

ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΜΑΖΑΣ

Μάθημα 8

Ροή υγρού υμένα

Εξετάζουμε την περίπτωση στρωτής, ιξώδους, μονοδιάστατης, πλήρως ανεπτυγμένης ροής υγρού σε κεκλιμένη επιφάνεια μήκους L [L] και πλάτους W [L], με κλίση θ [°] ως προς το οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.20. Θεωρούμε συνθήκες μόνιμης κατάστασης και ότι η επίδραση των άκρων είναι αμελητέα, δηλαδή το πάχος του υγρού υμένα δ [L] είναι πολύ μικρότερο των διαστάσεων L και W της κεκλιμένης επιφάνειας. Βάσει των παραδοχών αυτών η ροή είναι μονοδιάστατη. Λόγω του ιξώδους το ρευστό δεν ολισθαίνει πάνω στην επιφάνεια του στερεού και η ταχύτητα είναι:

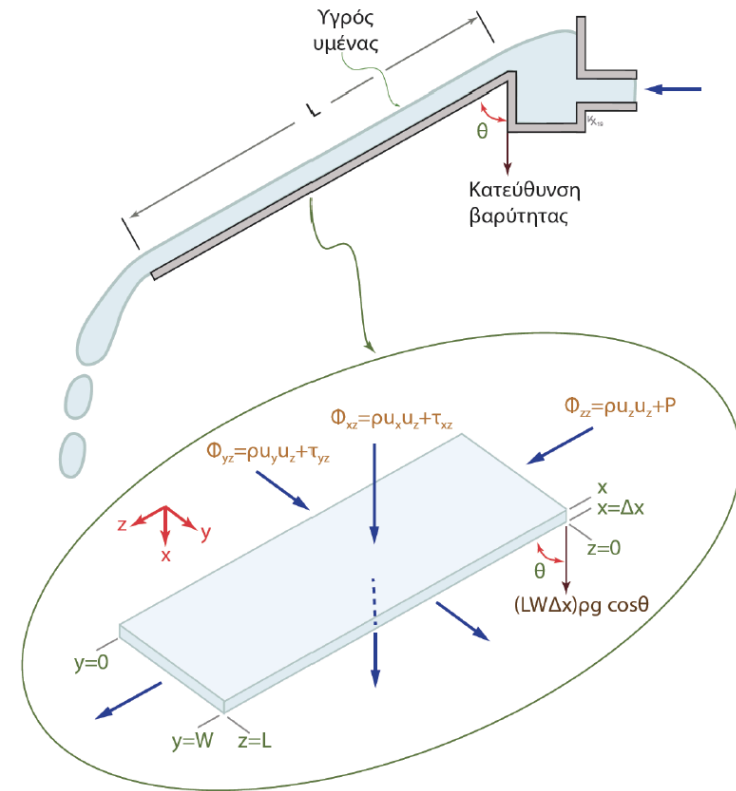
$$u_x = 0, u_y = 0, u_z = u_z(x)$$

όπου u_x , u_y και u_z [L/t] είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας του υγρού. Στην ελεύθερη επιφάνεια η πίεση είναι ίση με την ατμοσφαιρική. Μόνο η υδροστατική πίεση που ασκείται στην κατεύθυνση z μεταβάλλεται γραμμικά ως προς το βάθος του ρευστού υμένα:

$$P = P_z(x)$$

Επίσης επειδή $u_x = u_y = 0$, οι μόνες μη-μηδενικές συνιστώσες του τανυστή της διατμητικής τάσης είναι:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{du_z}{dx} + \frac{du_x}{dz} \right) = \mu \left(\frac{du_z}{dx} \right)$$



Σχήμα 4.20: Ροή υγρού υμένα σε κεκλιμένη επιφάνεια μήκους L [L] και πλάτους w [L], η οποία σχηματίζει γωνία θ (°) με την κατεύθυνση της βαρύτητας. Επίσης απεικονίζονται οι συνιστώσες της συνολικής ορμής και το σύστημα συντεταγμένων ως προς το οποίο ανάγεται η κίνηση του ρευστού (τροποποιημένο σχήμα από τους Bird et al. 2002, p. 42).

Το **ισοζύγιο συνολικής ορμής**, Φ [M·L/t], στην κατεύθυνση (διεύθυνση ροής) σε μόνιμη κατάσταση είναι:

$$\begin{bmatrix} \text{Ρυθμός} \\ \text{εισροής} \\ \text{ορμής} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{Ρυθμός} \\ \text{εκροής} \\ \text{ορμής} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Ρυθμός} \\ \text{παραγωγής} \\ \text{ορμής} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Ρυθμός} \\ \text{συσσώρευσης} \\ \text{ορμής} \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow LW[(\Phi_{xz})_x - (\Phi_{xz})_{x+\Delta x}] + W\Delta x[(\Phi_{zz})_{z=0} - (\Phi_{zz})_{z=L}] + (LW\Delta x)pg \cos \theta = 0$$

Θεωρούμε ότι η **συνολική ορμή περιλαμβάνει και τις επιφανειακές δυνάμεις** (διατμητική τάση και πίεση), ο ρυθμός παραγωγής ορμής περιλαμβάνει τις εσωτερικές δυνάμεις (δύναμη τη βαρύτητας).

Η ορμή που εισέρχεται στο $z=0$ είναι ίδια με αυτή που εξέρχεται στο $z=L$, γιατί η συνεισφορά του $P=P_z(x)$ είναι ίδια στο $z=0$ και στο $z=L$. Επομένως, διαιρώντας δια $LW\Delta x$ την παραπάνω εξίσωση και παίρνοντας το όριο $\lim \Delta x \rightarrow 0$ προκύπτει:

$$\Rightarrow -\left[\frac{(\Phi_{xz})_{x+\Delta x} - (\Phi_{xz})_x}{\Delta x}\right] + \left[\frac{(\Phi_{zz})_{z=0} - (\Phi_{zz})_{z=L}}{L}\right] + pg \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi_{xz}}{\partial x} = pg \cos \theta \quad (*)$$

Η συνολική ορμή Φ_{xz} ορίζεται ως εξής:

$$\Phi_{xz} = \rho u_x u_z + \tau_{xz}$$

$$\frac{\partial \Phi_{xz}}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \quad (**)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (*) και (**) και ολοκληρώνοντας προκύπτει η σχέση για τη διατμητική τάση:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = pg \cos \theta$$

$$\Rightarrow \tau_{xz} = (pg \cos \theta)x + \Omega_1 \quad (***)$$

όπου η σταθερά Ω_1 βρίσκεται από την οριακή συνθήκη:

$$x = 0: \tau_{xz} = 0 \quad \rightarrow \quad \Omega_1 = 0$$

Αντικατάσταση της Ω_1 στην (***) και χρησιμοποίηση του ορισμού της διατμητικής τάσης οδηγεί στη σχέση για την u_z :

