

**ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ  
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ**

**ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ**

**5<sup>ο</sup> ΕΞΑΜΗΝΟ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ**

**ΓΙΑΝΝΗΣ ΤΣΟΜΠΙΑΝΑΚΗΣ**

**ΧΑΝΙΑ  
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2004**

## ΛΙΣΤΑ ΣΥΜΒΟΛΩΝ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

| Σύμβολο                         | Περιγραφή                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|---------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $-, (i)$                        | Η παύλα (η οποία για λόγους απλούστευσης των σχέσεων μπορεί και να παραληφθεί) αναφέρεται σε μεγέθη στους καθολικούς άξονες $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ ολόκληρης της κατασκευής, ενώ ο δείκτης (i) αναφέρεται σε μεγέθη του στοιχείου i στους τοπικούς άξονες του $x_1^i, x_2^i, x_3^i$ . |
| $[\bar{K}]$                     | Μητρώο ακαμψίας μιας κατασκευής για όλους τους βαθμούς ελευθερίας (β.ε.) στους καθολικούς άξονες $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ .                                                                                                                                                             |
| $[\bar{P}]$                     | Διάνυσμα ακραίων (επικόμβιων) δράσεων (δυνάμεων και ροπών) μιας κατασκευής σε όλους τους β.ε. στους καθολικούς άξονες.                                                                                                                                                                           |
| $[\bar{\Delta}]$                | Διάνυσμα ακραίων (επικόμβιων) μετατοπίσεων (μετακινήσεων και στροφών) μιας κατασκευής σε όλους τους β.ε. στους καθολικούς άξονες.                                                                                                                                                                |
| $[V]$                           | Μητρώο αναδιάταξης ελεύθερων και παγιωμένων (στις στηρίξεις) β.ε. μιας κατασκευής.                                                                                                                                                                                                               |
| $[R]$                           | Μητρώο τροποποίησης για τους β.ε. στις λοξές στηρίξεις μιας κατασκευής.                                                                                                                                                                                                                          |
| $[\bar{S}]$                     | Διάνυσμα επικόμβιων δράσεων παγίωσης μιας κατασκευής.                                                                                                                                                                                                                                            |
| $[\bar{S}^{(m)}]$               | Διανύσματα επικόμβιων δράσεων παγίωσης στον κόμβο <b>m</b> μιας κατασκευής.                                                                                                                                                                                                                      |
| $[\bar{K}_{ff}]$                | Υπομητρώο του καθολικού μητρώου ακαμψίας μιας κατασκευής που αφορά τους <b>ελεύθερους</b> β.ε. στους καθολικούς άξονες $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ .                                                                                                                                       |
| $[\bar{\Delta}_f], [\bar{P}_f]$ | Διανύσματα επικόμβιων μετατοπίσεων και δράσεων αντίστοιχα μιας κατασκευής που αφορούν τους <b>ελεύθερους</b> β.ε. στους καθολικούς άξονες $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ .                                                                                                                    |
| $[\bar{K}_{ss}]$                | Υπομητρώο του καθολικού μητρώου ακαμψίας μιας κατασκευής που αφορά τους <b>παγιωμένους</b> β.ε. των στηρίξεων στους καθολικούς άξονες $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ .                                                                                                                        |
| $[\bar{\Delta}_s], [\bar{P}_s]$ | Διανύσματα επικόμβιων μετατοπίσεων και δράσεων αντίστοιχα μιας κατασκευής που αφορούν τους <b>παγιωμένους</b> β.ε. των στηρίξεων στους καθολικούς άξονες $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ .                                                                                                     |
| $[\bar{K}_{fs}]$                | Υπομητρώο του καθολικού μητρώου ακαμψίας μιας κατασκευής που αναφέρεται στην σύζευξη των <b>ελεύθερων</b> και των <b>παγιωμένων</b> β.ε.                                                                                                                                                         |

|                                      |                                                                                                                                                                                                      |
|--------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                      | στους καθολικούς άξονες $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ .                                                                                                                                          |
| $[K^i]$                              | Μητρώο ακαμψίας στοιχείου $i$ στους τοπικούς άξονες $x_1^i, x_2^i, x_3^i$ .                                                                                                                          |
| $[A^i]$                              | Διάνυσμα ακραίων (επικόμβιων) δράσεων (δυνάμεων και ροπών) ενός στοιχείου $i$ στους τοπικούς άξονες.                                                                                                 |
| $[D^i]$                              | Διάνυσμα ακραίων (επικόμβιων) μετατοπίσεων (μετακινήσεων και στροφών) ενός στοιχείου $i$ στους τοπικούς άξονες.                                                                                      |
| $[\bar{K}^i]$                        | Μητρώο ακαμψίας στοιχείου $i$ στους καθολικούς άξονες $x_1^i, x_2^i, x_3^i$ .                                                                                                                        |
| $[\bar{K}_{jj}^i], [\bar{K}_{kk}^i]$ | Υπομητρώα του μητρώου ακαμψίας του στοιχείου $i$ στους καθολικούς άξονες $x_1^i, x_2^i, x_3^i$ που αναφέρονται αντίστοιχα στους β.ε. του κόμβου της αρχής $j$ και του τέλους $k$ του στοιχείου $i$ . |
| $[\bar{A}^i]$                        | Διάνυσμα ακραίων (επικόμβιων) δράσεων (δυνάμεων και ροπών) ενός στοιχείου $i$ στους καθολικούς άξονες.                                                                                               |
| $[\bar{D}^i]$                        | Διάνυσμα ακραίων (επικόμβιων) μετατοπίσεων (μετακινήσεων και στροφών) ενός στοιχείου $i$ στους καθολικούς άξονες.                                                                                    |
| $[A^{ij}]$                           | Διάνυσμα ακραίων (επικόμβιων) δράσεων (δυνάμεων και ροπών) ενός στοιχείου $i$ για τον κόμβο αρχής $j$ του στοιχείου στους τοπικούς άξονες.                                                           |
| $[A_r^{ij}], [\bar{A}_r^{ij}]$       | Διάνυσμα ακραίων (επικόμβιων) δράσεων παγίωσης (δυνάμεων και ροπών) ενός στοιχείου $i$ για τον κόμβο αρχής του στοιχείου $j$ στους τοπικούς και στους καθολικούς άξονες, αντίστοιχα.                 |
| $[D^{ik}]$                           | Διάνυσμα ακραίων (επικόμβιων) μετατοπίσεων (μετακινήσεων και στροφών) ενός στοιχείου $i$ για τον κόμβο τέλους $k$ του στοιχείου στους τοπικούς άξονες.                                               |
| $[\Lambda_{PPT}^i]$                  | Μητρώο μετασχηματισμού για στοιχείο επίπεδου δικτυώματος (P1) $i$ από τους καθολικούς άξονες $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ στους τοπικούς άξονες $x_1^i, x_2^i, x_3^i$ .                         |
| $[\Lambda_{PPT}^i]^T$                | Ανάστροφο μητρώο μετασχηματισμού για στοιχείο επίπεδου δικτυώματος (P1) $i$ από τους τοπικούς άξονες $x_1^i, x_2^i, x_3^i$ στους καθολικούς άξονες $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ .               |
| $[\Lambda_{PPF}^i]$                  | Μητρώο μετασχηματισμού για στοιχείο επίπεδου πλαισίου (P2) $i$ από τους καθολικούς άξονες $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ στους τοπικούς άξονες $x_1^i, x_2^i, x_3^i$ .                            |
| $[\Lambda_{SSF}^i]$                  | Μητρώο μετασχηματισμού για στοιχείο χωρικού πλαισίου (S2) $i$ από τους καθολικούς άξονες $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ στους τοπικούς άξονες $x_1^i, x_2^i, x_3^i$ .                             |
| $[u_{1,2,3}^{ij}]$                   | Μετατοπίσεις στον κόμβο αρχής ενός στοιχείου $i$ ως προς τους τοπικούς άξονες $x_1^i, x_2^i, x_3^i$ αντίστοιχα.                                                                                      |

