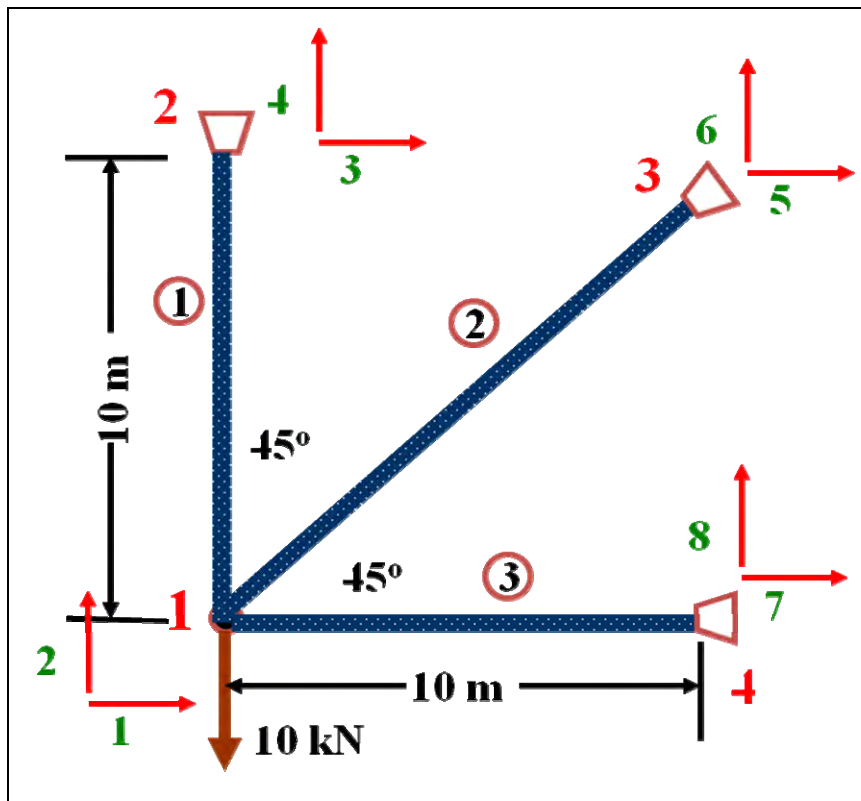


ΑΣΚΗΣΗ 1



ΒΗΜΑ 1^ο

Αρίθμηση κόμβων, μελών και βαθμών ελευθερίας του φορέα καθώς και φορά του τοπικού άξονα X_1 των μελών του όπως φαίνεται στο σχήμα της εκφώνησης. Στο βήμα αυτό ο φορέας εξετάζεται αμελώντας τον τρόπο στηρίξεώς του.

Συνοπτικός πίνακας δικτυώματος:

μέλος	αρχή	τέλος	L (m)	A (m ²)	ϕ	C	S	C ²	S ²	CS
1	1	2	10.00	2	90	0	1	0	1	0
2	1	3	10.00	2	45	0.7071	0.7071	0.5	0.5	0.5
3	1	4	14.14	2	0	1	0	1	0	0

* C=cos & S=sin

ΒΗΜΑ 2^ο

Μόρφωση τοπικών μητρώων ακαμψίας των μελών του φορέα. Όλα τα στοιχεία του δικτυώματος είναι στοιχεία τύπου P1 με σταθερή διατομή.

Μέλος 1

$$L_1 = 10,00m$$

$$A_1 = 2m^2$$

$$E = E_1 = 30 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2 \text{ (το ίδιο για όλα τα μέλη)}$$

$$[K^1] = \frac{A_1 E}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{AE}{10} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Μέλος 2

$$L_2 = 14,14m$$

$$A_2 = 2m^2$$

$$E = E_2 = 30 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$$

$$[K^2] = \frac{A_2 E}{L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{AE}{14,14} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Μέλος 3

$$L_3 = 10,00m$$

$$A_3 = 2m^2$$

$$E = E_3 = 30 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$$

$$[K^3] = \frac{A_3 E}{L_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{AE}{10} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 3^ο

Μόρφωση μητρώων μετασχηματισμού των μελών του φορέα. Μητρώο μετασχηματισμού στοιχείου τύπου P1.

$$[\Lambda^i_{PPT}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix}$$

Όπου φ η γωνία κατά την οποία πρέπει να στραφεί ο καθολικός άξονας X1 δεξιόστροφα ώστε να συμπίσει με τον τοπικό άξονα X1 του μέλους.

