολογισμός σταθερών ελαχίστων τετραγώνων

Αν πραγματοποιήσουμε N μετρήσεις για τις μεταβλητές x και y , και κάθε τιμή y_i της ποσότητας y αντιστοιχίζεται στην ποσότητα x_i (όπου το i είναι ένας δείκτης, που παίρνει τιμές από 1 έως N), τότε στο τέλος του πειράματος έχουμε τα ζεύγη των μετρήσεων (x_i, y_i) και έχουμε N εξισώσεις της μορφής : $y_i = bx_i + \alpha$

Κάνοντας τις απαραίτητες ενδιάμεσες πράξεις, καταλήγουμε στα εξής:



$$\alpha = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{\Delta}$$

όπου α η τεταγμένη επί την αρχή (η τεταγμένη, του σημείου τομής της ευθείας με τον άξονα y)



$$b = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\Delta}$$

και b η κλίση της ευθείας

όπου

$$\Delta = N \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2$$

Υπολογισμός σφαλμάτων των σταθερών ελαχίστων τετραγώνων

Τα σφάλματα σ_α και σ_b στις τιμές των α και b αντίστοιχα δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$s^2 = \frac{1}{N-2} \sum (y_i - \alpha - bx_i)^2$$

$$\sigma_\alpha^2 \cong \frac{s^2 \sum x_i^2}{\Delta} \Rightarrow \sigma_\alpha \cong \sqrt{\frac{s^2 \sum x_i^2}{\Delta}}$$

$$\sigma_b^2 \cong \frac{Ns^2}{\Delta} \Rightarrow \sigma_b \cong \sqrt{\frac{Ns^2}{\Delta}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ ΣΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΕΛΑΧ. ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ(1)

Ας θεωρήσουμε τον Πίνακα Α, που περιέχει τα πειραματικά δεδομένα μέτρησης, της μεταβολής της δύναμης F που εφαρμόζεται στο ελατήριο σαν συνάρτηση της επιμήκυνσης Δx του ελατηρίου. Για την ευκολότερη εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων, κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα:

ΠΙΝΑΚΑΣ Α

α/α	Επιμήκυνση $\Delta x_i \rightarrow x_i$ (cm)	Δύναμη $F_i \rightarrow y_i$ (N)	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	1	8	1	8
2	3	25	9	75
3	5	39	25	195
4	7	58	49	406
5	9	71	81	639
	$\Sigma x_i = 25$	$\Sigma y_i = 201$	$\Sigma x_i^2 = 165$	$\Sigma x_i \cdot y_i = 1323$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ ΣΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΕΛΑΧ. ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ(2)

$$\Delta = N \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2 = 5 \cdot 165 - 25^2 = 200$$

$$\alpha = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{\Delta} = \frac{165 \cdot 201 - 25 \cdot 1323}{200} = 0.45$$

$$\beta = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\Delta} = \frac{5 \cdot 1323 - 25 \cdot 201}{200} = 7.95$$

Για τον προσδιορισμό των σφαλμάτων σ_α και σ_β κατασκευάζουμε τον επόμενο πίνακα: ΠΙΝΑΚΑΣ Β

a/a	Επιμήκυνση $\Delta x_i \rightarrow x_i$	Δύναμη (N) $F_i \rightarrow y_i$	$a + bx_i$	$\Delta y_i = y_i - (a + bx_i)$	Δy_i^2
1	1	8	8.4	-0.4	0.16
2	3	25	24.3	0.7	0.49
3	5	39	40.2	-1.2	1.44
4	7	58	56.1	1.9	3.61
5	9	71	72	-1	1.0000
	$\sum x_i = 25$	$\sum y_i = 201$			6.7000

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ ΣΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΕΛΑΧ. ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ(3)

$$s^2 = \frac{1}{N-2} \sum (y_i - \alpha - bx_i)^2 = \frac{1}{3} \cdot 6.7 = 2.23333$$