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{xz} = (pg \cos \theta)x \\ \tau_{xz} = -\mu \frac{du_z}{dx} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{du_z}{dx} = -\frac{(pg \cos \theta)x}{\mu}$$

$$\Rightarrow u_z = -\frac{(pg \cos \theta)x^2}{2\mu} + \Omega_2$$

Για να βρεθεί η σταθερά Ω_2 πρέπει να χρησιμοποιηθεί η οριακή συνθήκη που περιγράφει τη **μη-ολίσθηση**:

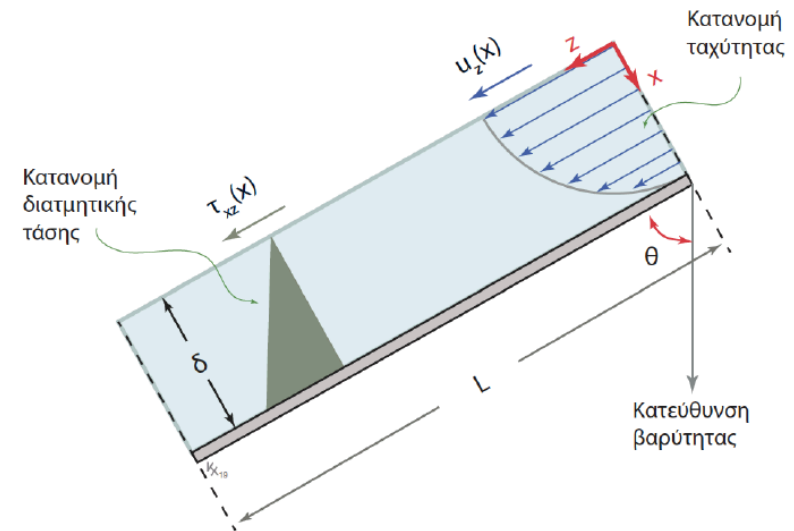
$$x = \delta: u_z = 0$$

$$\Omega_2 = \frac{(\rho g \cos \theta) \delta^2}{2\mu}$$

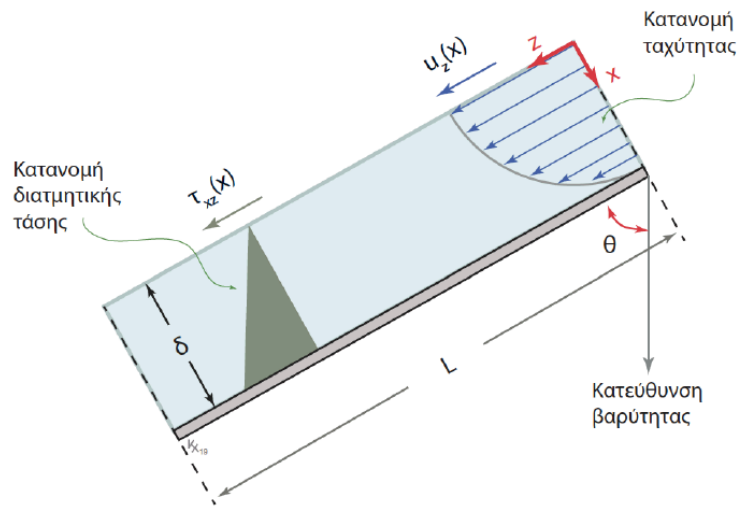
Έχοντας τη σταθερά Ω_2 , η σχέση που περιγράφει την ταχύτητα u_z παίρνει τη μορφή:

$$u_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos \theta}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right]$$

Η παραπάνω εξίσωση περιγράφει την κατανομή της ταχύτητας u_z συναρτήσει της συντεταγμένης x . Η ταχύτητα u_z έχει μια παραβολική κατανομή και η διατμητική τάση μια γραμμική κατανομή όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 4.21.



Σχήμα 4.21: Παραβολική κατανομή ταχύτητας και γραμμική κατανομή της διατμητικής τάσης σε υγρό υμένα που ρέει επάνω σε κεκλιμένη επιφάνεια (τροποποιημένο σχήμα από τους Bird et al. 2002, p. 45).



$$u_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos \theta}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right] \quad (i)$$

Μέγιστη ταχύτητα

Η μέγιστη ταχύτητα του υγρού βρίσκεται στη διεπιφάνεια υγρού-αέρα, δηλαδή στο $x=0$. Επομένως, η εξίσωση που δίνει τη μέγιστη ταχύτητα $u_{z,max}$ βρίσκεται από την εξίσωση (i) με $x=0$:

$$u_{z,max} = \frac{\rho g \delta^2 \cos \theta}{2\mu} \quad (ii)$$

Μέση ταχύτητα

$$\bar{u}_z = \frac{\int_0^W \int_0^\delta u_z dx dy}{\int_0^W \int_0^\delta dx dy} = \frac{W \int_0^\delta u_z dx}{W\delta} = \int_0^\delta u_z \frac{dx}{\delta} \quad (\text{iii})$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (i) και (iii) και αλλάζοντας μεταβλητές ($x=x/\delta$, $dx=\delta d(x/\delta)$, $dx/\delta=d(x/\delta)$) προκύπτει:

$$\bar{u}_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos \theta}{2\mu} \int_0^1 \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right] d\left(\frac{x}{\delta} \right)$$

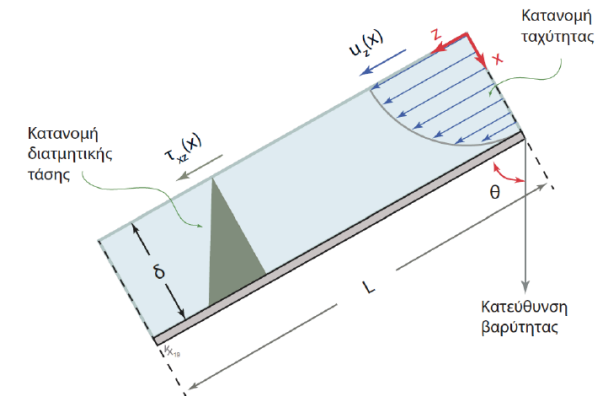
$$\Rightarrow \bar{u}_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos \theta}{2\mu} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{\delta} \right)^3 \right\}_0^1$$

$$\Rightarrow \bar{u}_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos \theta}{2\mu} \left(1 - \frac{1}{3} \right)$$

$$\Rightarrow \bar{u}_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos \theta}{2\mu} \left(\frac{2}{3} \right) \quad (\text{iv})$$

