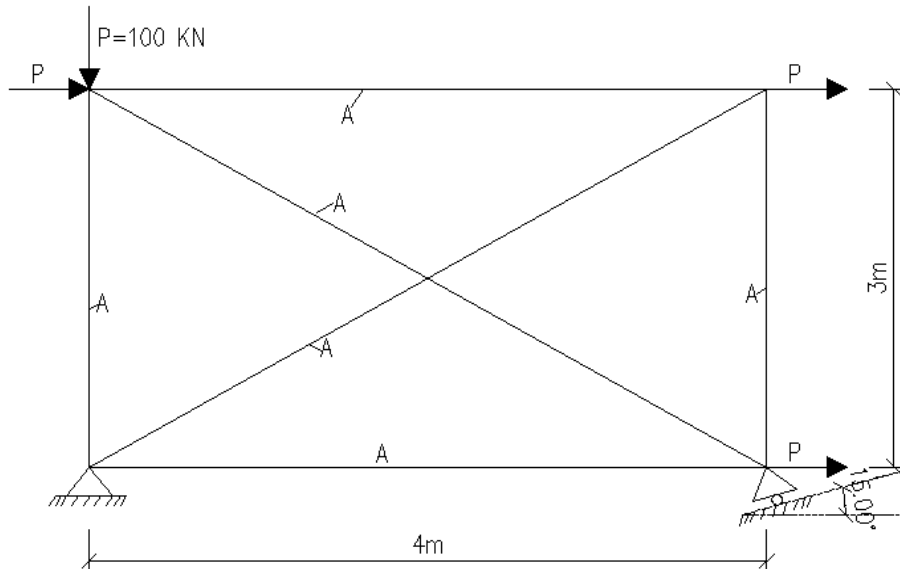


ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΗΤΡΩΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Άσκηση 1^η

Να επιλυθεί το δικτύωμα του σχήματος με τη μέθοδο της άμεσης ακαμψίας. $A=10^{-3} \text{ m}^2$

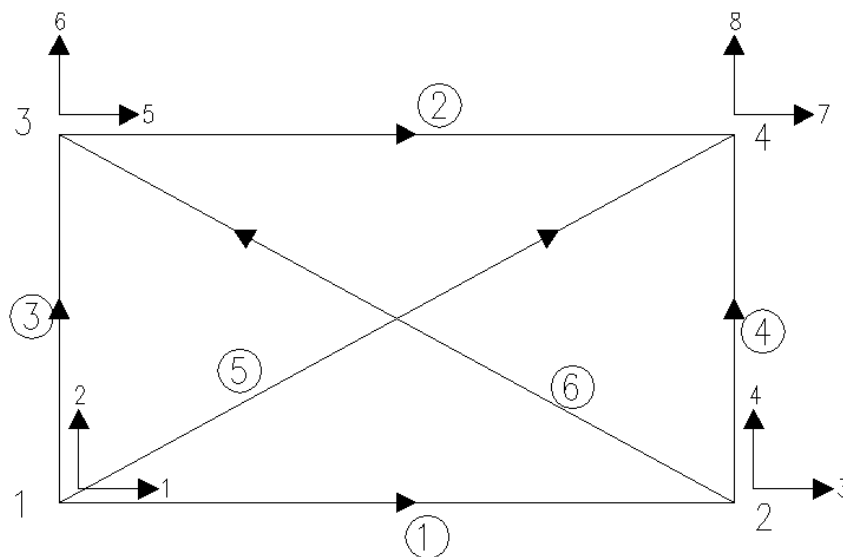


ΛΥΣΗ

Βήμα 1^ο

Αρίθμηση κόμβων, μελών και βαθμών ελευθερίας του δικτυώματος.

Φορά τοπικού άξονα X_1 των μελών του δικτυώματος



Στο βήμα αυτό ο φορέας εξετάζεται αμελώντας τον τρόπο στηρίξεως του.

Βήμα 2^ο

Μόρφωση τοπικών μητρώων ακαμψίας των μελών του φορέα.

Όλα τα στοιχεία του δικτυώματος είναι στοιχεία τύπου P_1 με σταθερή διατομή.

Τοπικό μητρώο ακαμψίας στοιχείου τύπου P_1 :

$$[\hat{K}^i] = \frac{A_i E_i}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Μέλος [1]: $L_1 = 4\text{m}$, $A_1 = 10^{-3}\text{m}^2$, $E_1 = E$

Μέλος [2]: $L_2 = 4\text{m}$, $A_2 = 10^{-3}\text{m}^2$, $E_2 = E$

Μέλος [3]: $L_3 = 3\text{m}$, $A_3 = 10^{-3}\text{m}^2$, $E_3 = E$

Μέλος [4]: $L_4 = 3\text{m}$, $A_4 = 10^{-3}\text{m}^2$, $E_4 = E$

Μέλος [5]: $L_5 = 5\text{m}$, $A_5 = 10^{-3}\text{m}^2$, $E_5 = E$

Μέλος [6]: $L_6 = 5\text{m}$, $A_6 = 10^{-3}\text{m}^2$, $E_6 = E$

$\Downarrow$

$$[\hat{K}^1] = [\hat{K}^2] = \frac{10^{-3}E}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\hat{K}^3] = [\hat{K}^4] = \frac{10^{-3}E}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\hat{K}^5] = [\hat{K}^6] = \frac{10^{-3}E}{5} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Βήμα 3^ο

Μόρφωση μητρώων μετασχηματισμού των μελών του φορέα.

Μητρώο μετασχηματισμού στοιχείου τύπου P_1 :

$$[\hat{\Lambda}_{PPT}^i] = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi \end{bmatrix}$$

όπου ϕ η γωνία κατά την οποία πρέπει να στραφεί ο καθολικός άξονας $\bar{X}_1$ δεξιόστροφα ώστε να συμπίπτει με τον τοπικό άξονα X_1 του μέλους.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Μέλος [1]: } \varphi_1 = 0^\circ \\ \text{Μέλος [2]: } \varphi_2 = 0^\circ \end{array} \right\} \rightarrow [\hat{\Lambda}_{\text{PPT}}^1] = [\hat{\Lambda}_{\text{PPT}}^2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Μέλος [3]: } \Phi_3 = 90^\circ \\ \text{Μέλος [4]: } \Phi_4 = 90^\circ \end{array} \right\} \rightarrow [\hat{\Lambda}_{\text{PPT}}^3] = [\hat{\Lambda}_{\text{PPT}}^4] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Μέλος [5]: } \Phi_5 = 36.87^\circ \rightarrow [\hat{\Lambda}_{\text{PPT}}^5] = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Μέλος [6]: } \Phi_6 = 143.13^\circ \rightarrow [\hat{\Lambda}_{\text{PPT}}^6] = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Βήμα 4^ο

Μόρφωση καθολικών μητρώων ακαμψίας των μελών του φορέα.

Σύμφωνα με τη μητρική σχέση: $[\bar{K}^i] = [\hat{\Lambda}_{\text{PPT}}^i]^T \cdot [\hat{K}^i] \cdot [\hat{\Lambda}_{\text{PPT}}^i]$ έχουμε:

$$[\bar{K}^1] = [\bar{K}^2] = \frac{10^{-3}E}{5} \begin{bmatrix} 1.25 & 0 & -1.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.25 & 0 & 1.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{jj}^1] & [\bar{K}_{jk}^1] \\ [\bar{K}_{kj}^1] & [\bar{K}_{kk}^1] \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}^3] = [\bar{K}^4] = \frac{10^{-3}E}{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.67 & 0 & -1.67 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.67 & 0 & 1.67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{jj}^3] & [\bar{K}_{jk}^3] \\ [\bar{K}_{kj}^3] & [\bar{K}_{kk}^3] \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}^5] = \frac{10^{-3}E}{5} \begin{bmatrix} 0.64 & 0.48 & -0.64 & -0.48 \\ 0.48 & 0.36 & -0.48 & -0.36 \\ -0.64 & -0.48 & 0.64 & 0.48 \\ -0.48 & -0.36 & 0.48 & 0.36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{jj}^5] & [\bar{K}_{jk}^5] \\ [\bar{K}_{kj}^5] & [\bar{K}_{kk}^5] \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}^6] = \frac{10^{-3}E}{5} \begin{bmatrix} 0.64 & -0.48 & -0.64 & 0.48 \\ -0.48 & 0.36 & 0.48 & -0.36 \\ -0.64 & 0.48 & 0.64 & -0.48 \\ 0.48 & -0.36 & -0.48 & 0.36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{jj}^6] & [\bar{K}_{jk}^6] \\ [\bar{K}_{kj}^6] & [\bar{K}_{kk}^6] \end{bmatrix}$$

Βήμα 5^ο

Μόρφωση ολικού μητρώου ακαμψίας του φορέα.

$$\begin{array}{c} \text{αριθμηση} \longrightarrow \begin{array}{cccc} \overbrace{\Delta_1^1 \Delta_2^1}^1 & \overbrace{\Delta_1^2 \Delta_2^2}^2 & \overbrace{\Delta_1^3 \Delta_2^3}^3 & \overbrace{\Delta_1^4 \Delta_2^4}^4 \\ \text{κομβου} \end{array} \\ \downarrow \end{array} \quad [\bar{K}] = \begin{bmatrix} \begin{array}{c} \bar{P}_1^1 \\ \bar{P}_2^1 \end{array} & \begin{array}{c} [\bar{K}_{jj}^1] + [\bar{K}_{jj}^3] + \\ + [\bar{K}_{jj}^5] \end{array} & [\bar{K}_{jk}^1] & [\bar{K}_{jk}^3] & [\bar{K}_{jk}^5] \\ \begin{array}{c} \bar{P}_1^2 \\ \bar{P}_2^2 \end{array} & [\bar{K}_{kj}^1] & \begin{array}{c} [\bar{K}_{kk}^1] + [\bar{K}_{jj}^4] \\ + [\bar{K}_{jj}^6] \end{array} & [\bar{K}_{jk}^6] & [\bar{K}_{jk}^4] \\ \begin{array}{c} \bar{P}_1^3 \\ \bar{P}_2^3 \end{array} & [\bar{K}_{kj}^3] & [\bar{K}_{kj}^6] & \begin{array}{c} [\bar{K}_{jj}^2] + [\bar{K}_{kk}^3] + \\ + [\bar{K}_{kk}^{66}] \end{array} & [\bar{K}_{jk}^2] \\ \begin{array}{c} \bar{P}_1^4 \\ \bar{P}_2^4 \end{array} & [\bar{K}_{kj}^5] & [\bar{K}_{kj}^4] & [\bar{K}_{kj}^2] & \begin{array}{c} [\bar{K}_{kk}^2] + [\bar{K}_{kk}^4] + \\ + [\bar{K}_{kk}^5] \end{array} \end{bmatrix}$$

Αντικαθιστώντας τα πιο πάνω υπομητρώα από το 4^ο βήμα υπολογίζουμε το ολικό μητρώο ακαμψίας του φορέα:

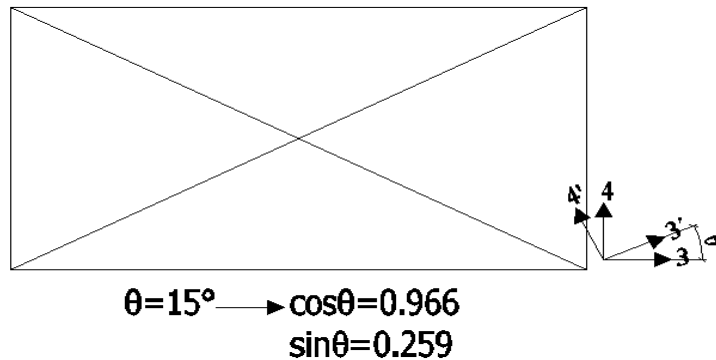
$$[\bar{K}] = \frac{10^{-3}E}{5} \begin{bmatrix} 1.89 & 0.48 & -1.25 & 0 & 1.89 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.48 & 2.03 & 0 & 0 & -0.48 & 2.03 & 0 & 0 & 0 \\ -1.25 & 0 & 1.89 & -0.64 & 0.48 & 1.89 & -0.48 & 2.03 & 0 \\ 0 & 0 & -0.64 & 0.48 & -0.36 & -0.48 & 2.03 & 0 & 1.89 \\ 0 & -1.67 & 0.48 & -0.36 & -0.48 & 2.03 & 0 & 0 & 1.89 \\ -0.64 & -0.48 & 0 & 0 & -1.25 & 0 & 1.89 & 0 & 0 \\ -0.48 & -0.36 & 0 & -1.67 & 0 & 0 & 0.48 & 2.03 & 0 \end{bmatrix}$$

ΣΗΜ: Προφανώς το πιο πάνω μητρώο ακαμψίας είναι συμμετρικό.

Βήμα 6^ο

Τροποποίηση μητρώου ολικής ακαμψίας του φορέα προκειμένου να συμπεριλάβουμε συνθήκες στηρίξεως σε μη καθολικούς άξονες (κεκλιμένη κύλιση).

Μόρφωση μητρώου μετασχηματισμού [R]:



αριθμηση
κομβού

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	$\cos \theta$	$\sin \theta$	0	0	0	0
4	0	0	$-\sin \theta$	$\cos \theta$	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1

όπου θ η γωνία κατά την οποία πρέπει να στραφεί ο καθολικός άξονας $\bar{X}_1$ δεξιόστροφα ώστε να συμπίψει με τον άξονα X_1 της κεκλιμένης κύλισης.

Σύμφωνα με την μητρωική σχέση: $[\bar{K}_m] = [R] \cdot [\bar{K}] \cdot [R]^T$ υπολογίζουμε το ολικό μητρώο ακαμψίας $[\bar{K}_m]$:

$$[\bar{K}_m] = \frac{10^{-3} E}{5} \begin{bmatrix} 1.89 & & & & & & & \\ 0.48 & 2.03 & & & & & & \\ -1.21 & 0 & 1.66 & & & & & \\ 0.32 & 0 & -0.38 & 2.26 & & & & \\ 0 & 0 & -0.49 & 0.63 & 1.89 & & & \\ 0 & -1.67 & 0.37 & -0.47 & -0.48 & 2.03 & & \\ -0.64 & -0.48 & 0 & 0 & -1.25 & 0 & 1.89 & \\ -0.48 & -0.36 & -0.43 & -1.61 & 0 & 0 & 0.48 & 2.03 \end{bmatrix}$$

Βήμα 7^ο

Αναδιάταξη μητρώου ακαμψίας ώστε να διαχωριστούν οι γνωστές ποσότητες (δεδομένα) από τις άγνωστες (αντιδράσεις, μετατοπίσεις).

Μόρφωση μητρώου μεταθέσεως $[V]$:

$$[V] = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \overline{P}_1 \\ \overline{P}_2 \\ \overline{P}_3' \\ \overline{P}_5 \\ \overline{P}_6 \\ \overline{P}_7 \\ \overline{P}_8 \end{array} \begin{array}{c} \overline{P}_1 \\ \overline{P}_2 \\ \overline{P}_3' \\ \overline{P}_4' \\ \overline{P}_5 \\ \overline{P}_6 \\ \overline{P}_7 \\ \overline{P}_8 \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Σύμφωνα με τη μητρική σχέση $[\overline{K}_{mm}] = [V] \cdot [\overline{K}_m] \cdot [V]^T$ υπολογίζουμε το ολικό μητρώο ακαμψίας $[\overline{K}_{mm}]$:

$$[\overline{K}_{mm}] = \frac{10^{-3} E}{5} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \overline{K} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \overline{K}_{fs} \end{bmatrix} \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} 1.66 & & & & & & & \\ -0.49 & 1.89 & & & & & & \\ 0.37 & -0.48 & 2.03 & & & & & \\ 0 & -1.25 & 0 & 1.89 & & & & \\ -0.43 & 0 & 0 & 0.48 & 2.03 & & & \\ -1.21 & 0 & 0 & -0.64 & -0.48 & 1.89 & & \\ 0 & 0 & -1.67 & -0.48 & -0.36 & 0.48 & 2.03 & \\ -0.38 & 0.63 & -0.47 & 0 & -1.61 & 0.32 & 0 & 2.26 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \overline{K}_{sf} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \overline{K}_{ss} \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$

Βήμα 8^ο

Μόρφωση αναδιατεταγμένων μητρώων εξωτερικών δράσεων $\left[\bar{P}_{mm}\right]$ και μετατοπίσεων κόμβων $\left[\bar{\Delta}_{mm}\right]$:

$$\left[\bar{P}_{mm}\right] = \begin{bmatrix} \bar{P}'_3 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{P}_6 \\ \bar{P}_7 \\ \bar{P}_8 \\ \hline \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100\cos 15^\circ \\ 100 \\ -100 \\ 100 \\ 0 \\ \hline \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}'_4 - 100\sin 15^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[\bar{P}\right] \\ \left[\bar{P}_s\right] \end{bmatrix}$$

$$\left[\bar{\Delta}_{mm}\right] = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}'_3 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \hline \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}'_3 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[\bar{\Delta}\right] \\ \left[\bar{\Delta}_s\right] \end{bmatrix}$$

Βήμα 9^ο

Επίλυση του συστήματος των εξισώσεων: $\begin{bmatrix} \left[\bar{P}\right] \\ \left[\bar{P}_s\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\bar{K}\right] & \left[\bar{K}_{fs}\right] \\ \left[\bar{K}_{sf}\right] & \left[\bar{K}_{ss}\right] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \left[\bar{\Delta}\right] \\ \left[\bar{\Delta}_s\right] \end{bmatrix}$ και

υπολογισμός των άγνωστων μετατοπίσεων των κόμβων $\left[\bar{\Delta}\right]$ καθώς και των άγνωστων

αντιδράσεων στις στηρίξεις $\left[\bar{P}_s\right]$:

$$\left[\bar{\Delta}\right] = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}'_3 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \end{bmatrix} = \frac{5 \cdot 10^3}{E} \begin{bmatrix} 119.65 \\ 208.20 \\ -21.90 \\ 195.92 \\ -20.94 \end{bmatrix}$$

$$\left[\bar{P}_s\right] = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -259.81 \\ -50.0 \\ 155.29 \end{bmatrix}$$

$$\text{Επίσης: } \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \end{bmatrix} = \frac{5 \cdot 10^3}{E} \begin{bmatrix} 115.57 \\ 30.97 \end{bmatrix}$$

Βήμα 10^ο

Υπολογισμός των ακραίων δράσεων των μελών του φορέα, σύμφωνα με τη σχέση:

$$[A^i] = [\hat{K}^i] \cdot [\hat{\Lambda}_{PPT}^i] \cdot [\hat{D}^i] \text{ όπου:}$$

$$[A^i] = \begin{bmatrix} A^{ij} \\ A^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{ij} \\ F_1^{ik} \end{bmatrix} \text{ το μητρώο ακραίων δράσεων μελών δικτυώματος}$$

$$[\hat{K}^i] = \frac{A_i \cdot E_i}{L_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ το τοπικό μητρώο ακαμψίας τους μέλους (βλ. βήμα 2^ο)}$$

$$[\hat{\Lambda}_{PPT}^i] = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi \end{bmatrix}$$

το μητρώο μετασχηματισμού του μέλους (βλ. βήμα 3^ο).

$$[\hat{D}^i] = \begin{bmatrix} -ij \\ \Delta_1 \\ -ij \\ \Delta_2 \\ -ik \\ \Delta_1 \\ -ik \\ \Delta_2 \end{bmatrix} \text{ το μητρώο μετατοπίσεων στα άκρα μετατοπίσεων στα άκρα του μέλους στο}$$

καθολικό σύστημα (βλ. βήμα 9^ο).

Μέλος 1

$$\begin{bmatrix} F_1^{1j} \\ F_1^{1k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 & -1.25 \\ -1.25 & 1.25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 115.57 \\ 30.97 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -144.47 \\ 144.47 \end{bmatrix}$$

Μέλος 2

$$\begin{bmatrix} F_1^{2j} \\ F_1^{2k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 & -1.25 \\ -1.25 & 1.25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 208.20 \\ -21.90 \\ 195.92 \\ -20.94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.34 \\ -15.34 \end{bmatrix}$$

Μέλος 3

$$\begin{bmatrix} F_1^{3j} \\ F_1^{3k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.67 & -1.67 \\ -1.67 & 1.67 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 208.20 \\ -21.90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36.51 \\ -36.51 \end{bmatrix}$$

Μέλος 4

$$\begin{bmatrix} F_1^{4j} \\ F_1^{4k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.67 & -1.67 \\ -1.67 & 1.67 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 115.57 \\ 30.97 \\ 195.92 \\ -20.94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 86.51 \\ -86.51 \end{bmatrix}$$

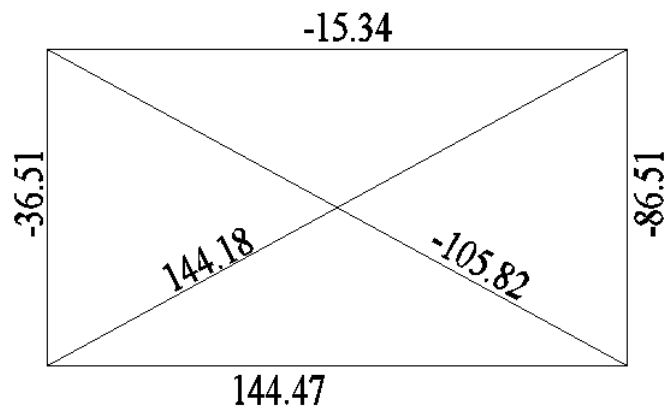
Μέλος 5

$$\begin{bmatrix} F_1^{5j} \\ F_1^{5k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 195.92 \\ -20.94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -144.18 \\ 144.18 \end{bmatrix}$$