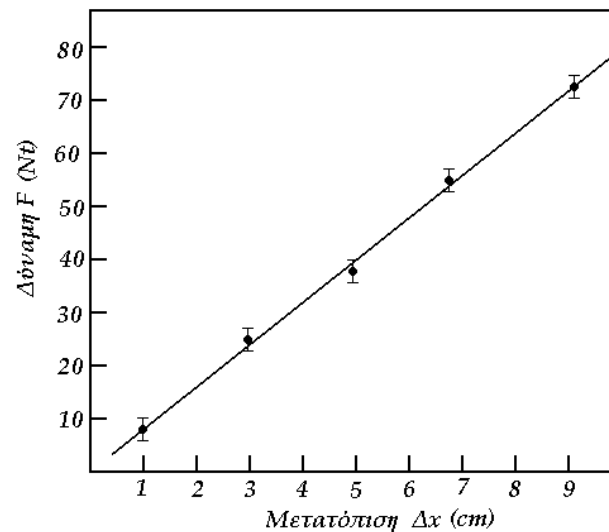
$$\sigma_\alpha^2 \cong \frac{s^2 \sum x_i^2}{\Delta} = 1.84247, \quad \sigma_\alpha = \pm 1.3573737 \sim \pm 1.36$$

$$\sigma_b^2 \cong \frac{Ns^2}{\Delta} = 0.05583, \quad \sigma_b = \pm 0.2362837 \sim \pm 0.24$$

$$\alpha \pm \sigma_\alpha = (0.4 \pm 1.4) \text{ N}$$
$$b \pm \sigma_b = (7.95 \pm 0.24) \text{ N/cm}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ ΣΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΕΛΑΧ. ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ(4)

Στο παρακάτω διάγραμμα γράφονται τα δεδομένα έτσι, ώστε να φαίνεται η σχέση μεταξύ της δύναμης και της επιμήκυνσης. Η επιμήκυνση είναι ανεξάρτητη μεταβλητή και η δύναμη F είναι εξαρτημένη από την επιμήκυνση. Έτσι, η δύναμη F_i σχεδιάζεται κατά μήκος του άξονα y και η επιμήκυνση Δx_i στον άξονα x .



ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ (I)

Αφού έχουμε βρει τις τιμές των σταθερών a και b γνωρίζουμε ποια είναι ακριβώς η εξίσωση $y = b x + a$ που συνδέει τις δύο μεταβλητές.

Δηλαδή για παράδειγμα αν έχουμε βρει ότι $a=0,40$ και $b=2,50$ η εξίσωση της ευθείας που θέλουμε να σχεδιάσουμε είναι η: $y=2,50x + 0,40$

Από την παραπάνω εξίσωση βρίσκουμε δύο σημεία της ευθείας τα οποία αρκούν για να την σχεδιάσουμε

Δηλαδή για δύο τυχαίες τιμές του x από την παραπάνω εξίσωση βρίσκουμε τις αντίστοιχες τιμές του y . Συνήθως χρησιμοποιούμε τις τιμές $x=0$ και $y=0$, οπότε βρίσκουμε τα σημεία με συντεταγμένες $(0,y)$ και $(x,0)$.

π.χ. για την εξίσωση του παραπάνω παραδείγματος έχουμε:

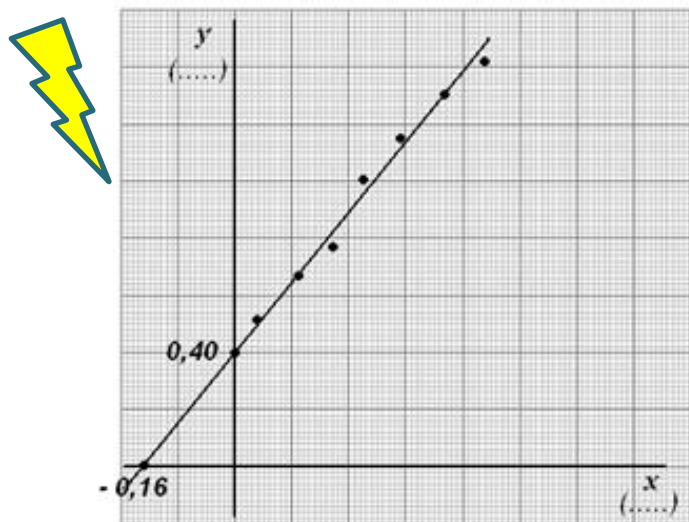
για $x=0$ τότε $y = 0,40$ και για $y=0$ τότε $x = - 0,4/2,5 = - 0,16$.