Μέλος 1

$$\Phi_1 = 90^\circ$$

Επομένως :

$$[\Lambda^1_{PPT}] = \begin{bmatrix} \cos 90 & \sin 90 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 90 & \sin 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Μέλος 2

$$\Phi_1 = 45^\circ$$

Επομένως :

$$[\Lambda^2_{PPT}] = \begin{bmatrix} \cos 45 & \sin 45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 45 & \sin 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,707 & 0,707 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,707 & 0,707 \end{bmatrix}$$

Μέλος 3

$$\Phi_1 = 0^\circ$$

Επομένως :

$$[\Lambda^3_{PPT}] = \begin{bmatrix} \cos 0 & \sin 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 0 & \sin 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 4^ο

Μόρφωση καθολικών μητρώων μετασχηματισμού των μελών του φορέα. Σύμφωνα με την μητρική σχέση ισχύει : $[\bar{K}^i] = [\Lambda_{PPT}^i]^T \cdot [K^i] \cdot [\Lambda_{PPT}^i]$ έχουμε :

$$[\bar{K}^1] = \frac{AE}{10} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}^2] = \frac{AE}{14,14} \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}^3] = \frac{AE}{10} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 5^ο

Μόρφωση ολικού μητρώου ακαμψίας του φορέα

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} K^1_{jj} + K^2_{jj} + K^3_{jj} & K^1_{jk} & K^2_{jk} & K^3_{jk} \\ K^1_{kj} & K^1_{kk} & 0 & 0 \\ K^2_{kj} & 0 & K^2_{kk} & 0 \\ K^3_{kj} & 0 & 0 & K^3_{kk} \end{bmatrix} \quad (\text{διαστάσεων } 8 \times 8)$$

$$[\bar{K}] = (500.000) \begin{bmatrix} 1.354 & 0.354 & 0 & 0 & -0.354 & -0.354 & -1 & 0 \\ 0.354 & 1.354 & 0 & -1 & -0.354 & -0.354 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.354 & -0.354 & 0 & 0 & 0.354 & 0.354 & 0 & 0 \\ -0.354 & -0.354 & 0 & 0 & 0.354 & 0.354 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 6^ο

Μόρφωση αναδιατεταγμένων μητρώων εξωτερικών δράσεων $[P_{mm}^-]$ και μετατοπίσεων κόμβων $[\Delta_{mm}^-]$

$$[P_{mm}^-] = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10.000 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad [\Delta_{mm}^-] = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