|                         |                                                                                                                                                                    |
|-------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                         | άξονες $x_1^i, x_2^i, x_3^i$ αντίστοιχα.                                                                                                                           |
| $[\theta_{1,2,3}^{ij}]$ | Στροφές στον κόμβο αρχής ενός στοιχείου $i$ ως προς τους τοπικούς άξονες $x_1^i, x_2^i, x_3^i$ αντίστοιχα.                                                         |
| $[F_{1,2,3}^{ij}]$      | Δυνάμεις στον κόμβο αρχής ενός στοιχείου $i$ ως προς τους τοπικούς άξονες $x_1^i, x_2^i, x_3^i$ αντίστοιχα.                                                        |
| $[M_{1,2,3}^{ij}]$      | Ροπές στον κόμβο αρχής ενός στοιχείου $i$ ως προς τους τοπικούς άξονες $x_1^i, x_2^i, x_3^i$ αντίστοιχα.                                                           |
| $T_0$                   | Αρχική θερμοκρασία παραγωγής του υλικού των μελών μιας κατασκευής.                                                                                                 |
| $T^{(-)}$               | Θερμοκρασία εξωτερικού χώρου μιας κατασκευής.                                                                                                                      |
| $T^{(+)}$               | Θερμοκρασία εσωτερικού χώρου μιας κατασκευής.                                                                                                                      |
| $\alpha$                | Σταθερά γραμμικής διαστολής του υλικού ενός στοιχείου $i$ .                                                                                                        |
| $E$                     | Μέτρο ελαστικότητας του υλικού ενός στοιχείου $i$ .                                                                                                                |
| $G$                     | Μέτρο διατμήσεως του υλικού ενός στοιχείου $i$ .                                                                                                                   |
| $A^i$                   | Εμβαδόν διατομής ενός στοιχείου $i$ .                                                                                                                              |
| $L^i$                   | Μήκος ενός στοιχείου $i$ .                                                                                                                                         |
| $[I_{2,3}^i]$           | Ροπή αδράνειας της διατομής ενός στοιχείου $i$ ως προς τους τοπικούς κεντροβαρικούς άξονες $x_2^i, x_3^i$ αντίστοιχα. (Αφορούν τις καμπτικές ροπές του στοιχείου). |
| $J^i$                   | Στρεπτική ροπή αδράνειας ενός στοιχείου $i$ . (Αναφέρεται στην στρεπτική ροπή του στοιχείου).                                                                      |
| $h^i$                   | Ύψος διατομής ενός στοιχείου $i$ . (Αναφέρεται στην καμπτική ροπή του στοιχείου).                                                                                  |
| $q^i$                   | Κατανεμημένο γραμμικό φορτίο κατά μήκος ενός στοιχείου $i$ .                                                                                                       |
|                         |                                                                                                                                                                    |
|                         |                                                                                                                                                                    |
|                         |                                                                                                                                                                    |

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η στατική ή/και δυναμική ανάλυση μιας κατασκευής αποσκοπεί στον προσδιορισμό των μεγεθών παραμόρφωσης και έντασης που αναπτύσσονται στον φορέα λόγω των εξωτερικών δυνάμεων και των συνθηκών έδρασης του. Ενώ σε μικρές και απλές κατασκευές είναι δυνατή η χρήση αναλυτικών μεθόδων σε πιο σύνθετα ή/και μεγάλου μεγέθους προβλήματα είναι αναγκαία η χρησιμοποίηση (με τη βοήθεια κατάλληλων προγραμμάτων Η/Υ) μιας γενικευμένης υπολογιστικής μεθόδου. Για τον λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι Μητρωϊκής Ανάλυσης Κατασκευών (οι οποίες βασίζονται στην άλγεβρα μητρώων). Οι πιο διαδεδομένες αριθμητικές μέθοδοι είναι η Μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών-ΜΠΔ (Finite Difference Method) και η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων-ΜΠΣ (Finite Element Method-FEM), οι οποίες εφαρμόζονται συνήθως σε προβλήματα που περιγράφονται με διαφορικές εξισώσεις. Επίσης υπάρχει μια άλλη αριθμητική μέθοδος που πλεονεκτεί σε περιπτώσεις προβλημάτων που ανάγονται σε ολοκληρωτικές εξισώσεις είναι η Μέθοδος των Συνοριακών Στοιχείων-ΜΣΣ (Boundary Element Method-BEM).

Από τις παραπάνω μεθόδους η σημαντικότερη και πιο διαδεδομένη είναι η ΜΠΣ, η οποία έχει μεγάλο εύρος εφαρμογών σε πολλά επιστημονικά πεδία και ιδιαίτερα στην ανάλυση κατασκευών. Πρόκειται για μία προσεγγιστική μέθοδο υπολογισμού. Που βασίζεται στις κλασικές μεθόδους ανάλυσης και η ραγδαία ανάπτυξη της οφείλεται στην αντίστοιχη εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Το όνομά της το πήρε η από τον τρόπο θεώρησης και προσομοίωσης (μοντελοποίησης) των προς επίλυση προβλημάτων, επειδή το πρώτο βήμα της μεθόδου συνίσταται στην διακριτοποίηση του αρχικού φορέα σε ένα πλήθος στοιχείων πεπερασμένων διαστάσεων. Κάθε πεπερασμένο στοιχείο αναλύεται ξεχωριστά και αφού υπολογισθούν τα τοπικά μητρώα κάθε στοιχείου γίνεται σύνθεση των καθολικών μητρώων του φορέα αθροίζοντας τις συνεισφορές των επιμέρους στοιχείων του. Στη συνέχεια επιλύεται το ολικό σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας, υπολογίζονται οι άγνωστες κομβικές μετακινήσεις και οι αντιδράσεις των στηρίξεων. Στην τελική φάση υπολογίζονται οι τοπικές τάσεις και παραμορφώσεις κάθε στοιχείου. Συνοπτικά λοιπόν, ο υπολογισμός του αρχικού φορέα γίνεται επομένως σε τέσσερα στάδια: Διακριτοποίηση - Θεώρηση των επί μέρους στοιχείων - Σύνθεση - Επίλυση.

Η ΜΠΣ είναι προσεγγιστικής μεθόδου γιατί για να μπορέσει να επιλύσει κάποιο πρόβλημα μετατρέπει τον αρχικό συνεχή φορέα σε ένα πλεγμα διακριτών πεπερασμένων στοιχείων. Συνήθως, όσο περισσότερα πεπερασμένα στοιχεία χρησιμοποιούνται για την κατασκευή του ασυνεχούς μοντέλου υπολογισμού του αρχικού φορέα, τόσο ακριβέστερα είναι τα αποτελέσματα (εφόσον βέβαια και η μηχανική συμπεριφορά των χρησιμοποιούμενων στοιχείων περιγράφει ικανοποιητικά το προς επίλυση πρόβλημα). Το ευριστικό αυτό σκεπτικό αντιστοιχεί απόλυτα στο ακόλουθο μαθηματικό σκεπτικό: ο βασικός στόχος μιας αριθμητικής μεθόδου είναι να αντικαταστήσει τις διαφορικές ή ολοκληρωτικές εξισώσεις που περιγράφουν το εκάστοτε πρόβλημα με ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων. Προφανώς, όσο πιο πολλές αλγεβρικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται για να αντικαταστήσουν τις διαφορικές, τόσο περισσότερο θα πλησιάζει η προσεγγιστική την αναλυτική λύση του προβλήματος. Επομένως, το πλήθος των πεπερασμένων στοιχείων και ιδιαίτερα των κόμβων που συνθέτουν το δίκτυο έχει άμεση σχέση με το πλήθος των προς επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων.

Οι κύριοι λόγοι για τη ραγδαία ανάπτυξη και τη μεγάλη διάδοση της ΜΠΣ είναι: α) η μεγάλη της προσαρμοστικότητα σε κάθε είδος προβλημάτων και β) ο ενιαίος τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίζει και τα πλέον σύνθετα προβλήματα, γεγονός που δημιουργεί απεριόριστο σχεδόν πεδίο εφαρμογών. Ειδικά για τις εφαρμογές που ενδιαφέρουν τον πολιτικό μηχανικό η ΜΠΣ πλεονεκτεί έναντι άλλων

μεθόδων λόγω του ενιαίου και απλού τρόπου ανάλυσης των κατασκευών, ανεξάρτητα από ιδιαιτερότητες στη γεωμετρία του φορέα, περίπλοκες συννοριακές συνθήκες, διαφοροποιήσεις στις ιδιότητες υλικών, ειδικές φορτίσεις κτλ. Υπερτερεί επίσης και λόγω της σχετικά εύκολης φυσικής ερμηνείας (καλύτερη εποπτεία) των διαφόρων μεγεθών που υπεισέρχονται στους υπολογισμούς και των αποτελεσμάτων που προκύπτουν. Η διαδικασία ανάλυσης γραμμικών, επιφανειακών και τριδιάστατων φορέων είναι ουσιαστικά η ίδια, έτσι ώστε ο υπολογισμός φορέων που αποτελούνται από διαφορετικά δομικά στοιχεία (π.χ. κτίριο αποτελούμενο από υποστυλώματα, επίπεδα τοιχώματα-δίσκους, δοκούς, πλάκες και ενδεχομενώς και κελύφη) να μπορεί να γίνει μέσα στο πλαίσιο μιας κοινής μεθόδου.