Άρα γνωρίζουμε τα σημεία της ευθείας με συντεταγμένες $(0, 0,4)$ και $(-0,16, 0)$.

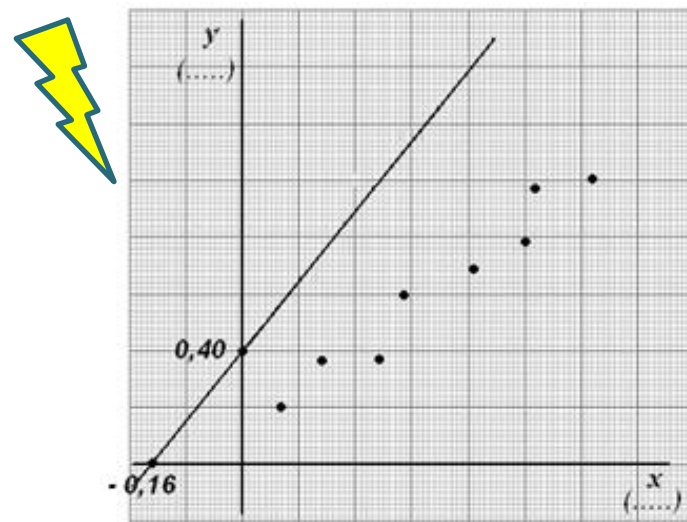
Βρίσκουμε τα δύο αυτά σημεία πάνω στη γραφική και γνωρίζοντας ότι η ευθεία περνάει από αυτά τα δύο σημεία την σχεδιάζουμε.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ (II)

Στη συνέχεια, **τοποθετούμε τα πειραματικά σημεία** [όλα τα ζεύγη (x_i, y_i)] από τις μετρήσεις μας πάνω στη γραφική. Αυτά θα πρέπει να είναι διασπαρμένα πάνω και γύρω από την διεύθυνση της ευθείας, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (σχήμα 1).