Η παραπάνω εξίσωση σε συνδυασμό με τη μέγιστη ταχύτητα (ii) παίρνει την εξής μορφή:

$$\bar{u}_z = \frac{2}{3} u_{z,\max}$$



$$u_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos \theta}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right] \quad (\text{i})$$

$$u_{z,\max} = \frac{\rho g \delta^2 \cos \theta}{2\mu} \quad (\text{ii})$$

Πάχος υγρού υμένα

Το πάχος του υγρού υμένα βρίσκεται συναρτήσει της μέσης ταχύτητας από την εξίσωση (iv) ως εξής:

$$\delta = \left(\frac{3\mu \bar{u}_z}{\rho g \cos \theta} \right)^{1/2}$$

Μεταφορά μάζας με εξαναγκασμένη συναγωγή

Ένα διαλυτό αέριο A απορροφάται από έναν υγρό υμένα B που πέφτει ρέοντας εφαπτομενικά σε μια κατακόρυφη πλάκα με μήκος L [L] και πλάτος W [L]. Ο υμένας έχει σταθερό πάχος, δ [L], και κινείται (πέφτει) με στρωτή ροή. Εξαιτίας της ροής και της παραβολικής κατανομής της ταχύτητας του υγρού υμένα η συγκέντρωση του A, c_A [M/L³], μέσα στον υγρό υμένα μεταβάλλεται.

Το ισοζύγιο μάζας του A στον όγκο ελέγχου $\Delta x \Delta z W$ είναι:

$$W \Delta x (N_{A(z)})_z - W \Delta x (N_{A(z)})_{z+\Delta z} + W \Delta z (N_{A(x)})_x - W \Delta z (N_{A(x)})_{x+\Delta x} = 0$$

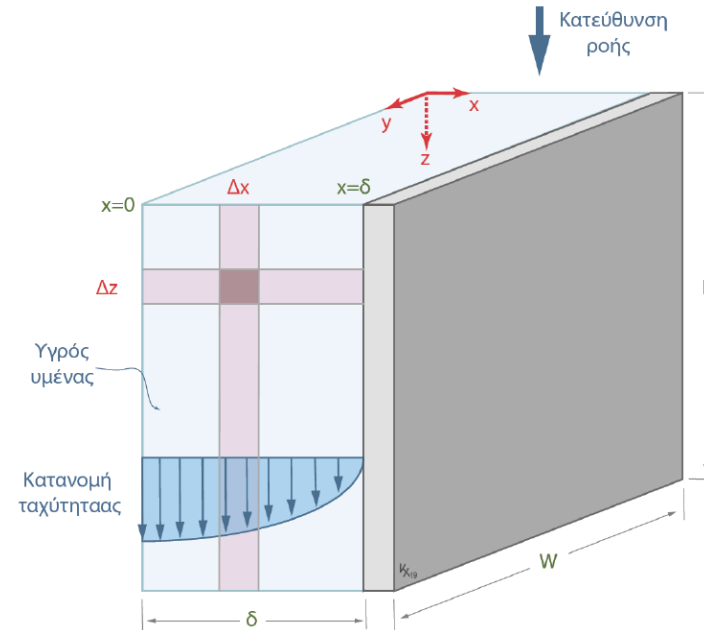
Διαιρώντας με $\Delta x \Delta z W$ την παραπάνω εξίσωση και παίρνοντας τα όρια $\Delta x \rightarrow 0$ και $\Delta z \rightarrow 0$ προκύπτει:

$$\frac{\partial N_{A(z)}}{\partial z} = \frac{\partial N_{A(x)}}{\partial x} \quad (*)$$

Οι γραμμομοριακές παροχές γράφονται ως εξής:

$$N_{A(z)} = -\mathcal{D}_{AB} \frac{dc_A}{dz} + x_A [N_{A(z)} + N_{B(z)}] \approx c_A u_z(x) \quad (**)$$

$$N_{A(x)} = -\mathcal{D}_{AB} \frac{dc_A}{dx} + x_A [N_{A(x)} + N_{B(x)}] \approx -\mathcal{D}_{AB} \frac{dc_A}{dx} \quad (***)$$



Σχήμα 4.22: Απορρόφηση αερίου A σε ρέοντα υγρό υμένα επάνω σε κατακόρυφη πλάκα. Επίσης απεικονίζονται η παραβολική κατανομή ταχύτητας του υγρού υμένα και το σύστημα συντεταγμένων ως προς το οποίο ανάγεται η κίνηση του ρευστού.

Οι απλοποιήσεις στις εξισώσεις (**) και (***) προκύπτουν από το σκεπτικό ότι στη z -κατεύθυνση το A κινείται κυρίως λόγω της ροής του υμένα και θεωρούμε τη διάχυση αμελητέα, ενώ στη x -κατεύθυνση το A μεταφέρεται κυρίως λόγω διάχυσης και ότι η μεταφορά του A εγκάρσια στον υγρό υμένα με συναγωγή είναι αμελητέα.

Αντικαθιστώντας τις (**) και (***) στην (*) προκύπτει:

$$u_z \frac{\partial c_A}{\partial z} = \mathcal{D}_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2}$$

Από τη θεωρία ροής υγρού υμένα γνωρίζουμε ότι:

$$u_z = u_{z,\max} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right]$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω δύο εξισώσεις προκύπτει:

$$u_{z,\max} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right] \frac{\partial c_A}{\partial z} = \mathcal{D}_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} \quad (i)$$

Η επίλυση της παραπάνω μερικής διαφορικής εξίσωσης απαιτεί τις ακόλουθες οριακές συνθήκες:

$$z = 0 : c_A = 0 \quad (ii)$$

$$x = 0 : c_A = c_{A_0} \quad (iii)$$

$$x = \delta : \frac{\partial c_A}{\partial x} = 0 \quad (iv)$$

Η τελευταία συνθήκη περιγράφει ότι η πλάκα είναι αδιαπέρατη.