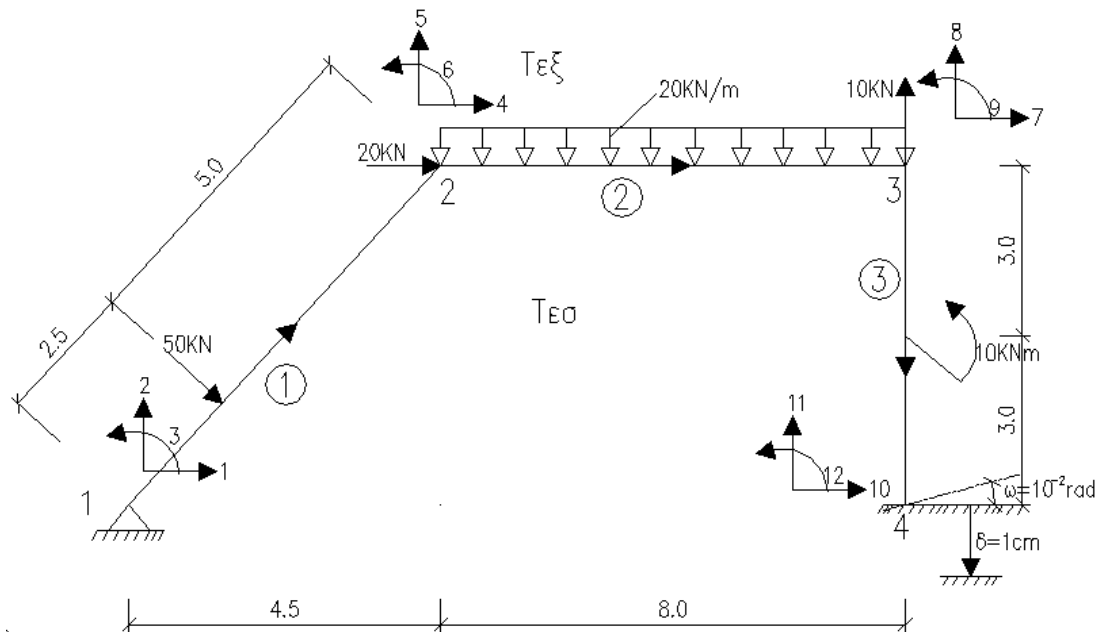
Μέλος 6

$$\begin{bmatrix} F_1^{6j} \\ F_1^{6k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 115.57 \\ 30.97 \\ 208.20 \\ -21.90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105.82 \\ -105.82 \end{bmatrix}$$

Αξονικές δυνάμεις δικτυώματος:



Άσκηση 2^η



Να επιλυθεί ο φορέας του σχήματος με τη μέθοδο άμεσης ακαμψίας.

$$\begin{aligned}
 E &= 2.1 \cdot 10^7 \text{ KN/m}^2 \\
 h &= 0.45 \text{ m (υψος διατομής)} \\
 A &= 0.12 \text{ m}^2 \\
 I &= 0.0016 \text{ m}^4 \\
 T_{\varepsilon\sigma} &= 20^\circ \text{ C} \\
 T_{\varepsilon\xi} &= 10^\circ \text{ C} \\
 T_o &= 10^\circ \text{ C} \\
 \alpha &= 10^{-5}
 \end{aligned}$$

ΛΥΣΗ

Βήμα 1^ο

Αρίθμηση κόμβων, μελών και βαθμών ελευθερίας του φορέα καθώς και φορά τοπικού άξονα X_1 των μελών του όπως φαίνεται στο σχήμα της εκφώνησης.

Στο βήμα αυτό ο φορέας εξετάζεται αμελώντας τον τρόπο στηρίξεώς του.

Βήμα 2^ο

Μόρφωση τοπικών μητρώων ακαμψίας των μελών του φορέα.

Τοπικό μητρώο ακαμψίας στοιχείου P_2 με σταθερή διατομή:

$$[K^i] = \begin{bmatrix} \frac{A_i E_i}{L_i} & 0 & 0 & -\frac{A_i E_i}{L_i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_i I_i^3}{L_i^3} & \frac{6E_i I_i^2}{L_i^2} & 0 & -\frac{12E_i I_i^3}{L_i^3} & \frac{6E_i I_i^2}{L_i^2} \\ 0 & \frac{6E_i I_i^2}{L_i^2} & \frac{4E_i I_i^2}{L_i} & 0 & -\frac{6E_i I_i^2}{L_i^2} & \frac{2E_i I_i^2}{L_i} \\ -\frac{A_i E_i}{L_i} & 0 & 0 & \frac{A_i E_i}{L_i} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E_i I_i^3}{L_i^3} & -\frac{6E_i I_i^2}{L_i^2} & 0 & \frac{12E_i I_i^3}{L_i^3} & -\frac{6E_i I_i^2}{L_i^2} \\ 0 & \frac{6E_i I_i^2}{L_i^2} & \frac{2E_i I_i^2}{L_i} & 0 & -\frac{6E_i I_i^2}{L_i^2} & \frac{4E_i I_i^2}{L_i} \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Μέλος [1]: } L_1 = 7.5\text{m}, A_1=0,12\text{m}^2, I^1=0,0016\text{m}^4 \\ \text{Μέλος [2]: } L_2 = 8.0\text{m}, A_2=0,12\text{m}^2, I^2=0,0016\text{m}^4 \\ \text{Μέλος [3]: } L_3 = 6.0\text{m}, A_3=0,12\text{m}^2, I^3=0,0016\text{m}^4 \end{array} \right\} A/I=75$$

$$[K^1] = EI \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0284 & 0.1067 & 0 & -0.0284 & 0.1067 \\ 0 & 0.1067 & 0.5333 & 0 & -0.1067 & 0.2667 \\ -10 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0284 & -0.1067 & 0 & 0.0284 & -0.1067 \\ 0 & 0.1067 & 0.2667 & 0 & -0.1067 & 0.5333 \end{bmatrix}$$

$$[K^2] = EI \begin{bmatrix} 9.375 & 0 & 0 & -9.375 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0234 & 0.0938 & 0 & -0.0234 & 0.0938 \\ 0 & 0.0938 & 0.5 & 0 & -0.0938 & 0.25 \\ -9.375 & 0 & 0 & 9.375 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0234 & -0.0938 & 0 & 0.0234 & -0.0938 \\ 0 & 0.0938 & 0.25 & 0 & -0.0938 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$[K^3] = EI \begin{bmatrix} 12.5 & 0 & 0 & -12.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0556 & 0.167 & 0 & -0.0556 & 0.167 \\ 0 & 0.167 & 0.667 & 0 & -0.167 & 0.333 \\ -12.5 & 0 & 0 & 12.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0556 & -0.167 & 0 & 0.0556 & -0.167 \\ 0 & 0.167 & 0.333 & 0 & -0.167 & 0.667 \end{bmatrix}$$

Βήμα 3^ο

Μόρφωση μητρώων μετασχηματισμού των μελών του φορέα.

Μητρώο μετασχηματισμού στοιχείου τύπου P₂:

$$[\Lambda_{PPF}^i] = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

όπου ϕ η γωνία κατά την οποία πρέπει να στραφεί ο καθολικός άξονας $\bar{X}_1$ δεξιόστροφα ώστε να συμπίψει με τον τοπικό άξονα X_1 του μέλους.

Μέλος [1]: $\phi_1 = 53.13^\circ$

Μέλος [2]: $\phi_2 = 0^\circ$

Μέλος [3]: $\phi_2 = 270^\circ$

$$[\Lambda_{PPF}^1] = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\Lambda_{PPF}^2 \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\Lambda_{PPF}^3 \right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Βήμα 4^ο

Μόρφωση καθολικών μητρώων ακαμψίας των μελών του φορέα.

Σύμφωνα με τη μητρωική σχέση: $\left[\bar{K}^i \right] = \left[\hat{\Lambda}_{PPF}^i \right]^T \cdot \left[K^i \right] \cdot \left[\Lambda_{PPF}^i \right]$ έχουμε:

$$\left[\bar{K}^1 \right] = EI \begin{bmatrix} 3.618 & & & & & \\ 4.786 & 6.410 & & & & \\ -0.085 & 0.064 & 0.533 & & & \\ -3.618 & -4.786 & 0.085 & 3.618 & & \\ -4.786 & -6.410 & -0.064 & 4.786 & 6.410 & \\ -0.085 & 0.064 & 0.266 & 0.085 & -0.064 & 0.533 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\bar{K}_{jj}^1 \right] & \left[\bar{K}_{jk}^1 \right] \\ \left[\bar{K}_{kj}^1 \right] & \left[\bar{K}_{kk}^1 \right] \end{bmatrix}$$

$$\left[\bar{K}^2 \right] = EI \begin{bmatrix} 9.375 & & & & & \\ 0 & 0.0234 & & & & \\ 0 & 0.0938 & 0.5 & & & \\ -9.375 & 0 & 0 & 9.375 & & \\ 0 & -0.0234 & -0.0938 & 0 & 0.0234 & \\ 0 & 0.0938 & 0.25 & 0 & -0.0938 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\bar{K}_{jj}^2 \right] & \left[\bar{K}_{jk}^2 \right] \\ \left[\bar{K}_{kj}^2 \right] & \left[\bar{K}_{kk}^2 \right] \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}^3] = EI \begin{bmatrix} 0.0555 & & & & & \\ & 0 & 12.50 & & & \\ & 0.167 & 0 & 0.667 & & \\ \hline & -0.0555 & 0 & -0.167 & 0.0555 & \\ & 0 & -12.5 & 0 & 0 & 12.5 \\ & 0.167 & 0 & 0.333 & -0.167 & 0 & 0.667 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{jj}^3] & [\bar{K}_{jk}^3] \\ [\bar{K}_{kj}^3] & [\bar{K}_{kk}^3] \end{bmatrix}$$

Βήμα 5^ο

Μόρφωση ολικού μητρώου ακαμψίας του φορέα:

$$[\bar{K}] = \begin{matrix} \text{αριθμηση} \\ \text{κομβου} \end{matrix} \begin{matrix} \xrightarrow{1} & \xrightarrow{2} & \xrightarrow{3} & \xrightarrow{4} \\ \overline{U}_1^1 & \overline{U}_2^1 & \overline{\theta}_3^1 & \overline{U}_1^2 & \overline{U}_2^2 & \overline{\theta}_3^2 & \overline{U}_1^3 & \overline{U}_2^3 & \overline{\theta}_3^3 & \overline{U}_1^4 & \overline{U}_2^4 & \overline{\theta}_3^4 \end{matrix}$$

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \overline{P}_1 \\ \overline{P}_2 \\ \overline{M}_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} [\bar{K}_{jj}^1] & [\bar{K}_{jk}^1] & [0] & [0] \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ \overline{P}_1 \\ \overline{P}_2 \\ \overline{M}_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} [\bar{K}_{kj}^1] & [\bar{K}_{kk}^1] + [\bar{K}_{jj}^2] & [\bar{K}_{jk}^2] & [0] \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ \overline{P}_1 \\ \overline{P}_2 \\ \overline{M}_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} [0] & [\bar{K}_{kj}^2] & [\bar{K}_{kk}^2] + [\bar{K}_{jj}^3] & [\bar{K}_{jk}^3] \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ \overline{P}_1 \\ \overline{P}_2 \\ \overline{M}_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} [0] & [0] & [\bar{K}_{kj}^3] & [\bar{K}_{kk}^3] \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Αντικαθιστώντας τα πιο πάνω υπομητρώα από το 4^ο βήμα υπολογίζουμε το ολικό μητρώο ακαμψίας του φορέα:

$$[\bar{K}] = EI \begin{bmatrix} 3.618 & & & & & & & & & & & & \\ 4.786 & 6.410 & & & & & & & & & & & \\ -0.085 & 0.064 & 0.533 & & & & & & & & & & \\ -3.618 & -4.786 & 0.085 & 12.993 & & & & & & & & & \\ -4.786 & -6.410 & -0.064 & 4.786 & 6.433 & & & & & & & & \\ -0.085 & 0.064 & 0.266 & 0.085 & 0.030 & 1.033 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -9.375 & 0 & 0 & 9.430 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.023 & -0.094 & 0 & 12.523 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.094 & 0.25 & 0.167 & -0.094 & 1.167 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.055 & 0 & -0.167 & 0.055 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12.5 & 0 & 0 & 12.5 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.167 & 0 & 0.333 & -0.167 & 0 & 0.667 & \end{bmatrix}$$

Βήμα 6^ο

Αναδιάταξη μητρώου ακαμψίας λόγω στηρίξεως του φορέα ώστε να διαχωριστούν οι γνωστές ποσότητες (δεδομένα) από τις άγνωστες (αντιδράσεις, μετατοπίσεις).