Σχήμα 1: Σωστό

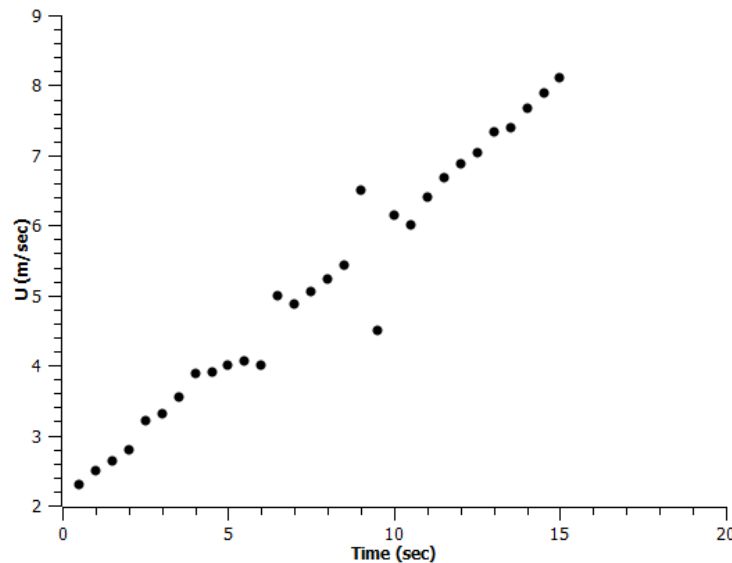


Σχήμα 2: Λάθος

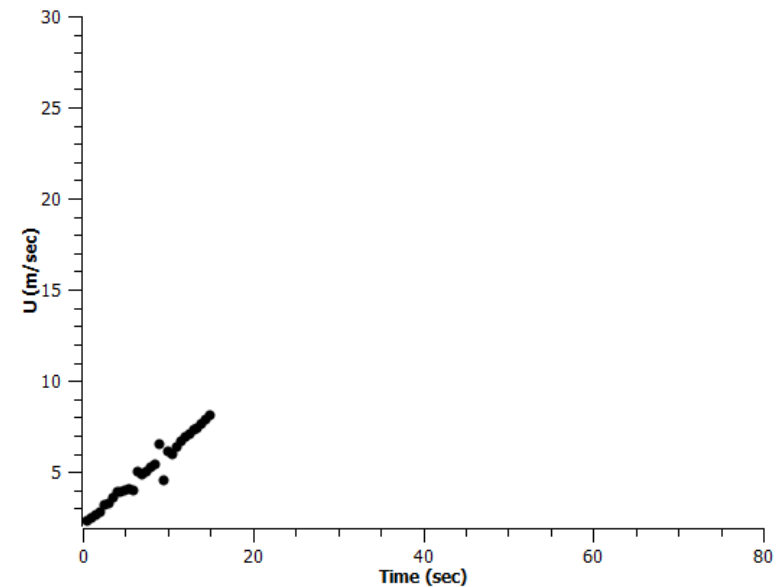
Σε περίπτωση που δεν συμβαίνει αυτό και τα πειραματικά σημεία είναι διασπαρμένα σε διαφορετική διεύθυνση από αυτή της ευθείας (όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα) τότε έχουμε κάνει λάθος στον υπολογισμό των a και b και θα πρέπει να ελέγξουμε ξανά τους υπολογισμούς μας (Σχήμα 2)