Η αναλυτική λύση του μαθηματικού προβλήματος έχει βρεθεί από τους Johnstone and Pigford (1942) και είναι η εξής:

$$\frac{c_{A(L)}}{c_{A_0}} = 0,7857e^{-5,1213\Lambda} + 0,1001e^{-39,318\Lambda} + 0,03500e^{-105,64\Lambda} + 0,0181e^{-204,75\Lambda}$$

$$\Lambda = \frac{\mathcal{D}_{AB} L}{\delta^2 u_{z,\max}}$$

Για την οριακή περίπτωση που ο λόγος $L/u_{z,\max}$ είναι μικρός ή αντίστοιχα θεωρώντας ότι το βάθος διείσδυσης του αερίου A είναι μικρό, δηλαδή το A **δεν φτάνει** στην στερεά πλάκα ($x=\delta$) και στο μικρό βάθος διείσδυσης ο υγρός υμένας κινείται με σταθερή ταχύτητα $u_{z,\max}$, η μερική διαφορική εξίσωση (i) και οι οριακές συνθήκες (ii)-(iv) απλοποιούνται ως εξής:

$$u_{z,\max} \frac{\partial c_A}{\partial z} = \mathcal{D}_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2}$$

$$z = 0 : c_A = 0$$

$$x = 0 : c_A = c_{A_0}$$

$$x \rightarrow \infty : c_A = 0$$

Η αναλυτική λύση του απλουστευμένου μαθηματικού προβλήματος βρίσκεται με μετασχηματισμούς Laplace ως προς το z και είναι η εξής:

$$\frac{c_A}{c_{A_0}} = \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2} \left(\frac{u_{z,\max}}{\mathcal{D}_{AB} z} \right)^{1/2} \right]$$

όπου $\operatorname{erfc}(\cdot)$ είναι η συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος. Γνωρίζοντας την κατανομή της συγκέντρωσης c_A , ο **τοπικός ρυθμός μεταφοράς μάζας** του A , $N_{A,x=0}$, στο ρέοντα υγρό υμένα ($x=0$) βρίσκεται ως εξής:

$$\left. \begin{aligned} c_A &= c_{A_0} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2} \left(\frac{u_{z,\max}}{\mathcal{D}_{AB} z} \right)^{1/2} \right] \\ N_{A(x=0)} &\approx -\mathcal{D}_{AB} \left. \frac{dc_A}{dx} \right|_{x=0} \\ \frac{d}{dx} \operatorname{erfc}(u) &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp[-u^2] \frac{du}{dx} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow N_{A(x=0)} = \mathcal{D}_{AB} \frac{2c_{A_0}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{x^2}{4} \left(\frac{u_{z,\max}}{\mathcal{D}_{AB} z} \right) \right] \times \left[\frac{1}{4} \left(\frac{u_{z,\max}}{\mathcal{D}_{AB} z} \right) \right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow N_{A(x=0)} = c_{A_0} \left(\frac{\mathcal{D}_{AB} u_{z,\max}}{\pi z} \right)^{1/2}$$

Βάσει της παραπάνω εξίσωσης, είναι προφανές ότι ο τοπικός ρυθμός μεταφοράς μάζας του A είναι συνάρτηση του z . Επομένως, ο **ολικός ρυθμός μεταφοράς μάζας**, W_A , διαμέσου της διεπιφάνειας υγρού υμένα ($S=LW$) στο $x=0$ δεν ισούται με το γινόμενο $SN_{A,x=0}$, αλλά βρίσκεται ολοκληρώνοντας την παραπάνω εξίσωση (4.133):

$$W_A = \int_0^W \int_0^L N_{A(x=0)} dz dy = Wc_{A_0} \left(\frac{\mathcal{D}_{AB} u_{z,\max}}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^L \frac{1}{\sqrt{z}} dz$$

$$\Rightarrow W_A = Wc_{A_0} \left(\frac{\mathcal{D}_{AB} u_{z,\max}}{\pi} \right)^{1/2} 2L^{1/2}$$

$$\Rightarrow W_A = \underbrace{WL}_S c_{A_0} \left(\frac{4\mathcal{D}_{AB} u_{z,\max}}{\pi L} \right)^{1/2}$$

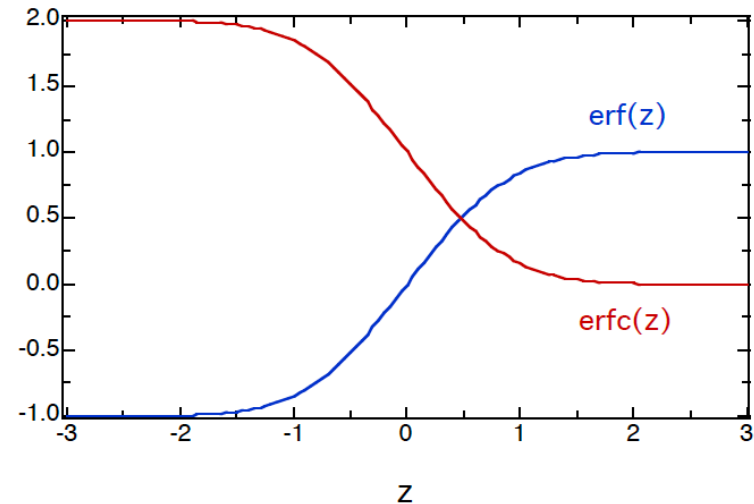
Συνάρτηση σφάλματος (error function)

Η συνάρτηση σφάλματος (erf) είναι μια τυποποιημένη μαθηματική συνάρτηση η οποία έχει ευρείες εφαρμογές στα μαθηματικά και στη φυσική και ορίζεται για μια αυθαίρετη μεταβλητή z ως εξής:

$$\begin{aligned}\operatorname{erf}(z) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[z - \frac{z^3}{1! \cdot 3} + \frac{z^5}{2! \cdot 5} - \frac{z^7}{3! \cdot 7} + \frac{z^9}{4! \cdot 9} - + \dots \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!(2n+1)}\end{aligned}$$

Η συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος (erfc, complementary error function) για μια αυθαίρετη μεταβλητή z συσχετίζεται με τη συνάρτηση σφάλματος της ίδιας μεταβλητής ως εξής:

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-x^2} dx$$



Μερικές σημαντικές ιδιότητες της συνάρτησης σφάλματος και της συμπληρωματικής συνάρτησης σφάλματος:

$$-1 \leq \operatorname{erf}(z) \leq 1$$

$$0 \leq \operatorname{erfc}(z) \leq 2$$

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z)$$

$$\operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf}(z)$$

$$\operatorname{erfc}(-z) = 1 + \operatorname{erf}(z)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp[-x^2]$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{erfc}(x) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp[-x^2]$$