Ενώ όμως, όπως προαναφέρθηκε, η ΜΠΣ αποτελεί στη γενική περίπτωση μια προσεγγιστική αριθμητική μέθοδο, στην περίπτωση των γραμμικών φορέων με φυσική τοπολογία κόμβων (δηλαδή φορέων που κατά τη διακριτοποίησή του μηχανικού τους προσομοιώματος δεν γίνονται περαιτέρω εξιδανικεύσεις) και για ακριβή μητρώα δυσκαμψίας των πεπερασμένων στοιχείων (δηλαδή μητρώα που περιγράφουν τη μηχανική συμπεριφορά των επί μέρους στοιχείων με βάση την ακριβή αναλυτική λύση της εκάστοτε διαφορικής εξίσωσης) μπορεί να θεωρηθεί ότι δίνει 'ακριβείς' λύσεις των προβλημάτων αυτής της κατηγορίας. Στην ειδική αυτή περίπτωση, που περιλαμβάνει ολόκληρη σχεδόν την κλασική στατική ελαστικών γραμμικών φορέων, θα μπορούσε κανείς να χαρακτηρίσει το σύνολο των μητρωικών διαδικασιών επίλυσης απλά ως 'Μητρωϊκή Ανάλυση Κατασκευών' αποφεύγοντας την έννοια του πεπερασμένου στοιχείου και τη γενικευμένη ανάπτυξη της μεθόδου. Όμως υπάρχουν και περιπτώσεις ελαστικών γραμμικών φορέων όπου απαιτούνται τόσο εξιδανικεύσεις στη γεωμετρία (π.χ. αντικατάσταση καμπύλων δοκών με συνεχείς τεθλασμένες δοκούς), όσο και χρησιμοποίηση προσεγγιστικών μητρώων δυσκαμψίας για επί μέρους στοιχεία (π.χ. ελαστικώς εδραζόμενες θεμελιοδοκοί με γραμμικώς μεταβαλλόμενο μέτρο ελαστικότητας εδάφους). Οπότε, για λόγους ενιαίας αντιμετώπισης γραμμικών, επιφανειακών και τριδιάστατων φορέων, ενδείκνυται η ένταξη της κλασικής μητρωϊκής ανάλυσης γραμμικών φορέων στο πλαίσιο της ΜΠΣ και η ανάπτυξή της σύμφωνα με το γενικότερο σκεπτικό της.

Το βασικό σκεπτικό της ΜΠΣ μπορεί να υλοποιηθεί με διαφορετικούς τρόπους, καθένας από τους οποίους οδηγεί σε μία διαφορετική υλοποίηση της. Γενικά, έχουν αναπτυχθεί τρεις διαφορετικές παραλλαγές της μεθόδου:

#### α) Μέθοδος 'ευκαμψίας' (flexibility method)

Η οποία βασίζεται πάνω στη θεώρηση της κλασικής μεθόδου υπεραρίθμων δυνάμεων (principle of virtual forces) ή γενικότερα της αρχής των δυνατών έργων (principle of complementary virtual work). Στην περίπτωση ελαστικών συντηρητικών συστημάτων η παραπάνω αρχή συμπίπτει με την αρχή της ελαχίστης τιμής του συμπληρωματικού ελαστικού δυναμικού (principle of minimum complementary potential energy). Ως γνωστόν το μητρώο του προς επίλυση συστήματος εξισώσεων της μεθόδου των δυνάμεων είναι το μητρώο ευκαμψίας του φορέα, γι' αυτό και ονομάζεται 'μέθοδος ευκαμψίας'.

#### β) Μέθοδος 'δυσκαμψίας' (stiffness method)

Σε αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιείται η κλασική μέθοδος υπεραρίθμων μετακινήσεων ή αρχή των δυνατών μετακινήσεων (principle of virtual displacements) και γενικότερα της αρχής των δυνατών έργων (principle of virtual work). Στην περίπτωση ελαστικών συντηρητικών συστημάτων η παραπάνω θεώρηση συμπίπτει με την αρχή της ελαχίστης τιμής του ελαστικού δυναμικού (principle of minimum potential energy). Επειδή το μητρώο του προς επίλυση συστήματος εξισώσεων της μεθόδου μετακινήσεων είναι το μητρώο δυσκαμψίας του φορέα, γι' αυτό και ονομάζεται 'μέθοδος δυσκαμψίας'.

### γ) Γενικευμένες μέθοδοι πεπερασμένων στοιχείων

Με βάση κάποιο τροποποιημένο (μικτό, υβριδικό) συναρτησιακό (functional) και χρησιμοποιώντας τη θεωρία στασιμοποίησης συναρτησιακών με βάση τον λογισμό των παραλλαγών (variational methods) μπορούν να προκύψουν διαφορετικές προσεγγίσεις του αρχικού προβλήματος. Οι διαδικασίες αυτές εφαρμόζονται κυρίως σε επιφανειακούς και ολόσωμους φορείς. Ως ανάλογη διαδικασία από τη στατική των γραμμικών φορέων μπορεί να αναφερθεί η συνδυασμένη ταυτόχρονη εφαρμογή των κλασικών μεθόδων δυνάμεων και μετακινήσεων.

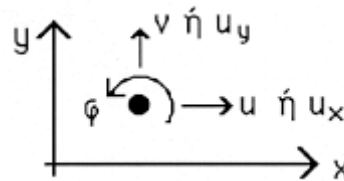
Από τις παραπάνω παραλλαγές της ΜΠΣ η πλέον διαδεδομένη για γραμμικούς φορείς είναι η μέθοδος δυσκαμψίας επειδή υπερτερεί της μεθόδου ευκαμψίας ως προς την ευκολία στην προγραμματιστική της εφαρμογή σε ηλεκτρονικούς υπολογιστές (βασική δυσκολία της μεθόδου ευκαμψίας αποτελεί ο αυτοματοποιημένος καθορισμός του στατικού κυρίου συστήματος) και το μικρότερο υπολογιστικό κόστος. Από την άλλη πλευρά, η εφαρμογή της μεθόδου δυσκαμψίας σε γραμμικούς φορείς δεν παρουσιάζει τις δυσκολίες οι οποίες παρουσιάζονται όταν χρησιμοποιείται κάποιο γενικευμένο συναρτησιακό, όπως συμβαίνει π.χ. σε προβλήματα επιφανειακών φορέων. Οπότε, όταν πρόκειται για συνήθεις γραμμικούς φορείς με φυσική τοπολογία κόμβων η χρήση κάποιας γενικευμένης μορφής της ΜΠΣ καθίσταται πολύ πιο πολύπλοκη, πιο χρονοβόρα και είναι πιο δύσκολη η εποπτική κατανόηση της φυσικής σημασίας των αποτελεσμάτων.

# ΜΗΤΡΩΪΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

## (MATRIX STRUCTURAL ANALYSIS)

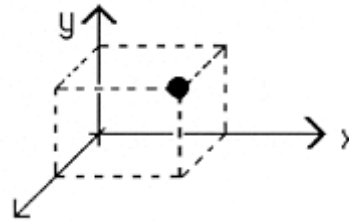
- μεθοδος αμεσης δυσκαμψιας ή «στιβαροτητας» (direct stiffness method):  $K \cdot \Delta = P$  ή μεθοδος ευκαμψιας (flexibility method)  $F \cdot P = \Delta$ , οπου  $F = K^{-1}$ . (σε προγραμματα η/υ καλυτερη η μεθοδος δυσκαμψιας...)
- εφαρμογη σε γραμμικους-ραβδωτους φορεις: 2-d (plane) & 3-d (space) δικτυωματα (trusses), πλαισια (frames), εσχαρες (grids).
- η γενικευση της μεθοδου για καθε ειδους ραβδωτους ή/και συνεχεις φορεις ειναι η μεθοδος των **πεπερασμενων στοιχειων** (finite element method).
- τα βασικα πλεονεκτηματα της μεθοδου των πεπερασμενων στοιχειων: ευκολια, ακριβεια αποτελεσματος (προκειται για προσεγγιστικη μεθοδο!), γενικοτητα εφαρμογης της μεθοδου για καθε τυπο προβληματος (οσον αφορα ειδος στοιχειων, φορτια, υλικα, κλπ).
- πραγματικο μοντελο: φυσικη κατασταση κατασκευης (γεωμετρια, υλικα, φορτια, συνθηκες στηριξης,...)  $\Rightarrow$  υπολογιστικο μοντελο: διακριτοποιηση, επιλυση  $K \cdot \Delta = P$ , ευρεση επικομβιων μετατοπισεων & εσωτερικων εντατικων μεγεθων στοιχειων.
- το υπολογιστικο μοντελο βασιζεται σε μεταφορα δεδομενων απο και προς το τοπικο συστημα καθε στοιχειου στο καθολικο συστημα ολοκληρης της κατασκευης:
  - ευρεση συνεισφορων μελων απο το τοπικο στο καθολικο συστημα
  - αθροισμα τους και επιλυση του συστηματος  $K \cdot \Delta = P$  στο καθολικο συστημα  $\Rightarrow$  ευρεση αγνωστων μετατοπισεων  $\delta$  “ελευθερων” b.e. (free) και αντιδρασεων στηριξεων στους “δεσμευμενους” β.β. (supported)
  - μεταφορα των καθολικων  $\delta$  στο τοπικο συστημα και ευρεση δρασεων (δυναμεων-ροπων) & τασεων/παραμορφωσεων καθε μελους
- η μεθοδος βασιζεται στην κατατμηση της κατασκευης σε πολλα μελη πεπερασμενων διαστασεων (finite elements) που συνδεονται μεταξυ τους στους κομβους (nodes), οπου υπαρχει ή οχι η δυνατοτητα κινησης (μετατοπισης ή στροφης): κομβικοι βαθμοι ελευθεριας - β.ε. (nodal degrees of freedom - d.o.f.)
- **ΒΑΘΜΟΣ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ=ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ/ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΑ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΗΣ (ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ Η ΣΤΡΟΦΗΣ)** Με τον όρο ελευθερίες κινήσεως εννοούνται οι ανεξάρτητες γεωμετρικές παράμετροι οι οποίες απαιτούνται για τον πλήρη καθορισμό της παραμόρφωσης ενός συστήματος στο χώρο. Στην γενική περίπτωση ο στερεός κόμβος ενός χωρικού πλαισίου έχει 6 βαθμούς ελευθερίας ως προς ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων (x,y,z): 3 μεταθέσεις κατά τους άξονες x,y,z και 3 στροφές περί τους άξονες x,y,z αντιστοίχως.

Μετακινήσεις ενός υλικού σημείου στο επίπεδο x-y:



3 B. E.

Μετακινήσεις ενός υλικού σημείου στο χώρο:



6 B. E.

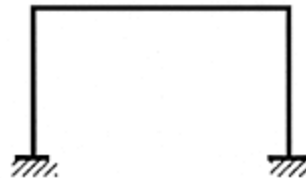
$u_x, u_y, u_z$   
 $\theta_x, \theta_y, \theta_z$

Πόσους B.E. έχει η δοκός;



Άπειρους !!!

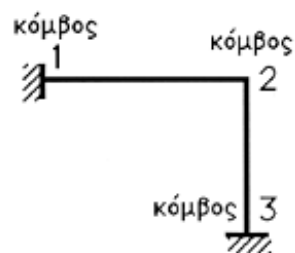
Πόσους B.E. έχει το πλαίσιο;



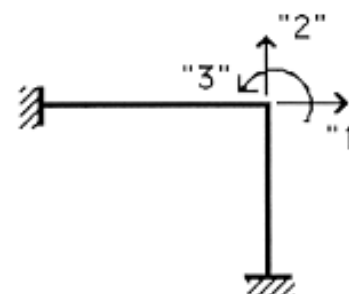
Άπειρους !!!

Η **αναγωγή** απειροβαθμιων (συνεχων) φορεων που περιγραφονται απο διαφορικες εξισωσεις σε διακριτοποιημενους φορεις με πεπερασμενο πληθος b.e. στους κομβους τους  $\Rightarrow$  **αναγωγή** του προβληματος επιλυσης διαφορικων εξισωσεων σε ενα προβλημα επιλυσης αλγεβρικων εξισωσεων με χρηση h/y.

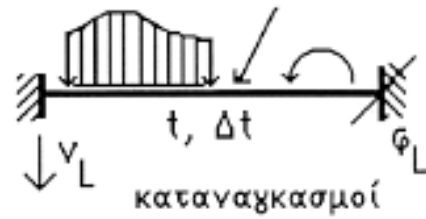
Η έννοια του κόμβου: "Κόμβος" = υλικό σημείο γεωμετρικής, ελαστικής, αδρανειακής, φορτιστικής ασυνέχειας.



Γιατί θεωρούμε ότι το παραπλεύρως πλαίσιο έχει μόνο 3 'ενεργους' β.ε.; Οι άλλοι κομβικοί β.ε. είναι δεσμευμένοι!



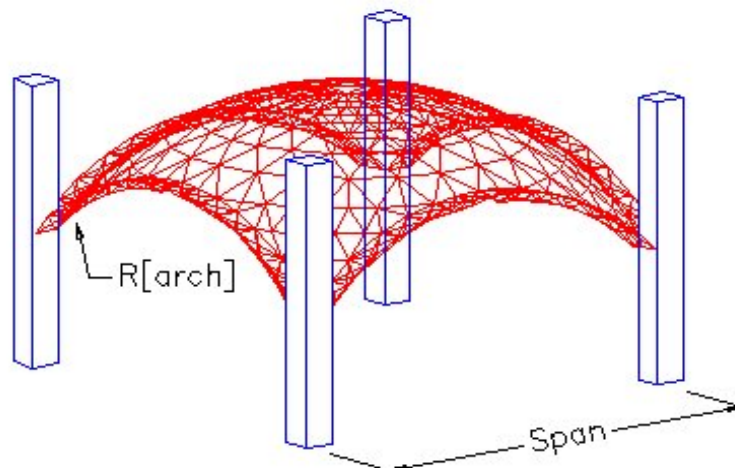
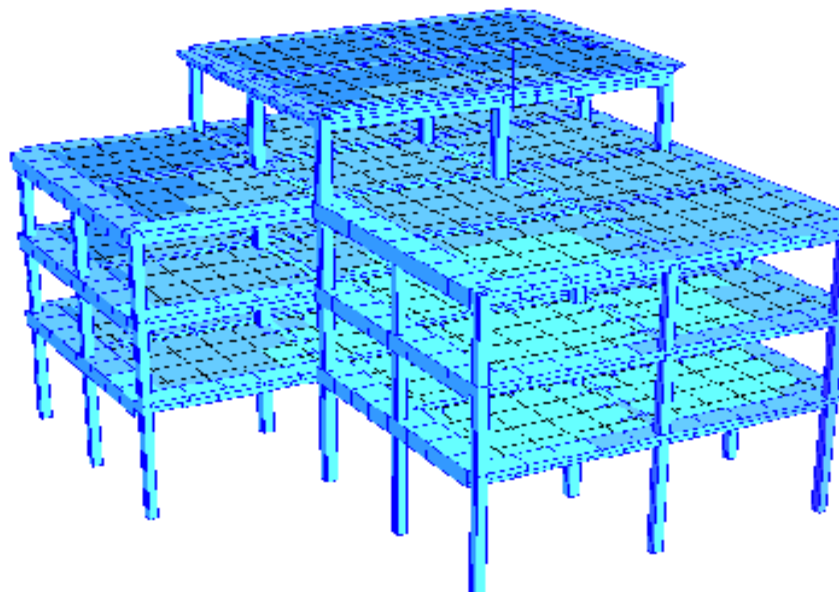
Για κάθε μέλος με μη επικόμβια φορτία μπορούν να υπολογισθούν π.χ. με τη μέθοδο δυνάμεων, τα μεγέθη έντασης και παραμόρφωσης σε κάθε σημείο  $x$ , και φυσικά στα δύο άκρα (=κόμβους) της.



**Επομένως:** Αν είναι γνωστές (από την επίλυση της εξίσωσης  $K \cdot \Delta = P$ ) οι 3 μετακινήσεις (=B.E.) του κόμβου 2 του παραπάνω πλαισίου, μπορεί να υπολογισθεί η πλήρης εντατική και παραμορφωσιακή του κατάσταση σε οποιοδήποτε σημείο του.

### ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΤΙΡΙΑΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

- δοκοί & υποστυλώματα ως γραμμικά ραβδωτά πεπερασμένα στοιχεία
- πλακες ή κελυφη ως συνεχή πεπερασμένα στοιχεία



## ΕΙΔΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΡΑΒΔΩΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

- **επιπεδα δικτυωματα** (2-d ή plane trusses): 2 β.ε./κομβο = οι μετατοπίσεις του κομβου κατα  $x$  &  $y$ .
- **χωρικά δικτυωματα** (3-d ή space trusses): 3 β.ε./κομβο = οι μετατοπίσεις του κομβου κατα  $x$  &  $y$  &  $z$ .
- **επιπεδα πλαισια** (2-d ή plane frames): 3 β.ε./κομβο = οι μετατοπίσεις του κομβου κατα  $x$  &  $y$  και η στροφη του ως προς  $z$ .
- **χωρικά πλαισια** (3-d ή space frames): 6 β.ε./κομβο = οι μετατοπίσεις του κομβου κατα  $x$  &  $y$  &  $z$  και οι στροφες του ως προς  $x$  &  $y$  &  $z$ .
- **εσχαρες** (grids): 3 β.ε./κομβο = η μετατοπιση του κομβου κατα  $z$  και οι στροφες του ως προς  $x$  &  $y$ .

***Προσοχη ολες οι μετακινήσεις & στρόφες αναφέρονται στους καθολικούς αξόνες της κατασκευής!!!***

***Οι κομβικοί β.ε. ουσιαστικά αντιστοιχούν στις δυνατές μετακινήσεις στερεού σώματος κάθε δομικού μελους, π.χ. ένα 'αδεσμευτο' μελος χωρικού πλαισιου εχει εξι (3+3) δυνατοτητες κινήσης στο χωρο = (3) μεταφορικές + (3) στροφικές***

## ΒΑΣΙΚΑ ΒΗΜΑΤΑ ΜΗΤΡΩΪΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

- ΕΠΙΛΟΓΗ ΚΑΘΟΛΙΚΩΝ ΑΞΟΝΩΝ  $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ , ΑΡΙΘΜΗΣΗ ΚΟΜΒΩΝ, Β.Ε., ΜΕΛΩΝ, ΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΠΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΑΞΟΝΩΝ ΚΑΘΕ ΜΕΛΟΥΣ  $\{x_1^i, x_2^i, x_3^i\} \Rightarrow$  ΑΠΟ ΓΩΝΙΑ  $\{\phi_i\}$  ΜΕΤΑΞΥ ΑΞΟΝΩΝ  $\{\bar{x}_1\}$  ΚΑΙ  $\{x_1^i\} \Rightarrow$  ΜΗΤΡΩΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ  $\{\Lambda_i\}$  ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΤΟΠΙΚΟΥΣ ΣΤΟΥΣ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥΣ ΑΞΟΝΕΣ (ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΓΙΝΕΤΑΙ ΜΕ ΤΟ ΑΝΑΣΤΡΟΦΟ  $\{\Lambda_i^T\}$ ) **ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ** ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ  $\{D_i\}$  ΚΑΙ ΔΡΑΣΕΩΝ  $\{A_i\}$
- ΜΟΡΦΩΣΗ ΜΗΤΡΩΩΝ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΤΟ ΤΟΠΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ  $\{K_i\}$
- ΑΠΟ ΤΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ:  $\{A_i = K_i \cdot D_i\}$ ,  $\{A_i = \Lambda_i \cdot \bar{A}_i\}$  (ΕΝΩ  $\{\bar{A}_i = \Lambda_i^T \cdot A_i\}$ ),  $\{D_i = \Lambda_i \cdot \bar{D}_i\}$  (ΕΝΩ  $\{\bar{D}_i = \Lambda_i^T \cdot D_i\}$ ) ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΟΤΙ  $\{\bar{A}_i = \bar{K}_i \cdot \bar{D}_i\}$  ΟΠΟΥ  $\{\bar{K}_i = \Lambda_i^T \cdot K_i \cdot \Lambda_i\}$  ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΜΗΤΡΩΟ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ ΤΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΣΤΟΥΣ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥΣ ΑΞΟΝΕΣ
- ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΣΥΝΕΙΣΦΟΡΩΝ ΜΕΛΩΝ & ΜΟΡΦΩΣΗ ΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ **ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ** ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ ΚΑΙ ΦΟΡΤΙΩΝ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ:  $\{\bar{K} \cdot \bar{\Delta} = \bar{P}\}$  (ΟΠΟΥ ΣΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ  $\{\bar{P}\}$  ΕΧΟΥΝ ΣΥΜΠΕΡΙΛΗΦΘΕΙ ΤΑ ΕΠΙΚΟΜΒΙΑ ΚΑΙ ΤΑ ΜΗ ΕΠΙΚΟΜΒΙΑ ΦΟΡΤΙΑ ΜΕΣΩ ΤΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΠΑΓΙΩΣΕΩΣ  $\{\bar{S}\}$ ....)
- ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΑΝΩΤΕΡΩ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΕΑΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΛΟΞΕΣ Ή ‘ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ’ ΣΤΗΡΙΞΕΙΣ ...
- ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΝΑ ΞΕΧΩΡΙΣΟΥΜΕ ΤΟΥΣ ‘ΕΛΕΥΘΕΡΟΥΣ’ Β.Ε. (FREE) ΑΠΟ ΤΟΥΣ ‘ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΟΥΣ’ Β.Ε. (SUPPORTED).
- ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ:  $\bar{K} \cdot \bar{\Delta} = \bar{P} \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{K}_{ff} & \bar{K}_{fs} \\ \bar{K}_{sf} & \bar{K}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_f \\ \bar{\Delta}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_f \\ \bar{P}_s \end{bmatrix} \Rightarrow$   

ΕΠΕΙΔΗ ΣΥΝΗΘΩΣ  $\{\bar{\Delta}_s = 0\} \Rightarrow$

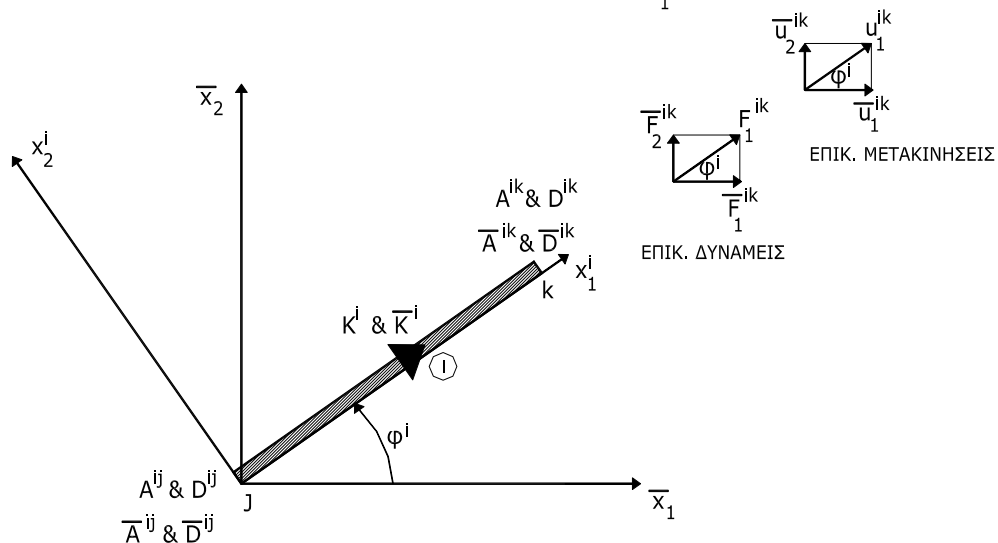
$\begin{bmatrix} \bar{K}_{ff} \cdot \bar{\Delta}_f = \bar{P}_f \\ \bar{K}_{sf} \cdot \bar{\Delta}_f = \bar{P}_s \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\begin{bmatrix} \bar{\Delta}_f = (\bar{K}_{ff})^{-1} \cdot \bar{P}_f \\ \bar{P}_s = \bar{K}_{sf} \cdot \bar{\Delta}_f \end{bmatrix}$

(ΕΥΡΕΣΗ ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ & ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΩΝ ΣΤΗΡΙΞΕΩΝ)
- ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΤΩΝ ΚΑΘΟΛΙΚΩΝ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ  $\{\bar{\Delta}\}$  ΣΤΟ ΤΟΠΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΚΑΙ ΕΥΡΕΣΗ ΔΡΑΣΕΩΝ ΣΤΟ ΤΟΠΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΚΑΘΕ ΜΕΛΟΥΣ:  $\{A_i = K_i \cdot D_i\}$  &  $\{D_i = \Lambda_i \cdot \bar{D}_i\} \Rightarrow \{A_i = K_i \cdot \Lambda_i \cdot \bar{D}_i\} \Rightarrow$  ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ-ΡΟΠΩΝ ΕΥΡΕΣΗ ΤΑΣΕΩΝ-ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ ΚΑΘΕ ΜΕΛΟΥΣ.