Παραδείγματα γραφικών παραστάσεων

Λάθος επιλογή κλίμακας αξόνων



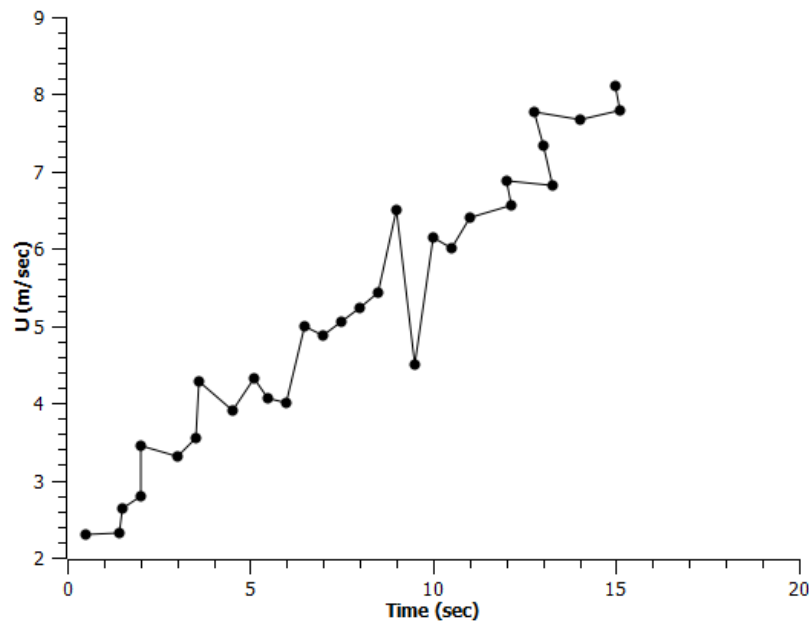
Σωστό



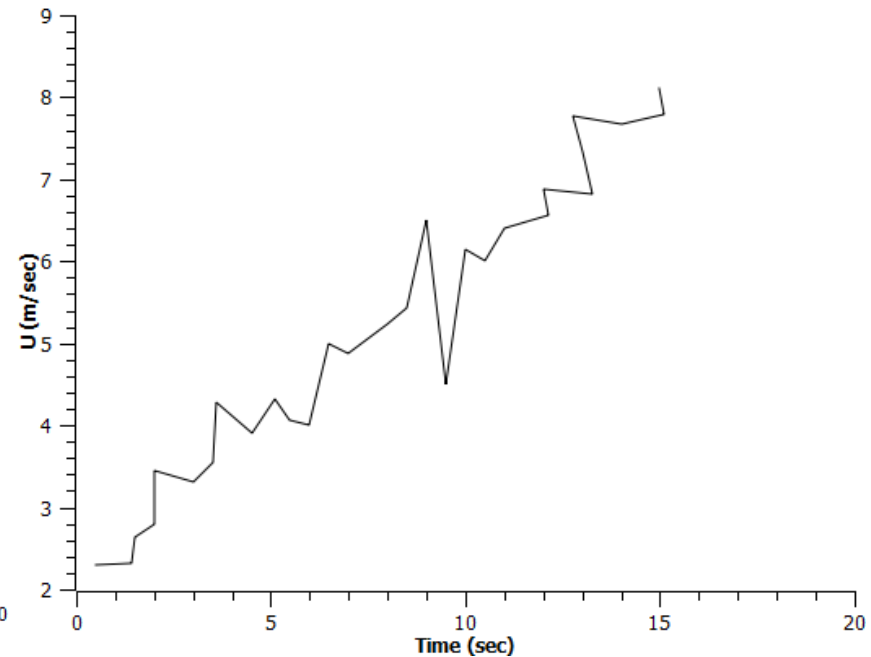
Λάθος

Παραδείγματα γραφικών παραστάσεων (συνέχεια...)

Τα πειραματικά σημεία δεν ενώνονται! Τα πειραματικά σημεία μπαίνουν πάντα!



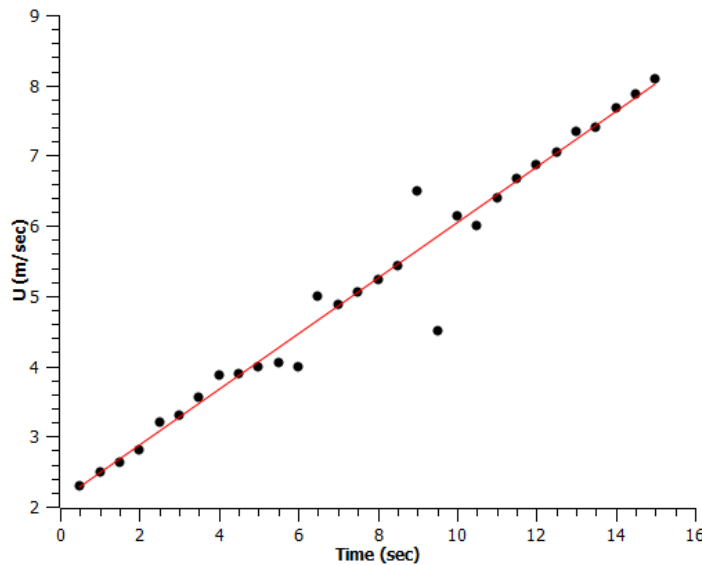
Λάθος



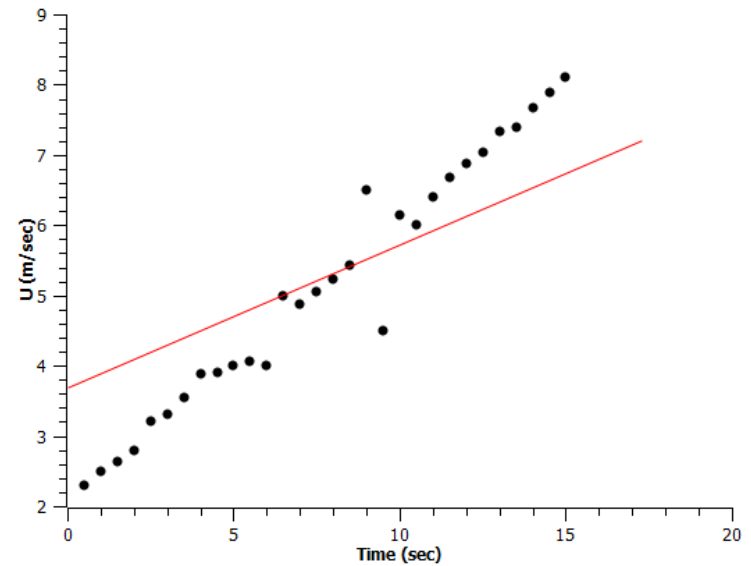
Λάθος

Παραδείγματα γραφικών παραστάσεων (συνέχεια...)