Μόρφωση μητρώου μεταθέσεως $[V]$:

$$[V] = \begin{matrix} \bar{P}_1^1 & \bar{P}_2^1 & \bar{M}_3^1 & \bar{P}_1^2 & \bar{P}_2^2 & \bar{M}_3^2 & \bar{P}_1^3 & \bar{P}_2^3 & \bar{M}_3^3 & \bar{P}_1^4 & \bar{P}_2^4 & \bar{M}_3^4 \\ \bar{M}_3^1 & \bar{P}_1^2 & \bar{P}_2^2 & \bar{M}_3^2 & \bar{P}_1^3 & \bar{P}_2^3 & \bar{M}_3^3 & \bar{P}_1^4 & \bar{P}_2^4 & \bar{M}_3^4 & \bar{P}_1^1 & \bar{P}_2^1 & \bar{M}_3^1 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Σύμφωνα με τη μητρική σχέση: $[\bar{K}_m] = [V] \cdot [\bar{K}] \cdot [V]^T$ υπολογίζουμε το ολικό μητρώο ακαμψίας $[\bar{K}_m]$:

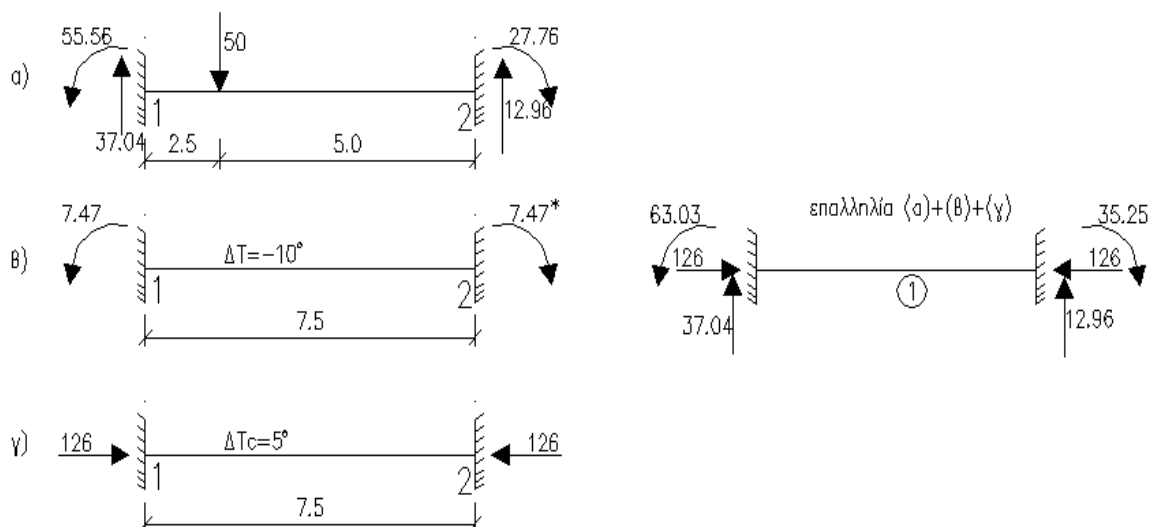
$$[\bar{K}_m] = EI \begin{bmatrix} 0.533 & & & & & & & & & & \\ 0.084 & 12.352 & & & & & & & & & \\ -0.063 & 4.786 & 6.433 & & & & & & & & \\ 0.266 & 0.084 & 0.030 & 1.033 & & & & & & & \\ 0 & -9.375 & 0 & 0 & 9.430 & & & & & & \\ 0 & 0 & -0.023 & -0.093 & 0 & 12.523 & & & & & \\ 0 & 0 & 0.093 & 0.25 & 0.166 & -0.093 & 0.166 & & & & \\ -0.084 & -3.617 & -4.786 & -0.084 & 0 & 0 & 0 & 3.617 & & & \\ 0.063 & -4.786 & -6.410 & 0.063 & 0 & 0 & 0 & 4.786 & 6.410 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.055 & 0 & -0.166 & 0 & 0 & 0.055 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.166 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & -0.666 & 0 & 0.666 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}_{sf}] \quad [\bar{K}_{ss}]$$

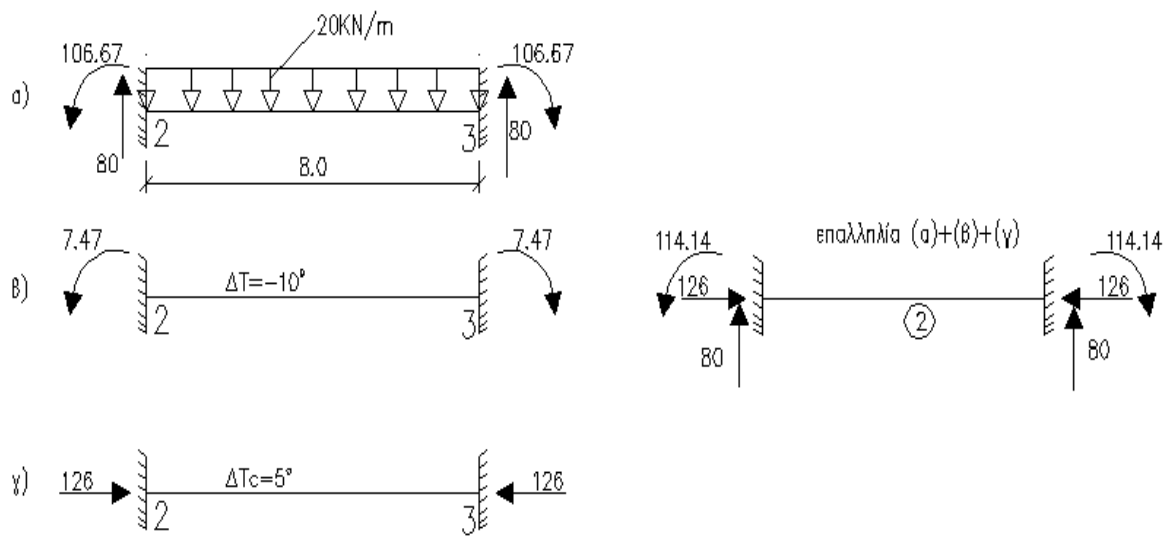
Βήμα 7^ο

Υπολογισμός δράσεων παγιώσεων των στοιχείων. Εξετάζουμε τον παγιωμένο φορέα και τοποθετούμε τις αντιδράσεις των αμφίπακτων στοιχείων σύμφωνα με τις σχέσεις του Παραρτήματος. (Για την εύρεση των αντιδράσεων του αμφίπακτου στοιχείου σε περίπτωση πιο σύνθετης φόρτισης μπορούν να χρησιμοποιηθούν πιο πολύπλοκες μέθοδοι.) Για τις ροπές κάμψης λόγω θερμοκρασίας: $*T^{(+)} = T^{\varepsilon\xi}$ & $T^{(-)} = T^{\varepsilon\sigma}$.

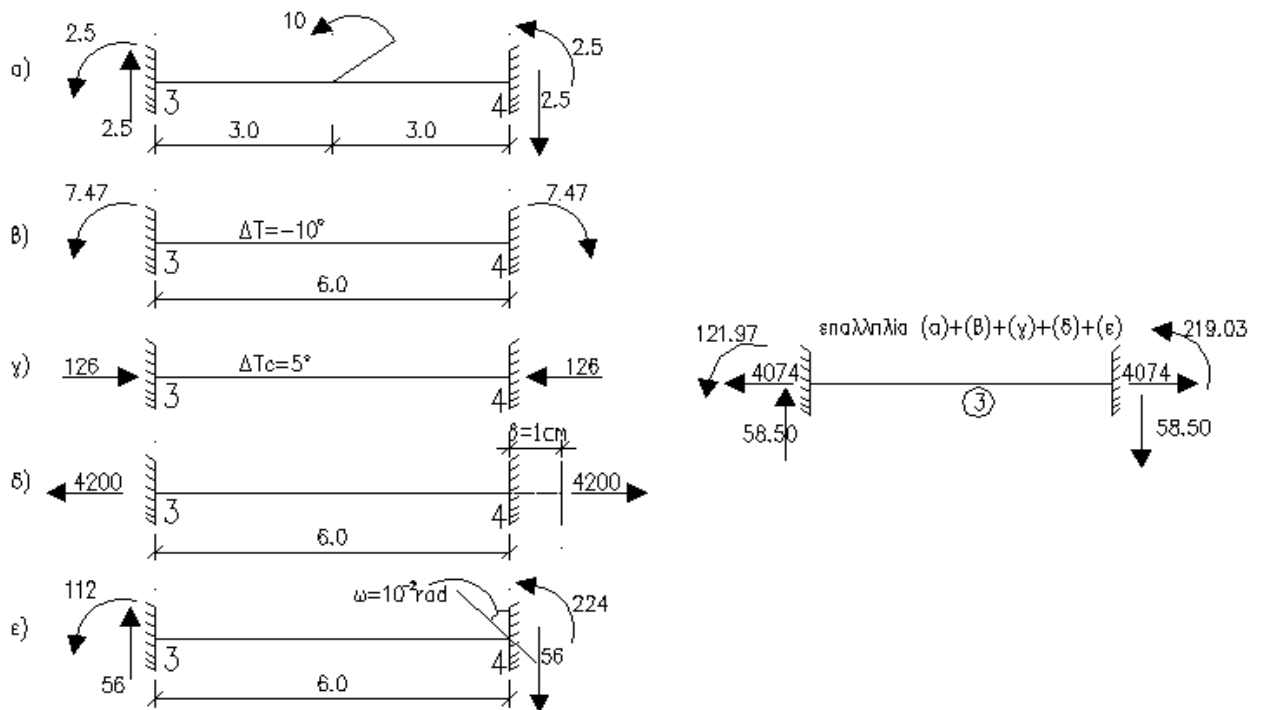
Μέλος [1]:



Μέλος [2]:



Μέλος [3]:



Μέλος 1

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_r^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{PPF}^1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} A_r^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 126 \\ 37.04 \\ 63.03 \\ -126 \\ 12.96 \\ -35.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45.968 \\ 123.024 \\ 63.03 \\ -85.968 \\ -93.024 \\ -35.25 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{A}_r^{1j} \\ \bar{A}_r^{1k} \end{bmatrix}$$

Μέλος 2

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_r^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{PPF}^2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} A_r^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 126 \\ 80 \\ 114.14 \\ -126 \\ 80 \\ -114.14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 126 \\ 80 \\ 114.14 \\ -126 \\ 80 \\ -114.14 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{A}_r^{2j} \\ \bar{A}_r^{2k} \end{bmatrix}$$

Μέλος 3

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_r^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{PPF}^3 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} A_r^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4074 \\ 58.50 \\ 121.97 \\ 4074 \\ -58.50 \\ 219.03 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58.50 \\ 1074.0 \\ 121.97 \\ -58.50 \\ -4074.0 \\ 219.03 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{A}_r^{3j} \\ \bar{A}_r^{3k} \end{bmatrix}$$

Υπολογισμός των δράσεων παγίωσης των κόμβων

$$\text{Κόμβος 1: } [\bar{S}^1] = [\bar{A}_r^{1j}] = \begin{bmatrix} 45.968 \\ 123.024 \\ 63.03 \end{bmatrix}$$

$$\text{Κόμβος 2: } [\bar{S}^2] = [\bar{A}_r^{1k}] + [\bar{A}_r^{2j}] = \begin{bmatrix} -85.968 \\ -93.024 \\ -35.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 126.0 \\ 80.0 \\ 114.14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40.032 \\ -13.024 \\ 78.890 \end{bmatrix}$$

$$\text{Κόμβος 3: } [\bar{S}^3] = [\bar{A}_r^{2k}] + [\bar{A}_r^{3j}] = \begin{bmatrix} -126.0 \\ 80.0 \\ -114.14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 58.50 \\ 4074 \\ 121.97 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -67.50 \\ 4154 \\ 7.83 \end{bmatrix}$$

$$\text{Κόμβος 4: } [\bar{S}^4] = [\bar{A}_r^{3k}] = \begin{bmatrix} -58.50 \\ -4074.0 \\ 219.03 \end{bmatrix}$$

Βήμα 8^ο

Μόρφωση αναδιατεταγμένων μητρώων εξωτερικών δράσεων $[\bar{P}_m] = [V] \cdot [\hat{P}]$ και

μετατοπίσεων κόμβων $[\bar{\Delta}_{mm}] = [V] \cdot [\hat{\Delta}]$:

$$[\bar{P}_m] = \begin{bmatrix} \bar{M}_3^1 \\ \bar{P}_1^2 \\ \bar{P}_2^2 \\ \bar{M}_3^2 \\ \bar{P}_1^3 \\ \bar{P}_2^3 \\ \bar{M}_3^3 \\ \dots \\ \bar{P}_1^1 \\ \bar{P}_2^1 \\ \bar{P}_1^4 \\ \bar{P}_2^4 \\ \bar{M}_3^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -63.03 \\ 20 - 40.032 \\ 13.024 \\ -78.890 \\ 67.50 \\ 10 - 4154 \\ -7.83 \\ \dots \\ P_1^1 - 45.968 \\ P_2^1 - 123.024 \\ P_1^4 + 58.50 \\ P_2^4 + 4074 \\ M_3^4 - 219.03 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow [\bar{P}] \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \rightarrow [\bar{P}_s] \end{matrix}$$

$$[\bar{\Delta}_m] = \begin{bmatrix} \bar{\theta}_3^1 \\ \bar{U}_1^2 \\ \bar{U}_2^2 \\ \bar{\theta}_3^2 \\ \bar{U}_1^3 \\ \bar{U}_2^3 \\ \bar{\theta}_3^3 \\ \dots \\ \bar{U}_1^1 \\ \bar{U}_2^1 \\ \bar{U}_1^4 \\ \bar{U}_2^4 \\ \bar{\theta}_3^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\theta}_3^1 \\ \bar{U}_1^2 \\ \bar{U}_2^2 \\ \bar{\theta}_3^2 \\ \bar{U}_1^3 \\ \bar{U}_2^3 \\ \bar{\theta}_3^3 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow [\bar{\Delta}] \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \rightarrow [\bar{\Delta}_s] \end{matrix}$$

Βήμα 9^ο

Επίλυση του συστήματος των εξισώσεων:
$$\begin{bmatrix} \bar{P} \\ \bar{P}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K} & \bar{K}_{fs} \\ \bar{K}_{sf} & \bar{K}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\Delta} \\ \bar{\Delta}_s \end{bmatrix} \text{ και}$$

υπολογισμός των άγνωστων μετατοπίσεων των κόμβων $\bar{\Delta}$ καθώς και των άγνωστων αντιδράσεων στις στηρίξεις $\bar{P}_s$:

$$\begin{bmatrix} \bar{\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\theta}_3^{-1} \\ \bar{U}_1^{-2} \\ \bar{U}_2^{-2} \\ \bar{\theta}_3^{-2} \\ \bar{U}_1^{-3} \\ \bar{U}_2^{-3} \\ \bar{\theta}_3^{-3} \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -298.453 \\ 851.778 \\ -634.181 \\ -58.077 \\ 855.589 \\ -333.180 \\ -82.066 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \bar{P}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1^{-1} \\ \bar{P}_2^{-1} \\ \bar{P}_1^{-4} \\ \bar{P}_2^{-4} \\ \bar{M}_3^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30.276 \\ 89.116 \\ -90.274 \\ 90.875 \\ 330.403 \end{bmatrix}$$

Βήμα 10^ο

Υπολογισμός των ακραίων δράσεων των μελών του φορέα, σύμφωνα με τη σχέση:

$$\begin{bmatrix} A^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_r^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{PPF}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{D}^i \end{bmatrix} \text{ όπου:}$$

- $\begin{bmatrix} A^i \end{bmatrix}$ το μητρώο ακραίων δράσεων του μέλους
- $\begin{bmatrix} A_r^i \end{bmatrix}$ το μητρώο ακραίων δράσεων του μέλους του παγιωμένου φορέα (βλ. βήμα 7^ο)
- $\begin{bmatrix} K^i \end{bmatrix}$ το τοπικό μητρώο ακαμψίας του μέλους (βλ. βήμα 2^ο)
- $\begin{bmatrix} \Lambda_{ppf}^i \end{bmatrix}$ το μητρώο μετασχηματισμού του μέλους (βλ. βήμα 3^ο)
- $\begin{bmatrix} \bar{D}^i \end{bmatrix}$ το μητρώο μετατοπίσεων στα άκρα του μέλους στο καθολικό σύστημα (βλ. βήμα 9^ο)

Μέλος 1

$$\begin{bmatrix} F_{1j}^{1j} \\ F_{2j}^{1j} \\ M_{3j}^{1j} \\ F_{1k}^{1k} \\ F_{2k}^{1k} \\ M_{3k}^{1k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 126 \\ 37.04 \\ 63.03 \\ -126 \\ 12.96 \\ -35.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & & & & & & \\ & 0.0284 & & & & & \\ & 0 & 0.1067 & 0.533 & & & \\ -10 & 0 & 0 & 10 & & & \\ & 0 & -0.0284 & -0.1067 & 0 & 0.284 & \\ & 0 & 0.1067 & 0.2667 & 0 & -0.1067 & 0.533 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -298.453 \\ 851.778 \\ 634.191 \\ -58.077 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 88.86 \\ 28.979 \\ 1.062 \\ -88.86 \\ 21.021 \\ -33.021 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0^* \\ 0^* \\ 0^* \\ 0^* \\ 34.084^* \\ 0^* \end{bmatrix}$$

Μέλος 2

$$\begin{bmatrix} F_{1j}^{2j} \\ F_{2j}^{2j} \\ M_{3j}^{2j} \\ F_{1k}^{2k} \\ F_{2k}^{2k} \\ M_{3k}^{2k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 126 \\ 80 \\ 114.14 \\ -126 \\ 80 \\ -114.14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9.375 & & & & & & \\ & 0.0234 & & & & & \\ & 0 & 0.0938 & 0.5 & & & \\ -9.375 & 0 & 0 & 9.375 & & & \\ & 0 & -0.0234 & -0.0938 & 0 & 0.0234 & \\ & 0 & 0.0938 & 0.25 & 0 & -0.0938 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 851.778 \\ -634.191 \\ -58.077 \\ 855.589 \\ -333.190 \\ -92.066 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90.272 \\ 59.114 \\ 34.084 \\ -90.272 \\ 100.886 \\ -202.677 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0^* \\ 0^* \\ 33.021^* \\ 0^* \\ 0^* \\ 0^* \end{bmatrix}$$

* Η ανακρίβεια των αποτελεσμάτων οφείλεται στο μικρό αριθμό σημαντικών ψηφίων που κρατήθηκαν κατά την επίλυση.