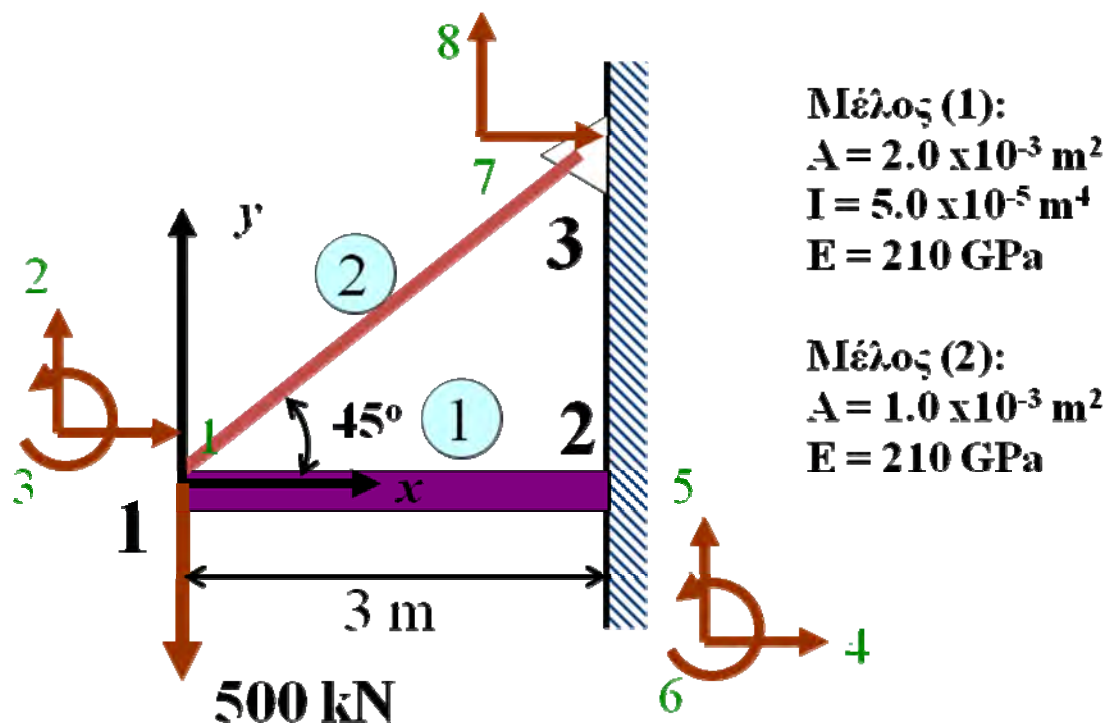
$$\text{Επειδή } \bar{K} \bar{\Delta} = \bar{P} \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{K}_{ff} & \bar{K}_{fs} \\ \bar{K}_{sf} & \bar{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_f \\ \bar{\Delta}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_f \\ \bar{P}_s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -10.000 \end{bmatrix} = (500.000) \begin{bmatrix} 1.354 & 0.354 \\ 0.354 & 1.354 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_1^* \\ \bar{\Delta}_2^- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.414}{100} \\ \frac{-1.59}{100} \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε αντιδράσεις στηρίξεων και αξονικές δυνάμεις των μελών του δικτυώματος κατά τα γνωστά (βλ. πρώτη λυμένη άσκηση σημειώσεων...)

ΑΣΚΗΣΗ 2



ΒΗΜΑ 1^ο

Αρίθμηση κόμβων, μελών και βαθμών ελευθερίας του φορέα καθώς και φορά του τοπικού άξονα X_1 των μελών του όπως φαίνεται στο σχήμα της εκφώνησης. Στο βήμα αυτό ο φορέας εξετάζεται αμελώντας τον τρόπο στηρίξεώς του.

ΒΗΜΑ 2^ο

Μόρφωση τοπικών μητρώων ακαμψίας των μελών του φορέα. Το μέλος 1 είναι στοιχείο επιπέδου πλαισίου τύπου P2 και το μέλος 2 είναι στοιχείο επιπέδου δικτυώματος τύπου P1.

ΜΕΛΟΣ ΕΝΑ (1)

Το καθολικό μητρώο δυσκαμψίας στοιχείου τύπου P2 δίνεται από τον εξής τύπο :

$$\begin{bmatrix} \bar{K}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ B & \Delta & E & 0 & -\Delta & E \\ \Gamma & E & Z & 0 & -E & Z/2 \\ -A & -B & -\Gamma & A & 0 & 0 \\ -B & -\Delta & -E & B & \Delta & -E \\ \Gamma & E & Z/2 & -\Gamma & -E & Z \end{bmatrix}$$

$$\text{Όπου : } A = \frac{EA}{L}C^2 + \frac{12EI}{L^3}S^2$$

$$B = \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) CS$$

$$\Gamma = \frac{-6EI}{L^2}S$$

$$\Delta = \frac{EAS^2}{L} + \frac{12EI}{L^3}C^2$$

$$E = \frac{6EI}{L^2}C$$

$$Z = \frac{4EI}{L}$$

$$C = \cos\varphi_i, \quad S = \sin\varphi_i$$

Επομένως (αφού $\varphi_1=0$):

$$[K^1] = [\bar{K}^1] = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^2 & 6I/L & 0 & -12I/L^2 & 6I/L \\ 0 & 6I/L & 4I & 0 & -6I/L & 2I \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -12I/L^2 & -6I/L & 0 & 12I/L^2 & -6I/L \\ 0 & 6I/L & 2I & 0 & -6I/L & 4I \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}^1] = 70 \cdot 10^6 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0667 & 0,1 & 0 & -0,0667 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 & 0 & -0,1 & 0,1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0667 & -0,1 & 0 & 0,0667 & -0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,1 & 0 & -0,1 & 0,2 \end{bmatrix}$$