## ΕΠΙΠΕΔΑ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΑ

ΕΠΙΠΕΔΟ ΡΑΒΔΩΤΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ (PT) Ή (P<sub>1</sub>)



- ΣΤΟ ΤΟΠΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΧΟΥΝ ΜΟΝΟ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΑΞΟΝΑ  $x_1^i$  ΔΥΝΑΜΗ & ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΗ ( $F_1$  &  $u_1$ ) ΕΝΩ ΣΤΟ ΚΑΘΟΛΙΚΟ, ΕΧΟΥΝ ΚΑΤΑ ΤΟΥΣ  $\bar{x}_1$  &  $\bar{x}_2$ :

- ΔΡΑΣΕΙΣ ΣΤΟ ΤΟΠΙΚΟ: 
$$[A^{ij}] = [F_1^{ij}] \text{ \& } [A^{ik}] = [F_1^{ik}] \Rightarrow [A^i] = \begin{bmatrix} A^{ij} \\ A^{ik} \end{bmatrix}$$

- ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΤΟΠΙΚΟ: 
$$[D^{ij}] = [u_1^{ij}] \text{ \& } [D^{ik}] = [u_1^{ik}] \Rightarrow [D^i] = \begin{bmatrix} D^{ij} \\ D^{ik} \end{bmatrix}$$

- ΔΡΑΣΕΙΣ ΣΤΟ ΚΑΘΟΛΙΚΟ: 
$$[\bar{A}^{ij}] = \begin{bmatrix} \bar{F}_1^{ij} \\ \bar{F}_2^{ij} \end{bmatrix} \text{ \& } [\bar{A}^{ik}] = \begin{bmatrix} \bar{F}_1^{ik} \\ \bar{F}_2^{ik} \end{bmatrix} \Rightarrow [\bar{A}^i] = \begin{bmatrix} \bar{A}^{ij} \\ \bar{A}^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1^{ij} \\ \bar{F}_2^{ij} \\ \bar{F}_1^{ik} \\ \bar{F}_2^{ik} \end{bmatrix}$$

- ΜΕΤΑΚ. ΣΤΟ ΚΑΘΟΛΙΚΟ: 
$$[\bar{D}^{ij}] = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{ij} \\ \bar{u}_2^{ij} \end{bmatrix} \text{ \& } [\bar{D}^{ik}] = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{ik} \\ \bar{u}_2^{ik} \end{bmatrix} \Rightarrow [\bar{D}^i] = \begin{bmatrix} \bar{D}^{ij} \\ \bar{D}^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{ij} \\ \bar{u}_2^{ij} \\ \bar{u}_1^{ik} \\ \bar{u}_2^{ik} \end{bmatrix}$$

- ‘ΜΕΤΑΦΟΡΑ’ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΣΤΟΝ ΚΟΜΒΟ ΤΕΛΟΥΣ  $k$  ΑΠΟ ΤΟ ΤΟΠΙΚΟ ΣΤΟ ΚΑΘΟΛΙΚΟ  $\bar{F}_1^{ik} = F_1^{ik} \cdot \cos \phi_i$  &  $\bar{F}_2^{ik} = F_1^{ik} \cdot \sin \phi_i$  ΕΝΩ ΓΙΑ ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ  $F_1^{ik} = \bar{F}_1^{ik} \cdot \cos \phi_i + \bar{F}_2^{ik} \cdot \sin \phi_i$ , ΑΥΤΟ ΣΕ ΜΗΤΡΩΪΚΗ ΜΟΡΦΗ ΓΡΑΦΕΤΑΙ ΩΣ ΕΞΗΣ:

$$[A^{ik}] = [\Lambda^i] \cdot [\bar{A}^{ik}] \text{ \& } [\bar{A}^{ik}] = [\Lambda^i]^T \cdot [A^{ik}] \text{ ΜΕ } [\Lambda^i] = [\cos \phi_i \quad \sin \phi_i] \text{ \& } [\Lambda^i]^T = \begin{bmatrix} \cos \phi_i \\ \sin \phi_i \end{bmatrix}$$

- ΚΑΙ ΓΙΑ ΤΑ ΔΥΟ ΑΚΡΑ:  $\begin{bmatrix} A^{ij} \\ A^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{PT}^i & 0 \\ 0 & \Lambda_{PT}^i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{A}^{ij} \\ \bar{A}^{ik} \end{bmatrix} \Rightarrow [A^i] = [\Lambda_{PPT}^i] \cdot [\bar{A}^i]$  ΕΝΩ

$$[\bar{A}^i] = [\Lambda_{PPT}^i]^T \cdot [A^i], \text{ ΟΠΟΥ } [\Lambda_{PPT}^i] = \begin{bmatrix} \cos \phi_i & \sin \phi_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi_i & \sin \phi_i \end{bmatrix}$$

ΚΑΙ  $[\Lambda_{PPT}^i]^T = \begin{bmatrix} \cos \phi_i & 0 \\ \sin \phi_i & 0 \\ 0 & \cos \phi_i \\ 0 & \sin \phi_i \end{bmatrix}$ , ΟΜΟΙΩΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΙΣ

$$[D^i] = [\Lambda_{PPT}^i] \cdot [\bar{D}^i]$$

- ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ PT:  $[K^i] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

- ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ PT:  $[\bar{K}^i] = [\Lambda_{PPT}^i]^T \cdot [K^i] \cdot [\Lambda_{PPT}^i]$   
ή

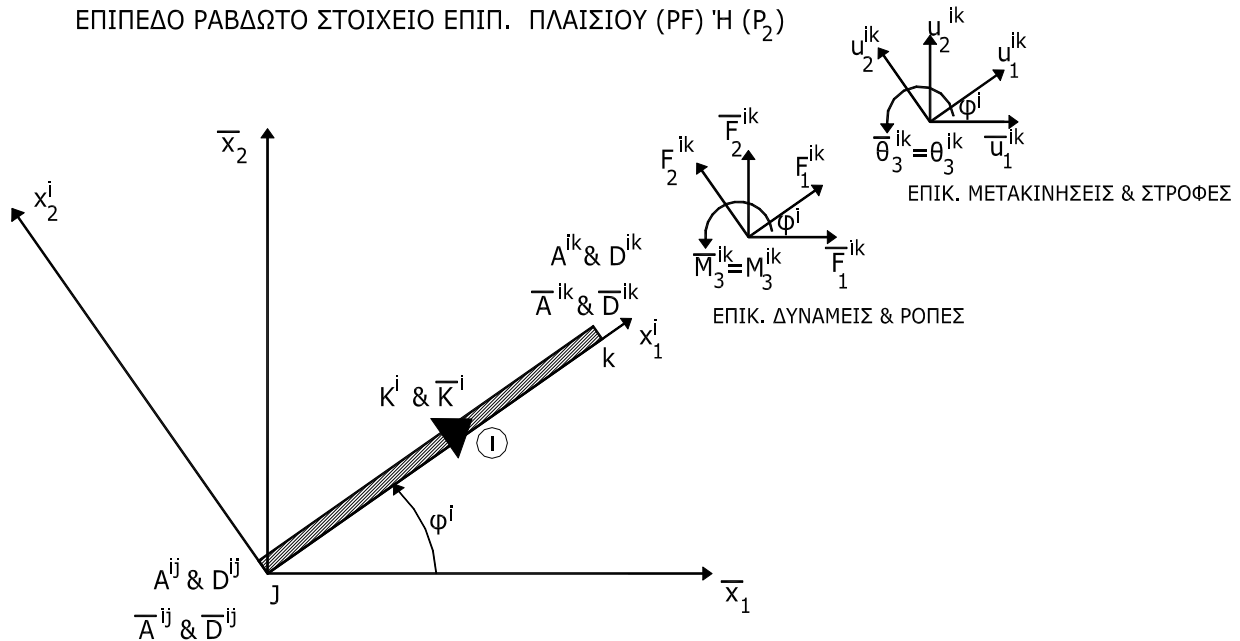
$$[\bar{K}^i] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \phi_i & \cos \phi_i \cdot \sin \phi_i & -\cos^2 \phi_i & -\cos \phi_i \cdot \sin \phi_i \\ \cos \phi_i \cdot \sin \phi_i & \sin^2 \phi_i & -\cos \phi_i \cdot \sin \phi_i & -\sin^2 \phi_i \\ -\cos^2 \phi_i & -\cos \phi_i \cdot \sin \phi_i & \cos^2 \phi_i & \cos \phi_i \cdot \sin \phi_i \\ -\cos \phi_i \cdot \sin \phi_i & -\sin^2 \phi_i & \cos \phi_i \cdot \sin \phi_i & \sin^2 \phi_i \end{bmatrix}$$