Λάθος υπολογισμός των ελαχίστων τετραγώνων !



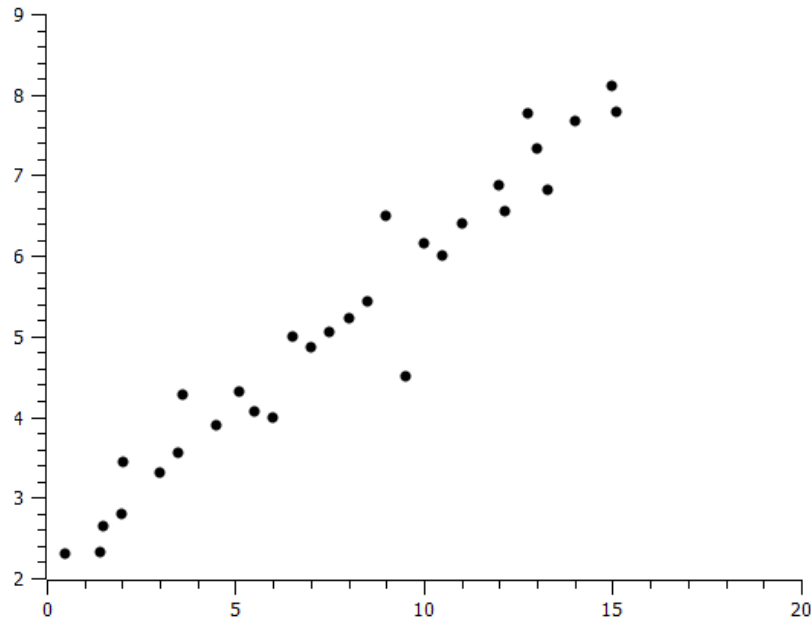
Σωστό



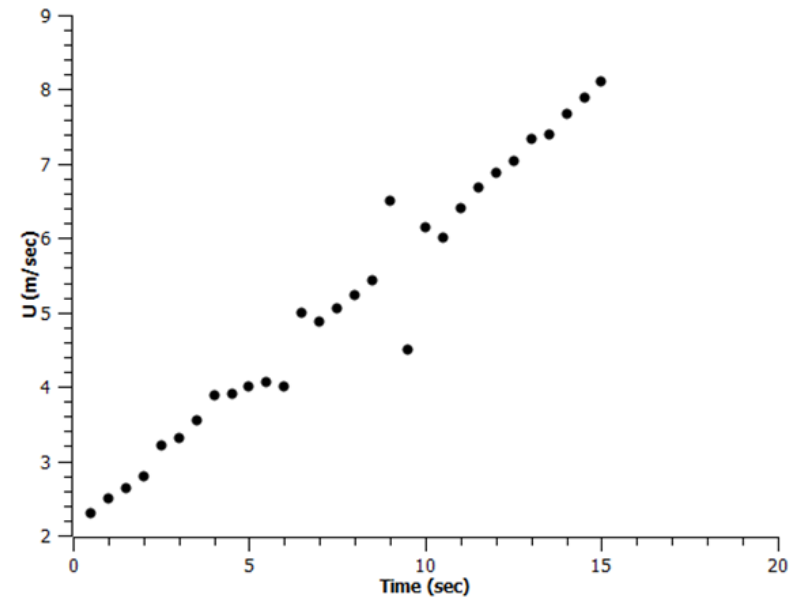
Λάθος

Παραδείγματα γραφικών παραστάσεων (συνέχεια...)

Μεγέθη και μονάδες στους άξονες!