Μέλος 3

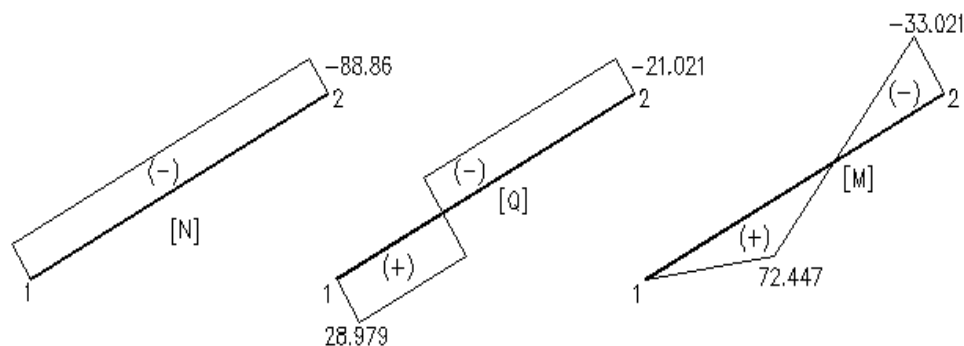
$$\begin{bmatrix} F_{13j} \\ F_{23j} \\ M_{3j} \\ F_{13k} \\ F_{23k} \\ M_{3k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4074 \\ 58.5 \\ 121.97 \\ 4074 \\ -58.5 \\ 219.03 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0556 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.167 & 0.667 & 0 & 0 & 0 \\ -9.375 & 0 & 0 & 12.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0556 & -0.167 & 0 & 0.0556 & 0 \\ 0 & 0.167 & 0.333 & 0 & -0.167 & 0.667 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 855.589 \\ -333.190 \\ -92.066 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90.875 \\ 90.274 \\ 202.677 \\ -90.875 \\ -90.274 \\ 330.403 \end{bmatrix}$$

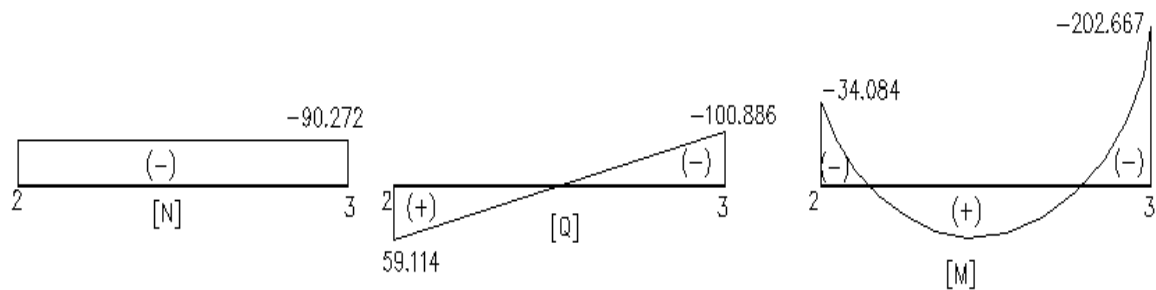
Βήμα 11^ο

Διαγράμματα εντατικών μεγεθών των μελών του φορέα:

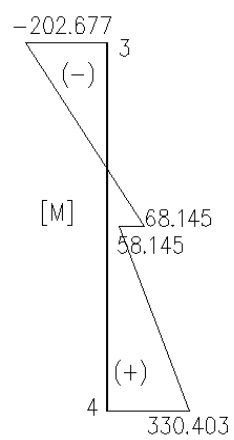
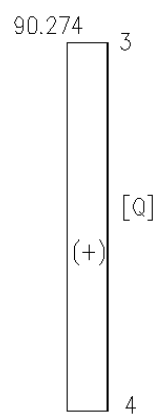
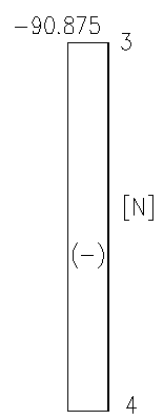
Μέλος 1



Μέλος 2

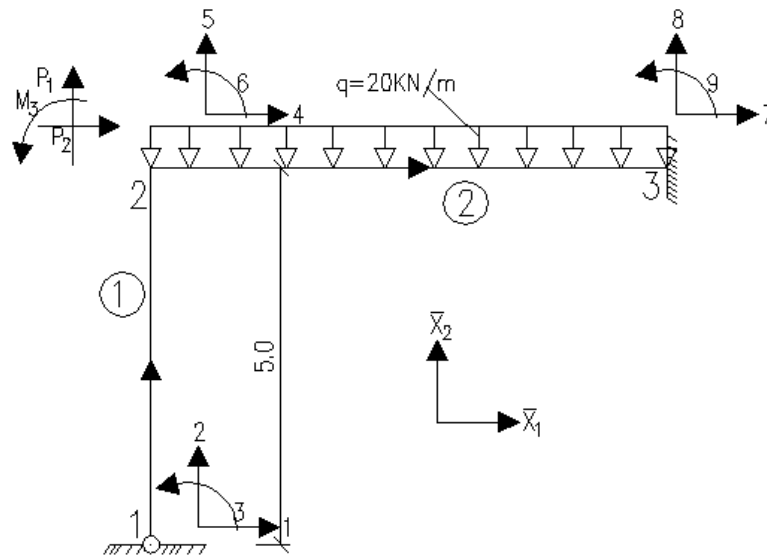


Μέλος 3



Άσκηση 3^η

Στο φορέα του σχήματος δίνονται οι μετατοπίσεις του κόμβου 2 και ζητούνται τα επικόμβια φορτία P_1 , P_2 , M_3 που απαιτούνται για να προκύψουν αυτές οι μετατοπίσεις, καθώς και οι ακραίες δράσεις των ράβδων του φορέα. Το στοιχείο (1) αρχικά θα θεωρηθεί σαν κανονικό στοιχείο επίπεδου πλαισίου $[P_2]$ και στη συνέχεια θα τροποποιηθεί σε $[P'_2]$ απαλείφοντας τον στροφικό βαθμό ελευθερίας στον κόμβο 1.



Διατομή δοκών: $20 \times 30 \text{ cm}^2$

$E = 2.1 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$

$\Delta_1^{(2)} = 0.0015$

$\Delta_2^{(2)} = -0.0030$

$\Delta_3^{(2)} = -0.1064$

$l_1 = l_2 = 5 \text{ m}$

ΛΥΣΗ

Βήμα 1^ο

Αρίθμηση κόμβων, μελών και βαθμών ελευθερίας του φορέα καθώς και φορά τοπικού άξονα X_1 των μελών του όπως φαίνεται στο σχήμα της εκφώνησης.

Βήμα 2^ο

Μόρφωση τοπικών μητρώων ακαμψίας των μελών του φορέα.

Μέλος [1]: $L_1 = 5\text{m}$, $A_1 = 0,06\text{m}^2$, $I^1 = bh^3/12 = 0.00045\text{m}^4$, $EI = 9450\text{kNm}^2$

Μέλος [2]: $L_2 = 5\text{m}$, $A_2 = 0,06\text{m}^2$, $I^2 = bh^3/12 = 0.00045\text{m}^4$, $EI = 9450\text{kNm}^2$

$$[K^1] = [K^2] = EI \begin{bmatrix} 26.667 & & & & & & \\ & 0 & 0.096 & & & & \\ & 0 & 0.24 & 0.8 & & & \\ -26.667 & & 0 & 0 & 26.667 & & \\ & 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & \\ & 0 & 0.24 & 0.4 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Βήμα 3^ο

Μόρφωση μητρώων μετασχηματισμού, καθολικών μητρώων ακαμψίας των μελών του φορέα:

Μέλος [1]: $\varphi_1 = 90^\circ$, $\cos\varphi = 0$, $\sin\varphi = 1$

Μέλος [2]: $\varphi_2 = 0^\circ$, $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = 0$

Επομένως:

$$\left[\Lambda_{PPF}^1\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left[\Lambda_{PPF}^2\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Βήμα 4^ο

Μόρφωση καθολικών μητρώων ακαμψίας των μελών του φορέα.

Σύμφωνα με τη μητρική σχέση: $\left[\bar{K}^i\right] = \left[\hat{\Lambda}_{PPF}^i\right]^T \cdot \left[K^i\right] \cdot \left[\Lambda_{PPF}^i\right]$ έχουμε:

$$\left[\bar{K}^1\right] = EI \begin{bmatrix} 0.096 & & & & & \\ 0 & 26.667 & & & & \\ \hline -0.24 & 0 & 0.8 & & & \\ -0.096 & 0 & 0.24 & 0.096 & & \\ 0 & -26.667 & 0 & 0 & 26.667 & \\ -0.24 & 0 & 0.4 & 0.24 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$\left[\bar{K}^2\right] = \left[K^2\right] = EI \begin{bmatrix} 26.667 & & & & & \\ 0 & 0.096 & & & & \\ 0 & 0.24 & 0.8 & & & \\ -26.667 & 0 & 0 & 26.667 & & \\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & \\ 0 & 0.24 & 0.4 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Βήμα 5^ο

Τροποποίησης του στοιχείου [1] σε $[P'_2]$. Στατική συμπίκνωση των στροφικών βαθμών ελευθερίας στον κόμβο 1. Εφαρμόζουμε αρχική αναδιάταξη του καθολικού μητρώου ακαμψίας του μέλους [1]:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \left[\bar{K}_{ee}^{-1} \right] \end{array} \qquad \begin{array}{c} \left[\bar{K}_{ec}^{-1} \right] \end{array} \\
\left[\bar{K}_m^{-1} \right] = EI \left[\begin{array}{c|ccc} 0.8 & & & \\ -0.24 & 0.096 & & \\ \hline 0 & 0 & 26.667 & \\ 0.24 & -0.096 & 0 & 0.096 \\ 0 & 0 & -26.667 & 0 \\ 0.4 & -0.24 & 0 & 0.24 \end{array} \right] \\
\begin{array}{c} \left[\bar{K}_{ce}^{-1} \right] \end{array} \qquad \begin{array}{c} \left[\bar{K}_{cc}^{-1} \right] \end{array}
\end{array}$$

Και ακολούθως βρίσκουμε το τροποποιημένο μητρώο ακαμψίας του μέλους [1] σύμφωνα με

τη σχέση $\left[\bar{K}_c^{-1} \right] = \left[\bar{K}_{cc}^{-1} \right] - \left[\bar{K}_{ce}^{-1} \right] \left[\bar{K}_{ee}^{-1} \right]^{-1} \left[\bar{K}_{ec}^{-1} \right]$

$$\left[\bar{K}_c^{-1} \right] = EI \left[\begin{array}{c|cc} 0.024 & & \\ 0 & 26.667 & \\ \hline -0.024 & 0 & 0.024 \\ 0 & -26.667 & 0 \\ -0.12 & 0 & 0.12 \end{array} \right]$$

Βήμα 6^ο

Σύνθεση των καθολικών μητρώων ακαμψίας των μελών του φορέα και μόρφωση ολικού μητρώου ακαμψίας του φορέα.