- ΟΠΟΤΕ  $[\bar{A}^i] = [\bar{K}^i] \cdot [\bar{D}^i] \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{A}^{ij} \\ \bar{A}^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{jj}^i & \bar{K}_{jk}^i \\ \bar{K}_{kj}^i & \bar{K}_{kk}^i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{D}^{ij} \\ \bar{D}^{ik} \end{bmatrix}$

- ΒΑΣΕΙ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ ΤΩΝ ΚΟΜΒΩΝ  $\Rightarrow$  ΤΩΝ **ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ** Β.Ε. ΜΕΤΑΦΕΡΟΝΤΑΙ ΤΑ ‘ΚΑΘΟΛΙΚΟΠΟΙΗΜΕΝΑ’ ΥΠΟΜΗΤΡΩΑ ΤΗΣ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΗΣ ΣΧΕΣΗΣ ΣΤΑ ΚΑΘΟΛΙΚΑ ΜΗΤΡΩΑ ΟΛΟΚΛΗΡΗΣ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ, ΕΤΣΙ ΩΣΤΕ ΝΑ ΠΑΡΑΧΘΕΙ ΚΑΙ ΝΑ ΕΠΙΛΥΘΕΙ Η ΣΧΕΣΗ  $\boxed{\bar{K} \cdot \bar{\Delta} = \bar{P}}$

## ΕΠΙΠΕΔΑ ΠΛΑΙΣΙΑ

ΕΠΙΠΕΔΟ ΡΑΒΔΩΤΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΕΠΙΠ. ΠΛΑΙΣΙΟΥ (PF) Ή (P<sub>2</sub>)



- ΣΤΟ ΤΟΠΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΧΟΥΝ ΚΑΤΑ ΤΟΥΣ ΑΞΟΝΕΣ  $\begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \end{bmatrix}$  ΔΥΝΑΜΕΙΣ & ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΙΣ ΕΝΩ ΣΤΟΝ ΑΛΛΟ ΑΞΟΝΑ  $\begin{bmatrix} x_3^i \end{bmatrix}$  ΕΧΟΥΝ ΡΟΠΗ & ΣΤΡΟΦΗ. ΤΑ ΙΔΙΑ ΜΕΓΕΘΗ ΕΧΟΥΝ ΚΑΙ ΣΤΟΥΣ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥΣ  $\begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3 \end{bmatrix}$  (3 Β.Ε. ΑΝΑ ΚΟΜΒΟ):

- ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΤΟΠΙΚΟ:  $\begin{bmatrix} D^{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^{ij} \\ u_2^{ij} \\ \theta_3^{ij} \end{bmatrix} \& \begin{bmatrix} D^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^{ik} \\ u_2^{ik} \\ \theta_3^{ik} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} D^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{ij} \\ D^{ik} \end{bmatrix}$

- ΔΡΑΣΕΙΣ ΣΤΟ ΚΑΘΟΛΙΚΟ:  $\begin{bmatrix} \bar{A}^{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1^{ij} \\ \bar{F}_2^{ij} \\ \bar{M}_3^{ij} \end{bmatrix} \& \begin{bmatrix} \bar{A}^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1^{ik} \\ \bar{F}_2^{ik} \\ \bar{M}_3^{ik} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{A}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}^{ij} \\ \bar{A}^{ik} \end{bmatrix}$

- ΜΕΤΑΚ. ΣΤΟ ΚΑΘΟΛΙΚΟ:  $\begin{bmatrix} \bar{D}^{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{ij} \\ \bar{u}_2^{ij} \\ \bar{\theta}_3^{ij} \end{bmatrix} \& \begin{bmatrix} \bar{D}^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{ik} \\ \bar{u}_2^{ik} \\ \bar{\theta}_3^{ik} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{D}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}^{ij} \\ \bar{D}^{ik} \end{bmatrix}$

- ‘ΜΕΤΑΦΟΡΑ’ ΕΠΙΚ. ΔΡΑΣΕΩΝ ΣΤΟΝ ΚΟΜΒΟ **k** ΑΠΟ ΤΟ ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΣΤΟ ΤΟΠΙΚΟ

$$\begin{aligned} F_1^{ik} &= \bar{F}_1^{ik} \cdot \cos \phi_i + \bar{F}_2^{ik} \cdot \sin \phi_i + 0 \cdot \bar{M}_3^{ik} \\ F_2^{ik} &= -\bar{F}_1^{ik} \cdot \sin \phi_i + \bar{F}_2^{ik} \cdot \cos \phi_i + 0 \cdot \bar{M}_3^{ik} \\ M_3^{ik} &= 0 \cdot \bar{F}_1^{ik} + 0 \cdot \bar{F}_2^{ik} + 1 \cdot \bar{M}_3^{ik} \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} A^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda^i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{A}^{ik} \end{bmatrix} \& \begin{bmatrix} \bar{A}^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda^i \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} A^{ik} \end{bmatrix} \quad \text{ΜΕ}$$

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{PF}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_i & \sin \phi_i & 0 \\ -\sin \phi_i & \cos \phi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \& \begin{bmatrix} \Lambda_{PF}^i \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos \phi_i & -\sin \phi_i & 0 \\ \sin \phi_i & \cos \phi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ΚΑΙ ΓΙΑ ΤΑ ΔΥΟ ΑΚΡΑ:  $\begin{bmatrix} A^{ij} \\ A^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{PF}^i & 0 \\ 0 & \Lambda_{PF}^i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{A}^{ij} \\ \bar{A}^{ik} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{PPF}^i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{A}^i \end{bmatrix} \quad \text{ΕΝΩ}$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{PPF}^i \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} A^i \end{bmatrix}, \quad \text{ΜΕ} \quad \begin{bmatrix} \Lambda_{PPF}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{PF}^i & 0 \\ 0 & \Lambda_{PF}^i \end{bmatrix} \quad \text{ΚΑΙ ΓΙΑ ΤΙΣ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΙΣ}$$

$$\begin{bmatrix} D^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{PPF}^i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{D}^i \end{bmatrix} \& \begin{bmatrix} \bar{D}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{PPF}^i \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} D^i \end{bmatrix} \quad (\text{ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟ} \quad \begin{bmatrix} \Lambda_{PPF}^i \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \Lambda_{PPF}^i \end{bmatrix}^{-1})$$

- ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ **PF**:

$$\begin{bmatrix} K^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}^{(i)}$$

- ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ **PF**:  $\begin{bmatrix} \bar{K}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{PPF}^i \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} K^i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Lambda_{PPF}^i \end{bmatrix} \quad \text{ή}$

$$[\bar{K}^i] = \begin{bmatrix} A & & & & & \\ B & \Delta & & & & \\ \Gamma & E & Z & & & \\ -A & -B & -\Gamma & A & & \\ -B & -\Delta & -E & B & \Delta & \\ \Gamma & E & \frac{Z}{2} & -\Gamma & -E & Z \end{bmatrix}^{(i)} \quad \text{ΟΠΟΥ}$$

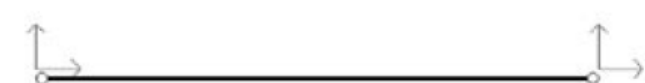
$$\begin{aligned} A &= \frac{EA}{L} \cdot c^2 + \frac{12EI}{L^3} \cdot s^2 \\ B &= \left( \frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) \cdot (c \cdot s) \\ \Gamma &= -\frac{6EI}{L^2} \cdot s \\ \Delta &= \frac{EA}{L} \cdot s^2 + \frac{12EI}{L^3} \cdot c^2 \\ E &= \frac{6EI}{L^2} \cdot c \\ Z &= \frac{4EI}{L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= \cos \varphi^i = \frac{\Delta x_1^i}{L} \\ s &= \sin \varphi^i = \frac{\Delta x_2^i}{L} \\ L &= \sqrt{(\Delta x_1^i)^2 + (\Delta x_2^i)^2} \end{aligned}$$

$$[\bar{A}^i] = [\bar{K}^i] \cdot [\bar{D}^i] \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{A}^{ij} \\ \bar{A}^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{jj}^i & \bar{K}_{jk}^i \\ \bar{K}_{kj}^i & \bar{K}_{kk}^i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{D}^{ij} \\ \bar{D}^{ik} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ΒΑΣΕΙ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ ΤΩΝ}$$

ΚΟΜΒΩΝ & Β.Ε. ΜΕΤΑΦΕΡΟΝΤΑΙ ΤΑ ‘ΚΑΘΟΛΙΚΟΠΟΙΗΜΕΝΑ’ ΥΠΟΜΗΤΡΩΑ ΣΤΑ ΚΑΘΟΛΙΚΑ ΜΗΤΡΩΑ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ, ΕΤΣΙ ΩΣΤΕ ΝΑ ΠΑΡΑΧΘΕΙ ΚΑΙ ΝΑ ΕΠΙΛΥΘΕΙ Η ΣΧΕΣΗ  $[\bar{K}] \cdot [\bar{\Delta}] = [\bar{P}]$ . ΑΚΡΙΒΩΣ ΟΠΩΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΑ!

### ΤΥΠΟΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΠΛΑΙΣΙΩΝ (PLANE FRAMES)

-  1. Τρεις ενεργοί β.ε. σε κάθε άκρο
-  2. Άρθρωση στο άκρο j
-  3. Άρθρωση στο άκρο k
-  4. Άρθρωση και στα δύο άκρα

## ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΑΜΕΣΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ ΡΑΒΔΩΤΩΝ ΦΟΡΕΩΝ

### Βασικές ενότητες προγραμματισμού

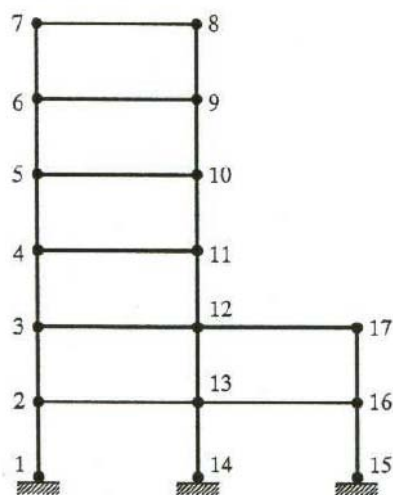
Οι βασικές ενότητες ενός προγράμματος Η/Υ της άμεσης μεθόδου δυσκαμψίας ραβδωτών φορέων είναι οι εξής: (i) Εισαγωγή δεδομένων των κόμβων και στοιχείων του φορέα. (ii) Υπολογισμός μητρώων δυσκαμψίας στοιχείων. (iii) Υπολογισμός δράσεων παγίωσης των στοιχείων. (iv) Μόρφωση του καθολικού μητρώου δυσκαμψίας και των ισοδύναμων δράσεων των κόμβων του φορέα. (v) Επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας (vi) Υπολογισμός εντατικών μεγεθών και τάσεων των ράβδων του φορέα. Τα βασικά στάδια συμπληρώνονται με τα στάδια προ-επεξεργασίας των δεδομένων (αυτόματη γένεση συνδεσμολογίας και γραφική απεικόνιση του φορέα) και μετ-επεξεργασίας των αποτελεσμάτων (γραφική απεικόνιση μετατοπίσεων, εντατικών μεγεθών και τάσεων). Τα δύο αυτά στάδια επηρεάζουν σημαντικά τον συνολικό χρόνο που απαιτείται για την ανάλυση του φορέα και καθιστούν το πρόγραμμα φιλικότερο προς τον χρήστη.

## ΑΡΙΘΜΗΣΗ ΚΟΜΒΩΝ $\Rightarrow$ ΚΟΜΒΙΚΩΝ Β.Ε.

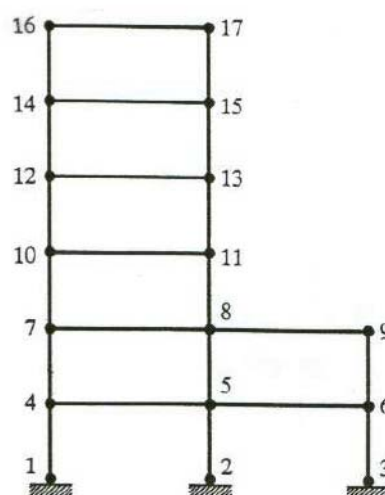
### *Αποθήκευση μητρώου δυσκαμψίας*

Ο τρόπος αποθήκευσης του μητρώου δυσκαμψίας του φορέα εξαρτάται από τη μέθοδο επιλύσεως των εξισώσεων ισορροπίας καθώς και από την τεχνική διαχείρισης του μητρώου δυσκαμψίας που έχουν επιλεγεί. Σε όλες τις περιπτώσεις αποθηκεύονται λόγω συμμετρίας οι όροι που βρίσκονται μόνο στο άνω ή το κάτω τριγωνικό τμήμα του μητρώου δυσκαμψίας. Η απόσταση από την κύρια διαγώνιο του πιο απομακρυσμένου μηδενικού όρου του μητρώου εξαρτάται από τη μέγιστη διαφορά  $m_k$  της καθολικής αρίθμησης των βαθμών ελευθερίας των κόμβων όλων των στοιχείων (βλ. σχήματα 1 και 2). Η απόσταση αυτή καθορίζει και το εύρος της ζώνης εντός της οποίας βρίσκονται οι μη μηδενικοί όροι του μητρώου. Το ημιεύρος **nband** της ζώνης προσδιορίζεται από τη μέγιστη διαφορά  $m_k$  των καθολικών βαθμών ελευθερίας των στοιχείων:

$$nband = m_k + 1$$

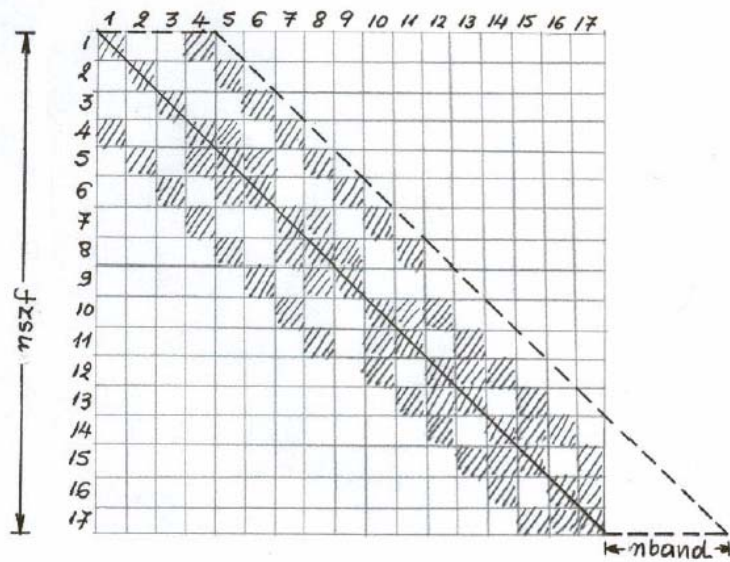
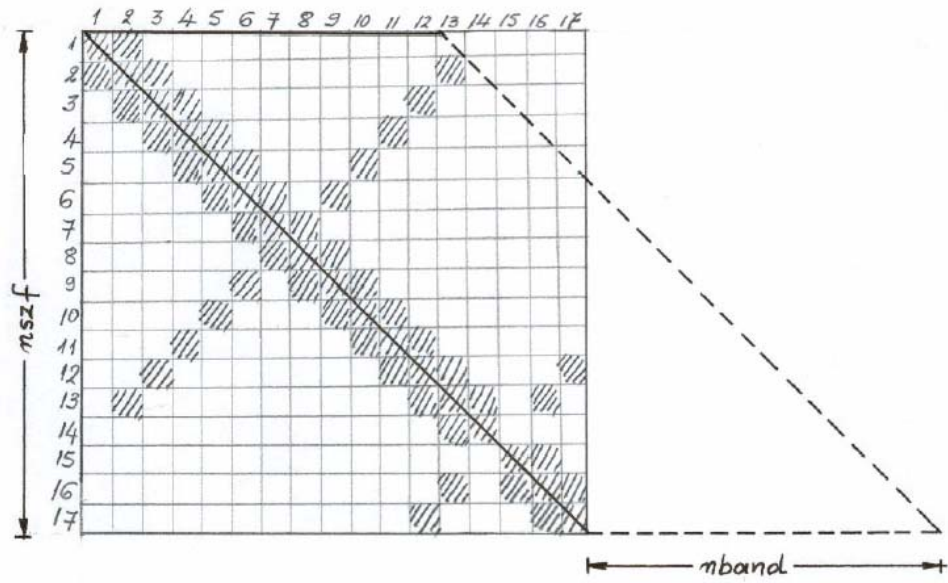


(α) Εσφαλμένη αρίθμηση κόμβων:  
 $m_k + 1 = 36$



(β) Ορθή αρίθμηση κόμβων:  
 $m_k + 1 = 12$

**Σχήμα 1**    Αρίθμηση κόμβων επίπεδου πλαισίου



**Σχήμα 2** Σχηματική παράσταση των μητρώων δυσκαμψίας για την εσφαλμένη και την ορθή αρίθμηση των κόμβων του πλαισίου του σχήματος 1