Μερικές προσεγγιστικές εξισώσεις για τον υπολογισμό της συνάρτησης σφάλματος είναι:

$$\operatorname{erfc}(z)=1-\left(a_1 b+a_2 b^2+a_3 b^3\right) \exp \left[-z^2\right]+\varepsilon(z)$$

$$|\varepsilon(z)| \leq 2,5 \times 10^{-5}$$

$$b=\frac{1}{1+a_0 z},$$

$$a_0=0,47047, a_1=0,3480242,$$

$$a_2=-0,0958798, a_3=0,7478556$$

$$\operatorname{erfc}(z)=1-\left(a_1 b+a_2 b^2+a_3 b^3+a_4 b^4+a_5 b^5\right) \exp \left[-z^2\right]+\varepsilon(z)$$

$$|\varepsilon(z)| \leq 1,5 \times 10^{-7}$$

$$b=\frac{1}{1+a_0 z},$$

$$a_0=0,3275911, a_1=0,254829592,$$

$$a_2=-0,284496736, a_3=1,421413741,$$

$$a_4=-1,453152027, a_5=1,061405429$$

$$\operatorname{erfc}(z)=1-\frac{1}{\left(1+a_1 z+a_2 z^2+a_3 z^3+a_4 b^4\right)^4}+\varepsilon(z)$$

$$|\varepsilon(z)| \leq 5 \times 10^{-4}$$

$$a_1=0,278393, a_2=0,230389,$$

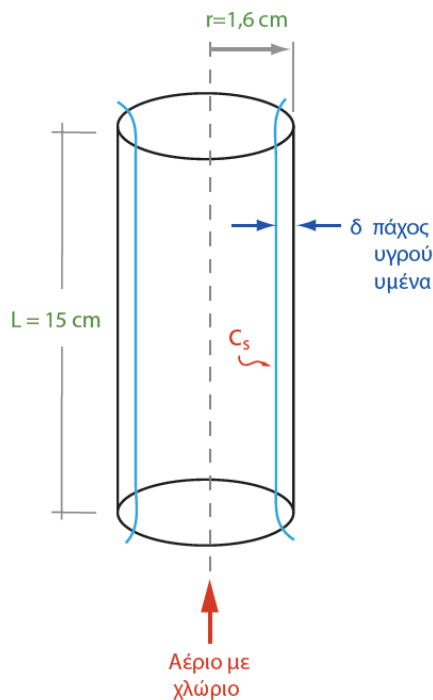
$$a_3=0,000972, a_4=0,078108$$

Αριθμητικές τιμές των συναρτήσεων erf(z) και erfc(z)

z	erf(z)	erfc(z)	z	erf(z)	erfc(z)
0,00	0,000000	1,000000	1,25	0,922900	0,077099
0,05	0,056372	0,943628	1,30	0,934008	0,065992
0,10	0,112463	0,887537	1,35	0,943762	0,056238
0,15	0,167996	0,832004	1,40	0,952285	0,047715
0,20	0,222703	0,777297	1,45	0,959695	0,040305
0,25	0,276326	0,723674	1,50	0,966105	0,033895
0,30	0,328627	0,671373	1,55	0,971624	0,028377
0,35	0,379382	0,620618	1,60	0,976348	0,023652
0,40	0,428392	0,571608	1,65	0,980380	0,019620
0,45	0,475482	0,524518	1,70	0,983790	0,016210
0,50	0,520500	0,479500	1,75	0,986692	0,013308
0,55	0,563323	0,436677	1,80	0,989091	0,010909
0,60	0,603856	0,396144	1,90	0,992790	0,007210
0,65	0,642029	0,357971	2,00	0,995322	0,004678
0,70	0,677801	0,322199	2,10	0,997021	0,002979
0,75	0,711156	0,288844	2,20	0,998137	0,001863
0,80	0,742101	0,257899	2,30	0,998857	0,001143
0,85	0,770668	0,229332	2,40	0,999311	0,000689
0,90	0,796908	0,203092	2,50	0,999593	0,000407
0,95	0,820891	0,179109	2,60	0,999764	0,000236
1,00	0,842701	0,157299	2,70	0,999866	0,000134
1,05	0,862436	0,137564	2,80	0,999925	0,000075
1,10	0,880205	0,119795	2,90	0,999959	0,000041
1,15	0,896124	0,103876	3,00	0,999978	0,000022
1,20	0,910314	0,089686	∞	1,000000	0,000000

Παράδειγμα 4.10

Χλώριο απορροφάται από ένα αέριο σε μια μικρή πειραματική συσκευή ρέοντα υγρού υμένα όπως φαίνεται στο Σχήμα Π4.8. Το ρέον υγρό είναι νερό και κινείται με μέση ταχύτητα $\bar{u}_z = 18 \text{ cm/s}$. Να βρεθεί ο ολικός ρυθμός απορρόφησης του χλωρίου σε mol/hr αν ο συντελεστής διάχυσης είναι $\mathcal{D}_{\text{Cl}_2-\text{H}_2\text{O}} = 1,26 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$, το κλάσμα μάζας του χλωρίου στην επιφάνεια του υδάτινου υμένα στους 16°C είναι $\omega_s = 0,00823 \text{ g Cl}_2/\text{g H}_2\text{O}$, $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 0,998 \text{ g/cm}^3$ και $(\text{M.B.})_{\text{Cl}_2} = 70,91 \text{ g/mol}$. Θεωρήστε ότι στην επιφάνεια του υδάτινου υμένα το χλώριο βρίσκεται σε συγκέντρωση κορεσμού και παραβλέψετε την πιθανή χημική αντίδραση του χλωρίου με το νερό.



Σχήμα Π4.10: Ροή πίπτοντα λεπτού υμένα νερού σε κύλινδρο με εσωτερική ακτίνα $r = 1,6 \text{ cm}$ και μήκος $L = 15 \text{ cm}$, με ταυτόχρονη ανοδική ροή αερίου που περιέχει χλώριο (Τροποποιημένο σχήμα από τους Bird et al. 2002, p. 569).