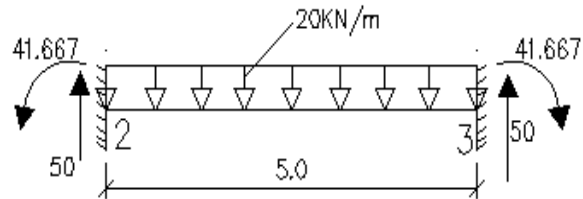
$$\left[\bar{K} \right] = EI \begin{array}{c} \begin{array}{c} \#1 \\ \#2 \\ \#3 \end{array} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \right. \left[\begin{array}{ccccccccc} \begin{array}{cc} \overbrace{\hspace{1.5cm}} \#1 \\ 1 \quad 2 \end{array} & \begin{array}{ccc} \overbrace{\hspace{1.5cm}} \#2 \\ 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} & \begin{array}{ccc} \overbrace{\hspace{1.5cm}} \#3 \\ 7 \quad 8 \quad 9 \end{array} \\ 0.024 & 0 & -0.024 & 0 & -0.12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 26.667 & 0 & -26.667 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.024 & 0 & 26.691 & 0 & 0.12 & -26.667 & 0 & 0 \\ 0 & -26.667 & 0 & 26.763 & 0.24 & 0 & -0.096 & -0.24 \\ -0.12 & 0 & 0.12 & 0.24 & 1.4 & 0 & 0.24 & 0.4 \\ 0 & 0 & -26.667 & 0 & 0 & 26.667 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.099 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0 & 0 & 0.24 & 0.4 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{array} \right] \end{array}$$

Βήμα 7^ο

Υπολογισμός δράσεων παγιώσεως. Εξετάζουμε τον παγιωμένο φορέα:

Μέλος [1]: Αφόρτιστο

Μέλος [2]:



$$\text{Μέλος [1]: } \begin{bmatrix} \bar{A}_r^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_r^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{A}_r^{1j} \\ \bar{A}_r^{1k} \end{bmatrix}$$

Μέλος [2]:

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_r^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{PPF}^2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} A_r^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ 41.667 \\ 0 \\ 50 \\ 41.667 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ 41.667 \\ 0 \\ 50 \\ 41.667 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{A}_r^{2j} \\ \bar{A}_r^{2k} \end{bmatrix}$$

Δράσεις παγιώσεως κόμβων:

$$\text{Κόμβος 1: } \begin{bmatrix} \bar{S}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_r^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Κόμβος 2: } \begin{bmatrix} \bar{S}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_r^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{A}_r^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ 41.667 \end{bmatrix}$$

Κόμβος 3: $[\bar{S}^{-3}] = [\bar{A}_r^{-2k}] =$

Βήμα 8^ο

Μόρφωση συστήματος εξισώσεων $\begin{bmatrix} \bar{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\Delta} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1^{-1} \\ \bar{P}_2^{-1} \\ \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 - 50 \\ \bar{M}_3 - 41.667 \\ \bar{P}_1^{-3} \\ \bar{P}_2^{-3} - 50 \\ \bar{M}_3 + 41.667 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 0.024 & 0 & -0.024 & 0 & -0.12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 26.667 & 0 & -26.667 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.024 & 0 & 26.691 & 0 & 0.12 & -26.667 & 0 & 0 \\ 0 & -26.667 & 0 & 26.763 & 0.24 & 0 & -0.096 & -0.24 \\ -0.12 & 0 & 0.12 & 0.24 & 1.4 & 0 & 0.24 & 0.4 \\ 0 & 0 & -26.667 & 0 & 0 & 26.667 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.099 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0 & 0 & 0.24 & 0.4 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0015 \\ -0.003 \\ -0.1064 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Από την παραπάνω μητρωϊκή σχέση υπολογίζουμε τα άγνωστα επικόμβια φορτία P_1, P_2, M_3 καθώς και τις αντιδράσεις $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_2, \bar{M}_3$ του φορέα αφού σε αυτήν την περίπτωση έχουμε να λύσουμε ένα «αντίστροφο» πρόβλημα: είναι γνωστές οι μετατοπίσεις $\left[\bar{\Delta}\right]$ και άγνωστες οι δράσεις $\left[\bar{P}\right]$, οπότε προκύπτει ότι:

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1^1 \\ \bar{P}_2^1 \\ \bar{P}_1^2 \\ \bar{P}_2^2 \\ \bar{M}_3^2 \\ \bar{P}_1^3 \\ \bar{P}_2^3 \\ \bar{M}_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120.3174 \\ 756.0095 \\ 257.6873 \\ -950.0463 \\ -1371.1080 \\ -378.0047 \\ 294.0368 \\ -450.663 \end{bmatrix}$$

Βήμα 9^ο

Υπολογισμός των ακραίων δράσεων των μελών του φορέα. Για το μέλος [1] υπολογίζουμε αρχικά τις ακραίες δράσεις του μέλους στο καθολικό σύστημα αξόνων σύμφωνα με τη σχέση:

$$[\bar{A}^1] = [\bar{A}_r^1] + [\bar{K}_c^1] \cdot [\bar{D}^1]$$

$$\begin{bmatrix} F_{1\ 1j}^1 \\ F_{2\ 1j}^1 \\ F_{1\ 1k}^1 \\ F_{2\ 1k}^1 \\ M_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + EI \begin{bmatrix} 0.024 & 0 & -0.024 & 0 & -0.12 \\ 0 & 26.667 & 0 & -26.667 & 0 \\ -0.024 & 0 & 0.024 & 0 & 0.12 \\ 0 & -26.667 & 0 & 26.667 & 0 \\ -0.12 & 0 & 0.12 & 0 & 0.6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0015 \\ -0.003 \\ -0.1064 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120.3174 \\ 756.0095 \\ -120.3174 \\ -756.0095 \\ -601.587 \end{bmatrix}$$

Και ακολούθως τις μετατρέπουμε στο τοπικό σύστημα αξόνων σύμφωνα με τη σχέση:

$$[A^1] = [\Lambda_{PPF}^1] \cdot [\bar{A}^1]$$

$$\begin{bmatrix} F_{1\ 1j}^1 \\ F_{2\ 1j}^1 \\ M_3^1 \\ F_{1\ 1k}^1 \\ F_{2\ 1k}^1 \\ M_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 120.3174 \\ 756.0095 \\ 0 \\ -120.3174 \\ -756.0095 \\ -601.587 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 756.0095 \\ -120.3174 \\ 0 \\ -756.0095 \\ 120.3174 \\ -601.587 \end{bmatrix}$$

Για το μέλος [2] υπολογίζουμε τις ακραίες δράσεις σύμφωνα με τη σχέση:

$$[A^2] = [A_r^2] + [K^2] \cdot [\Lambda_{PPF}^2] [\bar{D}^2]$$

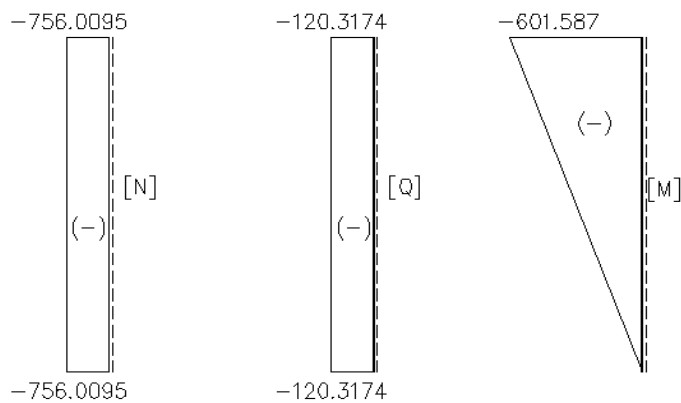
$$\begin{bmatrix} F_{12j} \\ F_{22j} \\ M_{32j} \\ F_{12k} \\ F_{22k} \\ M_{32k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ 41.667 \\ 0 \\ 50 \\ -41.667 \end{bmatrix} + EI \begin{bmatrix} 26.667 & 0 & 0 & -26.667 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.8 & 0 & -0.24 & 0.4 \\ -26.667 & 0 & 0 & 26.667 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.24 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0.4 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.0015 \\ -0.003 \\ -0.1064 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 378.0047 \\ -194.0368 \\ -769.521 \\ -378.0047 \\ 294.0368 \\ -450.663 \end{bmatrix}$$

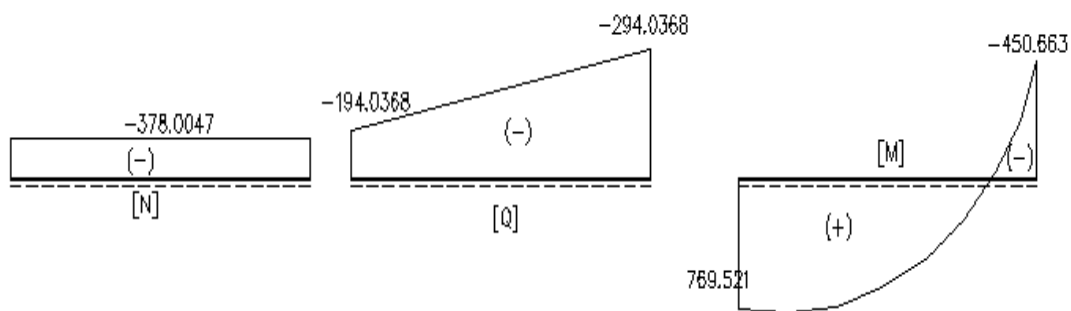
Βήμα 10^ο

Διαγράμματα εντατικών μεγεθών των μελών του φορέα:

Μέλος 1

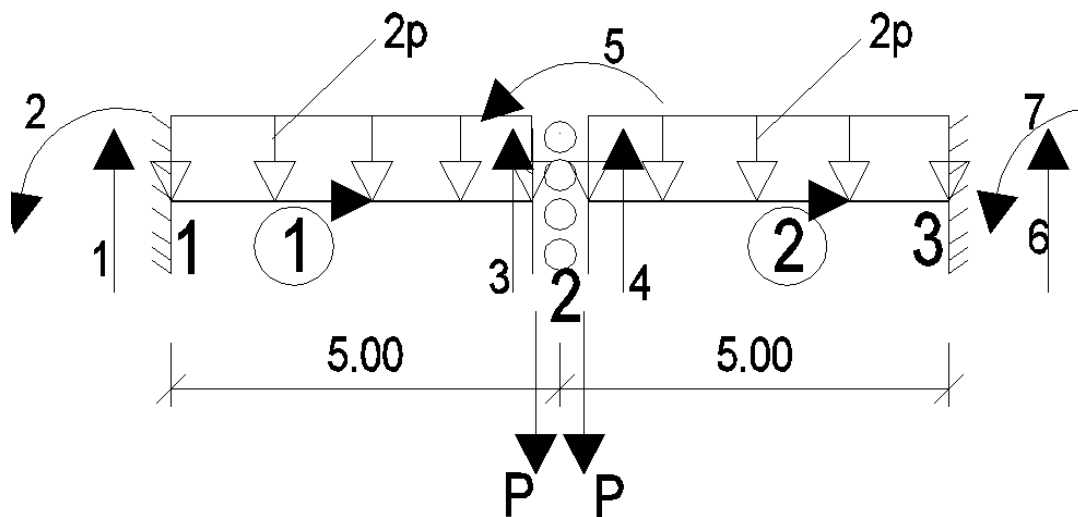


Μέλος 2



Άσκηση 4^η

Να επιλυθεί ο φορέας και να σχεδιαστούν τα τελικά διαγράμματα M, Q χρησιμοποιώντας το τροποποιημένο μητρώο ακαμψίας μόνο για το στοιχείο [1], δηλαδή απαλείφοντας τον αριστερό μεταφορικό βαθμό ελευθερίας (β.ε. 3) στον μεσαίο κόμβο 2, ο οποίος πρόκειται για ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΕΛΕΥΘΕΡΩΣΗ τύπου «κυλιόμενης πάκτωσης», δηλαδή έχει ΤΡΕΙΣ β.ε.: ένα κοινό στρωφικό (τον β.ε. 5) και δύο διαφορετικές κατακόρυφες μετακινήσεις δεξιά και αριστερά (β.ε. 3 και 4, αντίστοιχα). Για λόγους ευκολίας κι επειδή ο φορέας δεν καταπονείται αξονικά αμελούνται οι αξονικοί βαθμοί ελευθερίας. Δίνονται: $E=2,1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $A=0.60 \times 0.30 \text{ m}^2$, $p=80 \text{ kN/m}$, $P=150 \text{ kN}$



ΛΥΣΗ

Βήμα 1^ο

Αρίθμηση κόμβων, μελών και βαθμών ελευθερίας του φορέα όπως φαίνεται στο σχήμα. Αγνοούνται οι αξονικοί βαθμοί ελευθερίας.

Βήμα 2^ο

Μόρφωση τοπικών μητρώων ακαμψίας των μελών του φορέα.

Τοπικό μητρώο ακαμψίας μέλους (είναι 4×4 επειδή αμελούνται οι αξονικοί βαθμοί ελευθερίας και αφαιρούνται οι σχετικές γραμμές και στήλες από το κανονικό μητρώο):

$$[K] = \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & & & \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & & \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix}$$

Μέλος [1]: $b = 0.30\text{m}$, $h = 0.60\text{m}$, $I = 0.0054\text{m}^4$, $EI = 113400 \text{ KNm}^2$

Μέλος [2]: $b = 0.30\text{m}$, $h = 0.60\text{m}$, $I = 0.0054\text{m}^4$, $EI = 113400 \text{ KNm}^2$

$$[K^1] = [K^2] = \begin{bmatrix} 0.096 & & & \\ 0.24 & 0.8 & & \\ -0.096 & -0.24 & 0.096 & \\ 0.24 & 0.4 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix}$$

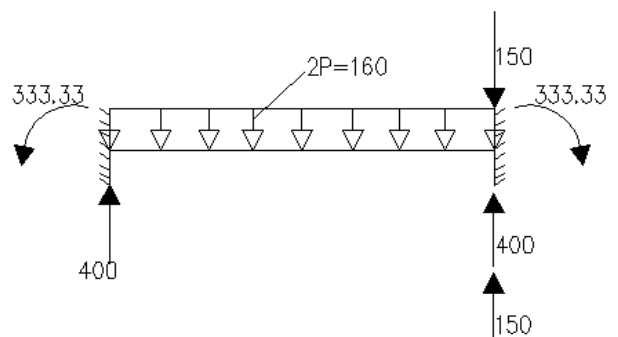
Από το σχήμα προκύπτει ότι τα τοπικά μητρώα ακαμψίας είναι και καθολικά επειδή:

$$[\Lambda_{PPF}^1] = [\Lambda_{PPF}^2] = [I]$$

Βήμα 3^ο

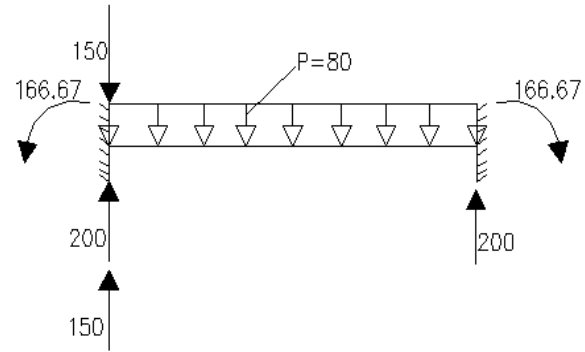
Υπολογισμός δράσεων παγιώσεων των στοιχείων. Εξετάζουμε τον παγιωμένο φορέα και τοποθετούμε τις αντιδράσεις των αμφίπακτων στοιχείων σύμφωνα με τις σχέσεις του Παραρτήματος.

$$\text{Μέλος [1]: } [\bar{A}_r^{-1}] = \begin{bmatrix} 400 & & & \\ 333.333 & & & \\ \cdots & & & \\ 550 & & & \\ -333.333 & & & \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{A}_r^{1j} \\ \bar{A}_r^{1k} \end{bmatrix}$$



Μέλος [2]:
$$\begin{bmatrix} \bar{A}_r^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 350 \\ 166.67 \\ 200 \\ -166.67 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{A}_r^{2j} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_r^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{A}_r^{2k} \end{bmatrix}$$



Θεωρώ ότι τα συγκεντρωμένα φορτία P ασκούνται στα μέλη [1] και [2] πολύ κοντά στον κόμβο 2 και τα λαμβάνω στη διαδικασία των δράσεων παγίωσης. (Εναλλακτικός τρόπος για «εκπαιδευτικούς λόγους», αλλά κυρίως –όσον αφορά το μέλος [1]– λόγω της συμπύκνωσης του β.ε. 3. Συνήθως για ευκολία τα παίρνουμε απευθείας ως επικόμβια.)

Βήμα 4^ο

Συμπύκνωση βαθμού ελευθερίας 3 του μέλους [1].

Συμπυκνωμένο μητρώο ακαμψίας μέλους [1].

$$[K_c^2] = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & -0.2 \\ 0 & -0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Συμπυκνωμένο μητρώο δράσεων παγίωσης μέλους [1]:

$$[P_c^2] = \begin{bmatrix} 950 \\ 1708.33 \\ 1041.67 \end{bmatrix}$$

Βήμα 5^ο

Μόρφωση ολικού μητρώου ακαμψίας κατασκευής.

β.ε. $\rightarrow$

$\downarrow$

$$[K] = EI \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.096 & 0.24 & -0.096 & 0.24 \\ 0 & -0.2 & 0.24 & 1.0 & -0.24 & 0.40 \\ 0 & 0 & -0.096 & -0.24 & 0.096 & -0.24 \\ 0 & 0 & 0.24 & 0.40 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Βήμα 6^ο

Αναδιάταξη μητρώου ακαμψίας κατασκευής λόγω στηρίξεως του φορέα ώστε να διαχωριστούν οι γνωστές ποσότητες (δεδομένα) από τις άγνωστες (αντιδράσεις, μετατοπίσεις).

Αναδιατεταγμένο μητρώο ακαμψίας κατασκευής:

$$[\bar{K}] = EI \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 1 & 2 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.096 & 0.24 & 0 & 0 & -0.096 & 0.24 \\ 0.24 & 1.0 & 0 & -0.2 & -0.24 & 0.40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ -0.096 & -0.24 & 0 & 0 & 0.096 & -0.24 \\ 0.24 & 0.40 & 0 & 0 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Βήμα 7^ο

Δράσεις παγιώσεως κόμβων:

$$\text{Κόμβος 1: } [\bar{S}^1] = \begin{bmatrix} 950 \\ 1708.33 \end{bmatrix}$$

$$\text{Κόμβος 2: } [\bar{S}^2] = \begin{bmatrix} 350 \\ 1041.67 + 166.67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 350 \\ 1208.34 \end{bmatrix}$$

$$\text{Κόμβος 3: } [\bar{S}^3] = \begin{bmatrix} 200 \\ -166.67 \end{bmatrix}$$

Βήμα 8^ο

Μόρφωση αναδιατεταγμένου μητρώου εξωτερικών δράσεων $[\bar{P}_m]$ και μετατοπίσεων

κόμβων $[\bar{\Delta}_m]$:

$$[\bar{P}_m] = \begin{bmatrix} -350 \\ -1208.34 \\ \hline \bar{P}_2^1 - 950 \\ \bar{M}_3^1 - 1708.33 \\ \bar{P}_2^3 - 200 \\ \bar{M}_3^3 + 166.67 \end{bmatrix}, \quad [\bar{\Delta}_m] = \begin{bmatrix} \bar{U}_2^{2\delta\epsilon\xi} \\ \bar{\theta}_3^2 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Βήμα 9^ο

Επίλυση του συστήματος των εξισώσεων:
$$\begin{bmatrix} [\bar{P}] \\ [\bar{P}_s] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{K}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\bar{\Delta}] \\ [\bar{\Delta}_s] \end{bmatrix}.$$

Υπολογισμός των άγνωστων μετατοπίσεων των κόμβων $[\bar{\Delta}]$:

$$[\bar{\Delta}] = \begin{bmatrix} \bar{U}_2^{2\delta\epsilon\xi} \\ \bar{\theta}_3^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -1562.50 \\ -833.33 \end{bmatrix}$$

Υπολογισμός των άγνωστων αντιδράσεων στις στηρίξεις $[\bar{P}_s]$:

$$[\bar{P}_s] = \begin{bmatrix} \bar{P}_2^1 \\ \bar{M}_3^1 \\ \bar{P}_2^3 \\ \bar{M}_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 950 \\ 1875 \\ 550 \\ -875 \end{bmatrix}$$

Βήμα 10^ο

Υπολογισμός των ακραίων δράσεων των μελών του φορέα.

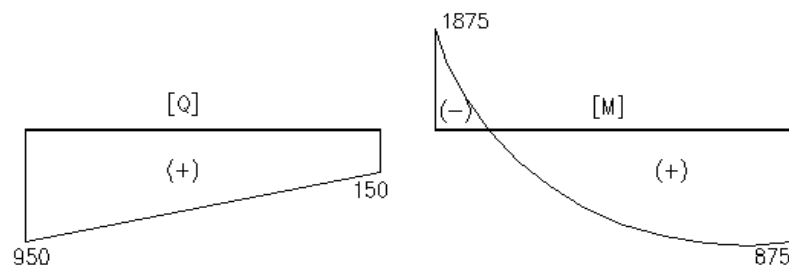
$$\text{Μέλος [1]:} \quad \begin{bmatrix} F_2^{1j} \\ M_3^{1j} \\ M_3^{1k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 950 \\ 1708.33 \\ 1041.67 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & -0.2 \\ 0 & -0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -833.33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 950 \\ 1875 \\ 875 \end{bmatrix}$$

$$\text{Μέλος [2]:} \quad \begin{bmatrix} F_{2j}^{2j} \\ M_{2j}^{2j} \\ F_{2k}^{2k} \\ M_{2k}^{2k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 350 \\ 166.67 \\ 200 \\ -166.67 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.096 & 0.24 & -0.096 & 0.24 \\ 0.24 & 0.8 & -0.24 & 0.4 \\ -0.096 & -0.24 & 0.096 & -0.24 \\ 0.24 & 0.4 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1562.5 \\ -833.33 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -875 \\ 550 \\ -875 \end{bmatrix}$$

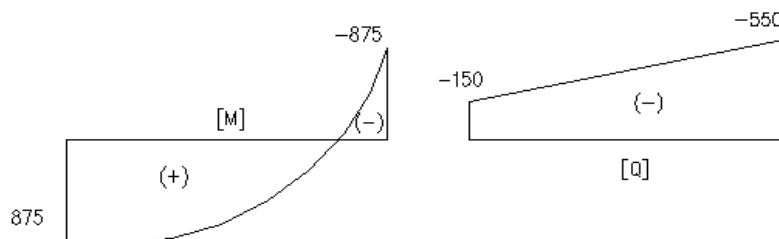
Βήμα 11^ο

Διαγράμματα [M], [Q] του φορέα.

Μέλος [1]:



Μέλος [2]:



(Όπως βλέπεται και στα σχήματα στον μεσαίο κόμβο –κυλιόμενη πάκτωση- έχουμε ίδια ροπή δεξιά και αριστερά και «άλμα» στις τέμνουσες λόγω των δύο συγκεντρωμένων δυνάμεων δεξιά και αριστερά του κόμβου.)