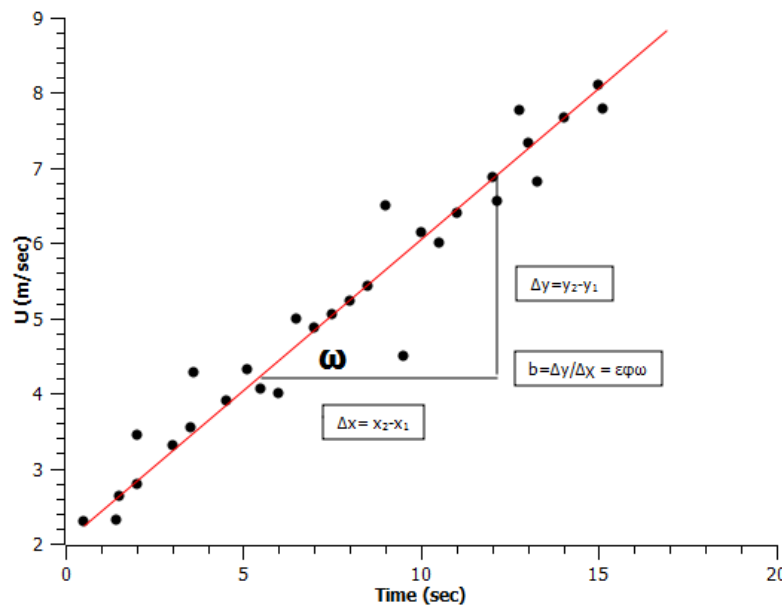
Λάθος



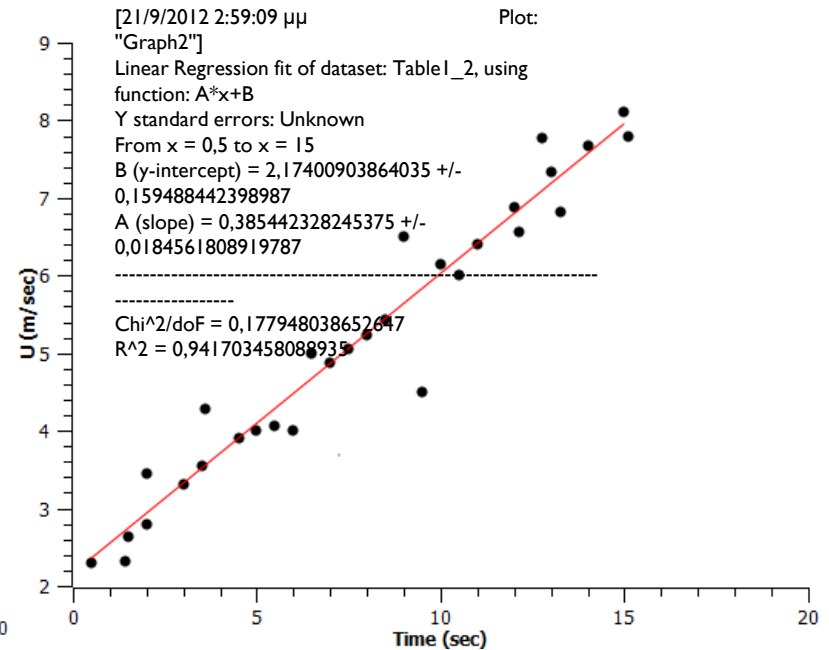
Σωστό

Παραδείγματα γραφικών παραστάσεων (συνέχεια...)

Ο υπολογισμός της κλίσης γίνεται με τα ελάχιστα τετράγωνα!