Λύση:

$$\left. \begin{aligned} W_{\text{Cl}_2} &= S c_s \left(\frac{4 \mathcal{D}_{AB} u_{z,\max}}{\pi L} \right)^{1/2} \\ S &= 2\pi r L \\ \bar{u}_z &= \frac{2}{3} u_{z,\max} \end{aligned} \right\} \Rightarrow W_{\text{Cl}_2} = 2\pi r L c_s \left(\frac{6 \mathcal{D}_{AB} \bar{u}_z}{\pi L} \right)^{1/2} \quad (\text{Π1})$$

Αν η συγκέντρωση του χλωρίου στην επιφάνεια του υδάτινου υμένα είναι ίση με τη συγκέντρωση κορεσμού, τότε:

$$c_s = \omega_s \frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}}}{\text{MB}_{\text{Cl}_2}} \Rightarrow c_s = \left(0,00823 \frac{\text{g Cl}_2}{\text{g H}_2\text{O}} \right) \frac{0,998 \text{ g H}_2\text{O}/\text{cm}^3}{70,91 \text{ g Cl}_2/\text{mol}} = 1,16 \times 10^{-4} \frac{\text{mol Cl}_2}{\text{cm}^3} \quad (\text{Π2})$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (Π1) και (Π2) και αντικαθιστώντας τις τιμές των παραμέτρων υπολογίζεται ο ολικός ρυθμός απορρόφησης του χλωρίου:

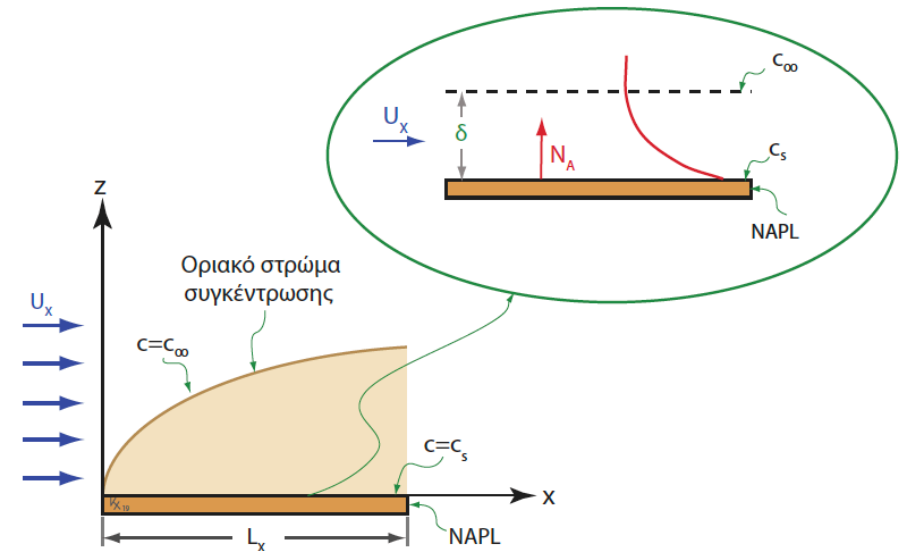
$$\begin{aligned} \Rightarrow W_{\text{Cl}_2} &= 2\pi (1,6 \text{ cm}) (15 \text{ cm}) \left(1,16 \times 10^{-4} \frac{\text{mol Cl}_2}{\text{cm}^3} \right) \left[\frac{6 \left(1,26 \times 10^{-5} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \right) 18 \frac{\text{cm}}{\text{s}}}{\pi (15 \text{ cm})} \right]^{1/2} \\ \Rightarrow W_{\text{Cl}_2} &= \left(9,40 \times 10^{-5} \frac{\text{mol Cl}_2}{\text{s}} \right) \left(3600 \frac{\text{s}}{\text{h}} \right) \\ \Rightarrow W_{\text{Cl}_2} &= 0,34 \frac{\text{mol Cl}_2}{\text{h}} \quad \bullet \end{aligned}$$

Μεταφορά μάζας από κηλίδα NAPL σε δισδιάστατο πορώδες μέσο

Μια μονοδιάστατη κηλίδα NAPL βρίσκεται πάνω σε αδιαπέρατο στρώμα ομογενούς, κορεσμένου με νερό υδροφορέα. Η ροή του νερού είναι παράλληλη της κηλίδας NAPL σε συνθήκες μόνιμης κατάστασης. Η κηλίδα NAPL διαλύεται στην υδατική φάση βάσει της θεωρίας του λεπτού υμένα και σχηματίζει ένα πλούμιο (plume). Η διαλυμένη στο νερό NAPL έχει μέγιστη συγκέντρωση στη διεπιφάνεια NAPL-νερού, c_s [M/L³], και δεν αντιδρά με άλλα συστατικά του νερού ούτε με το στερεό σκελετό του υδροφορέα.

Η μερική διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη μεταφορά της διαλυμένης στο νερό NAPL στο 2-D πορώδες μέσο είναι:

$$U_x \frac{\partial c}{\partial x} = D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_z \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$$



Σχήμα 6.33: Διάχυση κηλίδας NAPL σε δισδιάστατο πορώδες μέσο. Απεικονίζονται το οριακό στρώμα του πλούμιου καθώς και η κατανομή της διαλυμένης στο νερό συγκέντρωσης.

Το φυσικό πρόβλημα απλοποιείται σημαντικά αν θεωρήσουμε ότι η συνεισφορά της συναγωγής είναι πολύ πιο ουσιαστική από τη διάχυση κατά μήκος της ροής και κατ' επέκταση η παραπάνω εξίσωση παίρνει την ακόλουθη απλούστερη μορφή:

$$U_x \frac{\partial c}{\partial x} = D_z \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$$

Οι τρεις απαραίτητες συνοριακές συνθήκες είναι:

$$x = 0 : c = 0$$

$$z = 0 : c = c_s$$

$$z \rightarrow \infty : c = c_{\infty} = 0$$

Η αναλυτική λύση του μαθηματικού προβλήματος έχει βρεθεί από τους Chrysikopoulos et al. (2003):

$$c = c_s \operatorname{erfc} \left[\frac{z}{2} \left(\frac{U_x}{D_z x} \right)^{1/2} \right]$$

Μέσος συντελεστής μεταφοράς μάζας

Εξισώνοντας το ρυθμό μεταφοράς της διαλυμένης στο νερό NAPL όπως ορίζεται με βάση τον πρώτο νόμο του Fick για μοριακή διάχυση σε πορώδη μέσα:

$$(N_A)_z = (J_A)_z = -\theta \mathcal{D}_{AB,e} \left. \frac{\partial c}{\partial z} \right|_{z=0}$$

με το ρυθμό μεταφοράς της διαλυμένης στο νερό NAPL όπως ορίζεται από τη θεωρία του υμένα:

$$(N_A)_z = k_c(x) [c_s - c_\infty]$$

προκύπτει η εξής σχέση:

$$-\theta \mathcal{D}_{AB,e} \left. \frac{\partial c}{\partial z} \right|_{z=0} = k_c(x) [c_s - c_\infty]$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου της erfc:

$$\frac{d}{dz} \text{erfc}(u) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp[-u^2] \frac{du}{dz}$$