ΜΕΛΟΣ ΔΥΟ (2)

Το καθολικό μητρώο δυσκαμψίας στοιχείου τύπου P1 δίνεται από τον εξής τύπο :

$$\left[\bar{K}^2 \right] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 45 & \cos 45 \sin 45 & -\cos^2 45 & -\cos 45 \sin 45 \\ \cos 45 \sin 45 & \sin^2 45 & -\cos 45 \sin 45 & -\sin^2 45 \\ -\cos^2 45 & -\cos 45 \sin 45 & \cos^2 45 & \cos 45 \sin 45 \\ -\cos 45 \sin 45 & -\sin^2 45 & \cos 45 \sin 45 & \sin^2 45 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε μηδενικά σε μια ενδιάμεση τρίτη γραμμή και τρίτη στήλη (για τον στροφικό βαθμό ελευθερίας 3 στον κόμβο #1) ώστε να προκύψει ένας πίνακας 5X5 για την άθροιση του υπομητρώου του μέλους (2) με το υπομητρώο του μέλους (1)

$$\left[\bar{K}^2 \right] = 7010^6 \begin{bmatrix} 0,354 & 0,354 & 0 & -0,354 & -0,354 \\ 0,354 & 0,354 & 0 & -0,354 & -0,354 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,354 & -0,354 & 0 & 0,354 & 0,354 \\ -0,354 & -0,354 & 0 & 0,354 & 0,354 \end{bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 3^ο

Μόρφωση ολικού μητρώου ακαμψίας του φορέα (8X8):

$$\left[\bar{K} \right] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{matrix} \begin{matrix} \bar{U}_1^1 & \bar{U}_2^1 & \bar{\theta}_3^1 & \bar{U}_1^2 & \bar{U}_2^2 & \bar{\theta}_3^2 & \bar{U}_1^3 & \bar{U}_2^3 \end{matrix} \\ \left\{ \begin{matrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{M}_3 \end{matrix} \right\} \\ \left\{ \begin{matrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{M}_3 \end{matrix} \right\} \\ \left\{ \begin{matrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{matrix} \right\} \end{matrix} \end{matrix} \begin{matrix} - \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Αντικαθιστώντας τα πιο πάνω υπομητρώα από το δεύτερο βήμα υπολογίζουμε το ολικό μητρώο ακαμψίας του φορέα 1 :

$$[K] = 70 \cdot 10^6 \begin{bmatrix} 2,354 & 0,354 & 0 & -2 & 0 & 0 & -0,354 & -0,354 \\ 0,354 & 0,421 & 0,10 & 0 & -0,0667 & 0,10 & -0,354 & 0 \\ 0 & 0,10 & 0,20 & 0 & -0,10 & 0,10 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0667 & -0,10 & 0 & 0,0667 & -0,10 & 0 & 0 \\ 0 & 0,10 & 0,10 & 0 & -0,10 & 0,20 & 0 & 0 \\ -0,354 & -0,354 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,354 & 0,354 \\ -0,354 & -0,354 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,354 & 0,354 \end{bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 4^ο

Αναδιάταξη μητρώου ακαμψίας λόγω στηρίξεως του φορέα ώστε να διαχωριστούν οι γνωστές ποσότητες (δεδομένα) από τις άγνωστες (αντιδράσεις , μετατοπίσεις). Μόρφωση μητρώου μεταθέσεως $[V]$:

$$[V] = \begin{matrix} & \bar{U}_1 & \bar{U}_2 & \bar{\Theta}_3 & \bar{U}_4 & \bar{U}_5 & \bar{\Theta}_6 & \bar{U}_7 & \bar{U}_8 \\ \begin{matrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \bar{\Theta}_3 \\ \bar{U}_4 \\ \bar{U}_5 \\ \bar{\Theta}_6 \\ \bar{U}_7 \\ \bar{U}_8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = [I] \text{ (είναι απευθείας όλοι μαζί οι ελεύθεροι β.ε. 1,2,3)}$$