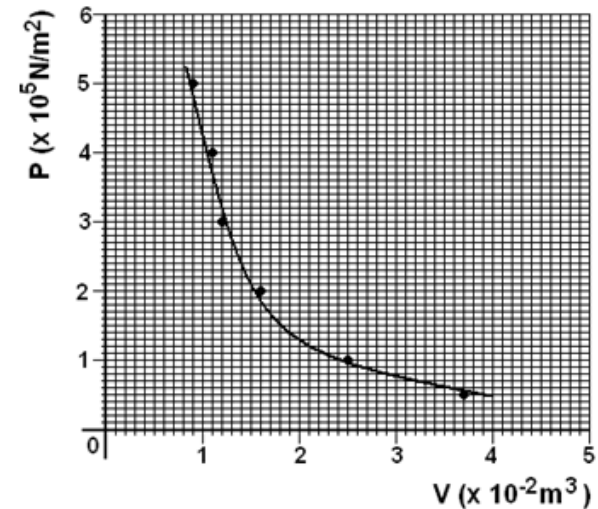
Λάθος



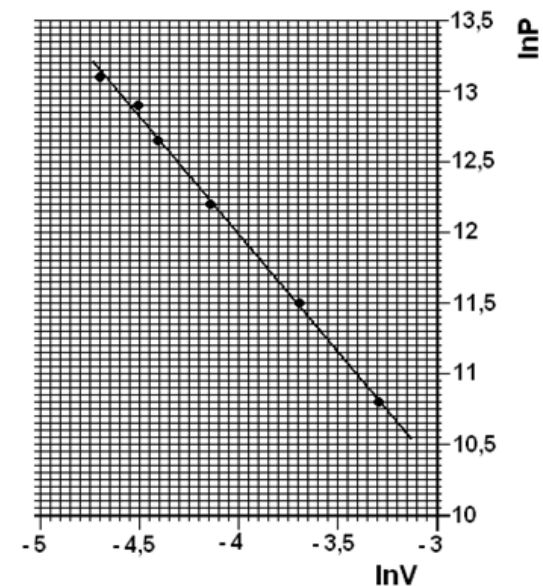
Σωστό

Παράδειγμα μη γραμμικής γραφικής παράστασης

Σε ένα δεκαδικό διάγραμμα, η σχέση ανάμεσα στην πίεση P και στον όγκο V δεν είναι γραμμική και η εξάρτησή τους γραφικά φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα



Σε ένα δεκαδικό διάγραμμα, η σχέση ανάμεσα στον $\ln P$ και στον $\ln V$ είναι γραμμική και η εξάρτησή τους γραφικά φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα



ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΣΩΣΤΟ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

- ✓ Ο σχεδιασμός των γραφικών παραστάσεων θα πρέπει να γίνεται σε χαρτί χιλιοστομετρικό (μιλλιμετρέ), για να διευκολύνεται η εύρεση των πειραματικών σημείων πάνω στο διάγραμμα.
- ✓ Στους άξονες σημειώνουμε πάντα τα φυσικά μεγέθη με τα σύμβολά τους και τις μονάδες μέτρησής τους, μέσα σε παρένθεση. Για παράδειγμα: δύναμη $F(N)$, χρόνος $t(sec)$.
- ✓ Οι πειραματικές τιμές των μεγεθών, μας καθορίζουν την εκλογή της μονάδας κλίμακας στους άξονες, έτσι ώστε να βρίσκονται εύκολα τα δεκαδικά κλάσματα της μονάδας, π.χ. δέκατα, εκατοστά, χιλιοστά. Όλες οι τιμές των μεγεθών πρέπει να απεικονίζονται στο διάγραμμα. Δηλαδή η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή κάθε άξονα καθορίζεται από την ελάχιστη και τη μέγιστη πειραματική τιμή.
- ✓ Η επιλογή της κλίμακας πρέπει να είναι τέτοια, ώστε η γραφική παράσταση να εκτείνεται σε όσο το δυνατό μεγαλύτερο μέρος του χαρτιού.
- ✓ Οι άξονες x και y δεν είναι αναγκαίο να έχουν την ίδια βαθμολόγηση.
- ✓ Δεν είναι αναγκαίο το σημείο τομής των αξόνων να είναι το $(0,0)$.
- ✓ Τις πειραματικές τιμές δεν τις γράφουμε πάνω στους άξονες. Αυτές απλά προσδιορίζονται με τη βοήθεια των κλιμάκων στους αντίστοιχους άξονες.
- ✓ Κάθε πειραματικό σημείο παριστάνεται με μια κουκκίδα ώστε να φαίνεται καθαρά πάνω στη γραφική παράσταση.



Καλή επιτυχία στα Εργαστήρια !