βρίσκεται η παράγωγος της συγκέντρωσης:

$$(N_A)_z = +\theta \mathcal{D}_{AB,e} \frac{2c_s}{\sqrt{\pi}} \exp \left\{ -\left[\frac{z}{2} \left(\frac{U_x}{D_z x} \right)^{1/2} \right]^2 \right\} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{U_x}{D_z x} \right)^{1/2} \right]_{z=0}$$

$$\Rightarrow (N_A)_z = c_s \theta \mathcal{D}_{AB,e} \left(\frac{U_x}{\pi D_z x} \right)^{1/2}$$

$$c_s \theta \mathcal{D}_{AB,e} \left(\frac{U_x}{\pi D_z x} \right)^{1/2} = k_c(x) [c_s - c_\infty]$$

$$\Rightarrow k_c(x) = \theta \mathcal{D}_{AB,e} \left(\frac{U_x}{\pi D_z x} \right)^{1/2}$$

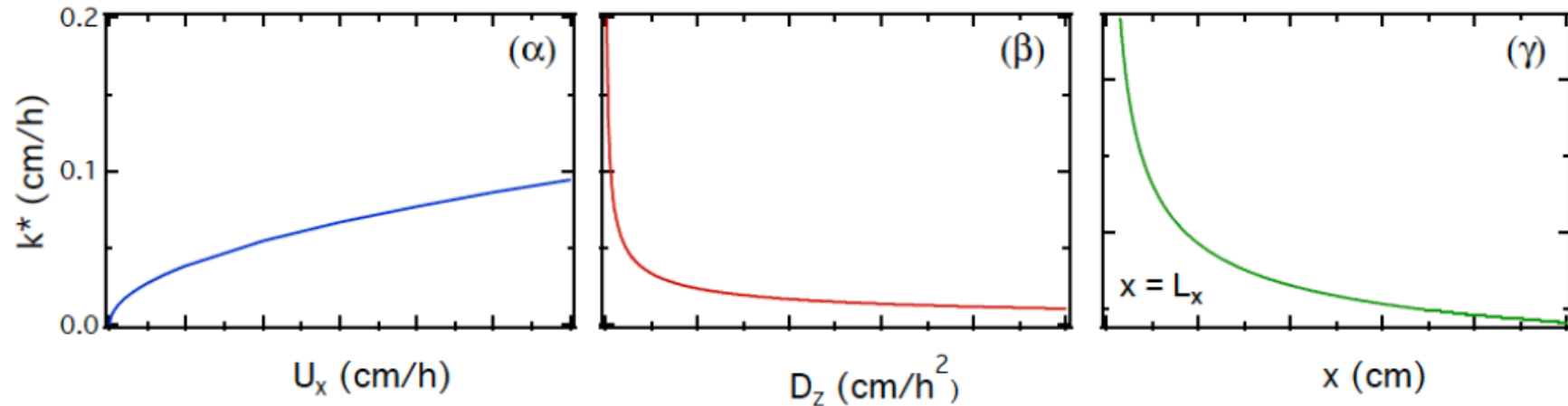
Ο μέσος (ανεξάρτητος του χώρου) συντελεστής μεταφοράς μάζας με συναγωγή, k^* [L/t], βρίσκεται ολοκληρώνοντας ως προς το μήκος της μονοδιάστατης κηλίδας NAPL ως εξής:

$$k^* = \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} k_c(x) dx = \frac{\theta \mathcal{D}_{AB,e}}{L_x} \int_0^{L_x} \left(\frac{U_x}{\pi D_z x} \right)^{1/2} dx$$

$$\Rightarrow k^* = \frac{2\theta \mathcal{D}_{AB,e}}{L_x} \left(\frac{U_x x}{\pi D_z} \right)^{1/2} \bigg|_0^{L_x}$$

$$\Rightarrow k^* = 2\theta \mathcal{D}_{AB,e} \left(\frac{U_x}{\pi D_z L_x} \right)^{1/2}$$

Όπως φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα α, ο k^* είναι ανάλογος της ενδοπορώδους ταχύτητας του νερού. Αυτή η συμπεριφορά αποδίδεται στην αύξηση της κλίσης συγκέντρωσης στη διεπιφάνεια NAPL-νερού με την αύξηση της ενδοπορώδους ταχύτητας του νερού. Το Σχήμα β δείχνει ότι ο k^* μειώνεται εκθετικά με την αύξηση του D_z . Η κατακόρυφη εξάπλωση της διαλυμένης στο νερό ουσίας από τη διεπιφάνεια NAPL-νερού οδηγεί σε μικρότερες βαθμίδες συγκέντρωσης και κατά συνέπεια σε μικρότερο k^* . Στο Σχήμα γ ο k^* μειώνεται εκθετικά με την αύξηση του μήκους της μονοδιάστατης κηλίδας NAPL. Αυτή η συμπεριφορά είναι αναμενόμενη επειδή ο k^* αντιπροσωπεύει το ολοκλήρωμα του χωρικά μεταβαλλόμενου συντελεστή μεταφοράς μάζας $k_c(x)$, σε ολόκληρη τη διεπιφάνεια NAPL-νερού. Πρέπει να σημειωθεί ότι ο $k_c(x)$ μειώνεται με την απόσταση από το ανάντη άκρο της μονοδιάστατης κηλίδας NAPL όπου και έχει τη μέγιστη τιμή.



Πάχος οριακού στρώματος

Το πάχος του οριακού στρώματος συγκέντρωσης δ_c [L] ορίζεται ως η απόσταση από τη διεπιφάνεια NAPL-νερού, όπου η συγκέντρωση της διαλυμένης ουσίας στην υδατική φάση είναι 1% της διαλυτότητας του NAPL:

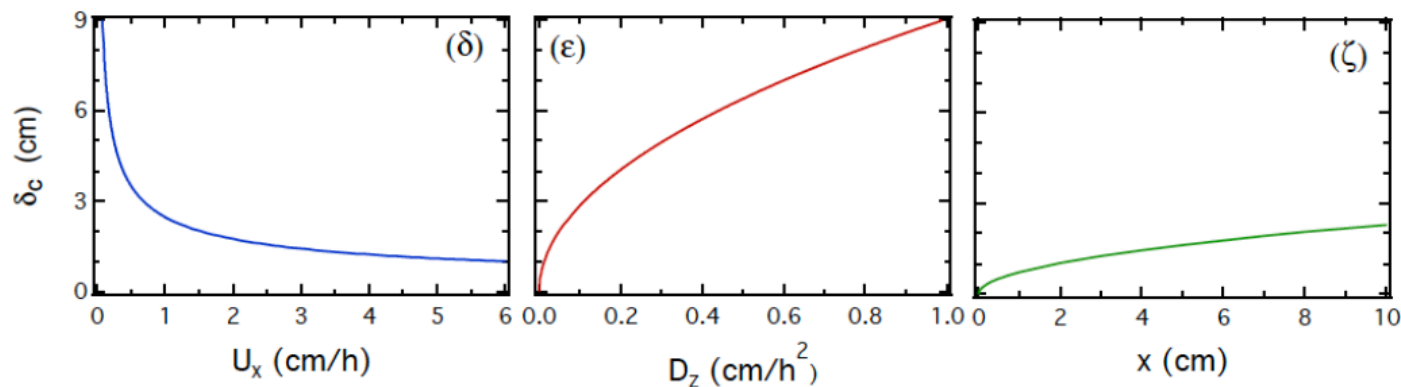
$$c = 0,01c_s$$

Χρησιμοποιώντας την αναλυτική λύση προκύπτει:

$$0,01 = \operatorname{erfc} \left[\frac{\delta_c}{2} \left(\frac{U_x}{D_z x} \right)^{1/2} \right] = 1 - \operatorname{erf} \left[\frac{\delta_c}{2} \left(\frac{U_x}{D_z x} \right)^{1/2} \right]$$

$$\frac{\delta_c}{2} \left(\frac{U_x}{D_z x} \right)^{1/2} = 1,82 \approx 2 \quad \Rightarrow \quad \delta_c \approx 4 \left(\frac{D_z x}{U_x} \right)^{1/2}$$

Η συμπεριφορά του πάχους του οριακού στρώματος συγκέντρωσης (δ_c), ως συνάρτηση των δύο παραμέτρων μεταφοράς (U_x και D_z) απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Το δ_c μειώνεται με την αύξηση της ενδοπορώδους ταχύτητας (U_x) (Σχήμα δ). Αυτό συμβαίνει επειδή όσο αυξάνεται, η U_x προκαλεί μεγαλύτερες βαθμίδες συγκέντρωσης στη διεπιφάνεια NAPL-νερού. Το δ_c αυξάνεται με την αύξηση του D_z (Σχήμα ε) λόγω της κατακόρυφης εξάπλωσης της διαλυμένης στην υδατική φάση ουσίας. Τέλος, το δ_c αυξάνεται σταθερά όσο μεγαλώνει η διαμήκης απόσταση από το ανάντη άκρο της μονοδιάστατης κηλίδας NAPL (Σχήμα ζ). Αυτό αποδίδεται στην προοδευτική διασπορά της διαλυμένης ουσίας καθώς μεταφέρεται στο πορώδες μέσο.



Παράδειγμα 6.8

Στον πυθμένα ενός περιορισμένου υπόγειου υδροφορέα υπάρχει μια πυκνότερη από το νερό κηλίδα NAPL. Σε απόσταση 100 m κατάντη της κηλίδας, υπάρχει μια γεώτρηση παρατήρησης της οποίας το κάτω άκρο απέχει 0,55 m από την κάτω αδιαπέρατη επιφάνεια (πέτρωμα) του υδροφορέα. Η γεώτρηση αυτή θα χρησιμοποιηθεί για την παρακολούθηση του πλούμιου που έχει δημιουργηθεί από την κηλίδα NAPL η οποία διαλύεται στο υπόγειο νερό. Θεωρήστε ότι ο υδροφορέας είναι δισδιάστατος και ομογενής, η ενδοπορώδης ταχύτητα με κατεύθυνση προς την γεώτρηση παρατήρησης είναι $U=4,9$ m/d και ο συντελεστής κατακόρυφης υδροδυναμικής διασποράς είναι $D_z=0,008$ m²/d. Να εξετάσετε αν τα δείγματα υπόγειου νερού που θα συλλέγονται από την γεώτρηση παρατήρησης θα είναι αντιπροσωπευτικά της συγκέντρωσης της διαλυμένης NAPL που μεταφέρεται με την υπόγεια ροή του υδροφορέα.

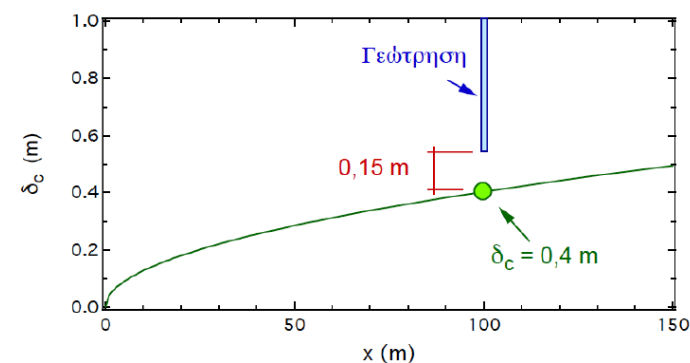
Λύση:

Για να βρεθεί το αν η γεώτρηση παρατήρησης θα συλλέγει αντιπροσωπευτικό δείγμα νερού θα πρέπει να υπολογιστεί το πάχος του οριακού στρώματος του πλούμιου που έχει δημιουργηθεί από τη διαλυμένη NAPL. Χρησιμοποιώντας την αναλυτική έκφραση για το οριακό στρώμα συναρτήσει της απόστασης x (βλέπε Σχήμα Π6.8), το οποίο στο $x=100$ m είναι:

$$\delta_c \approx 4 \left(\frac{D_z x}{U_x} \right)^{1/2} = 4 \left[\frac{(0,008 \text{ m}^2/\text{d})(100 \text{ m})}{4,9 \text{ m/d}} \right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow \delta_c = 0,40 \text{ m}$$

Το οριακό στρώμα της διαλυμένης NAPL συγκέντρωσης στο νερό είναι χαμηλότερο κατά $0,55-0,40=0,15$ m από το ύψος που βρίσκεται το κάτω άκρο της γεώτρησης παρατήρησης. Επομένως, τα δείγματα υπόγειου νερού που θα συλλέγονται από τη γεώτρηση παρατήρησης δεν θα περιέχουν την διαλυμένη ουσία.



Σχήμα Π6.8: Οριακό στρώμα του οποίου το πάχος στο $x=100$ m είναι κατά 0,15 m χαμηλότερο του κάτω άκρου της γεώτρησης παρατήρησης.