Σύμφωνα με τη μητρωϊκή σχέση : $[K_{mm}] = [V][K_m][V^T]$ υπολογίζουμε το ολικό μητρώο ακαμψίας $[K_{mm}] = [K]$

$$\left[K_{mm}^{-} \right] = 70 \cdot 10^6 \begin{bmatrix} 2,354 & 0,354 & 0 \\ 0,354 & 0,421 & 0,10 \\ 0 & 0,10 & 0,20 \end{bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 5^ο

Μόρφωση αναδιατεταγμένων μητρώων εξωτερικών δράσεων $\left[P_{mm}^{-} \right] = \left[\bar{P} \right]$ και μετατοπίσεων

κόμβων $\left[\Delta_{mm}^{-} \right] = \left[\bar{\Delta} \right]$

$$\left[P_{mm}^{-} \right] = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{M}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{M}_6 \\ \bar{P}_7 \\ \bar{P}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -500.000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \left[\Delta_{mm}^{-} \right] = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Theta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Theta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Theta}_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως :

$$\text{Επειδή } \bar{K} \bar{\Delta} = \bar{P} \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{K}_{ff} & \bar{K}_{fs} \\ \bar{K}_{sf} & \bar{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_f \\ \bar{\Delta}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_f \\ \bar{P}_s \end{bmatrix}$$

$$\text{Επειδή συνήθως : } \left[\bar{\Delta}_s \right] = 0 \Leftrightarrow \bar{K}_{ff} * \bar{\Delta}_f = \bar{P}_f \quad \text{και} \quad \bar{K}_{sf} * \bar{\Delta}_f = \bar{P}_s$$

$$\bar{K}_{ff} * \bar{\Delta}_f = \bar{P}_f \Leftrightarrow 70 * 10^6 \begin{bmatrix} 2,354 & 0,354 & 0 \\ 0,354 & 0,421 & 0,10 \\ 0 & 0,10 & 0,20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{M}_3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 70 \cdot 10^6 \begin{bmatrix} 2,354 & 0,354 & 0 \\ 0,354 & 0,421 & 0,10 \\ 0 & 0,10 & 0,20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -500.000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\Delta}_1 \end{bmatrix} = 0,00338m$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\Delta}_2 \end{bmatrix} = -0,0225m$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi}_3 \end{bmatrix} = 0,0113rad$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε αντιδράσεις στηρίξεων: $\bar{K}_{sf} * \bar{\Delta}_f = \bar{P}_s \Rightarrow \{\bar{P}_s\} = \begin{Bmatrix} 473.76kN \\ -26.5kN \\ 78.3kNm \\ -473.76kN \\ -473.76kN \end{Bmatrix}$

ΒΗΜΑ 6^ο

Ακραίες δράσεις μελών του φορέα (μέλος 2)

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{3x} \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \end{bmatrix}$$

$$F_{1x} = -670 \text{ kN}$$

$$F_{3x} = +670 \text{ kN}$$

Ακραίες δράσεις μελών του φορέα (μέλος 1), ομοίως:

$$\{\hat{A}\} = [\hat{k}][\Lambda]\{D\}$$

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} 0.00338m \\ -0.0225m \\ 0.0113rad \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix}$$

ΟΠΟΤΕ
$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{1X} \\ \bar{F}_{1Y} \\ \bar{M}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AE/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Phi}_3 \end{bmatrix}$$

$F_{1X} = 473 \text{ kN}$
 $F_{1Y} = 26,5 \text{ kN}$
 $M_1 = 0.0 \text{ kN m}$

και ομοίως

$F_{2X} = -473 \text{ kN}$
 $F_{2Y} = 26,5 \text{ kN}$
 $M_2 = -78,3 \text{ kN m}$

Άρα, οι δυνάμεις στα μέλη είναι σχηματικά οι ακόλουθες:

