

# ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΜΑΖΑΣ

Μάθημα 10

# Μεταφορά Θερμότητας

## Μηχανισμοί Μεταφοράς Θερμότητας

Οι τρεις βασικοί μηχανισμοί μεταφοράς θερμότητας είναι οι εξής:

- (1) Αγωγή
- (2) Συναγωγή
  - (α) Εξαναγκασμένη συναγωγή
  - (β) Ελεύθερη συναγωγή
- (3) Ακτινοβολία

Συνήθως συνυπάρχουν δύο από του μηχανισμούς μεταφοράς θερμότητας. Πολύ σπάνια θα υπάρξει μόνο ένας μηχανισμός.

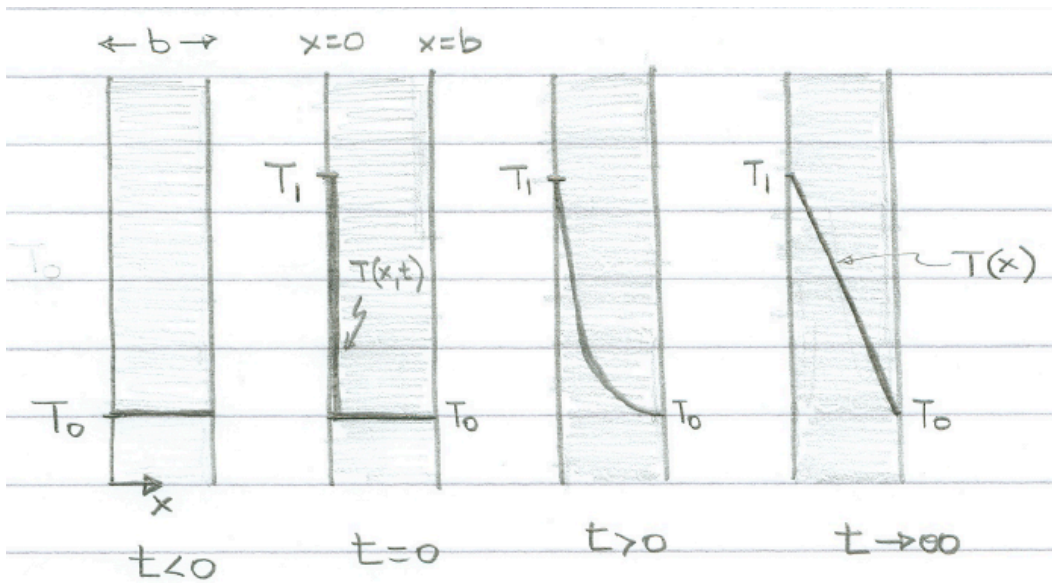
## Μεταφορά με αγωγή

Θερμότητα μεταφέρεται εξαιτίας κάποιας θερμοκρασιακής διαφοράς, δίχως την ύπαρξη μακροσκοπικής μεταφοράς μάζας. **Η θερμότητα μεταδίδεται με μοριακή διάχυση.** Θερμά μόρια (ή άτομα) κατέχουν υψηλή θερμική ενέργεια και εκδηλώνουν έντονες θερμικές κινήσεις. Όταν ένα θερμό μόριο βρεθεί δίπλα σε ένα ψυχρό μόριο, τότε ένα μέρος της θερμικής ενέργειας μεταφέρεται από το θερμό στο ψυχρό μόριο. Στην περίπτωση των **στερεών** η αγωγή θερμότητας οφείλεται στην ύπαρξη **ελεύθερων ηλεκτρονίων**.

Αγωγή ισχύει και σε ρευστά (υγρά ή αέρια). Βέβαια η θερμική αγωγιμότητα των διαφόρων υλικών αυξάνει κατά την ακόλουθη σειρά: **αέρια, υγρά, μη μεταλλικά στερεά, μέταλλα.** Επομένως **μονωτικά υλικά** είναι συνήθως πορώδη υλικά, όπως αφρώδη συνθετικά και πλεγμάτων ινών, τα οποία είναι ικανά να παγιδεύουν αέρια ώστε να περιορίζεται η μεταφορά θερμότητας με τον μηχανισμό της αγωγής. Σε αυτό ακριβώς το σκεπτικό βασίζεται και η λειτουργία των παραθύρων με διπλά τζάμια, τα οποία χωρίζονται από ένα μικρό κενό με στάσιμο αέρα.

## Νόμος του Fourier

Αν ένα επίπεδο τοίχωμα (ομοιογενές και ισότροπο) πάχους  $b$  βρίσκεται σε θερμοκρασία  $T=T_0$  και ξαφνικά η επιφάνεια  $x=0$  θερμαίνεται απότομα σε  $T=T_1$  =σταθερή. Θερμότητα μεταφέρεται με αγωγή προς την κατεύθυνση  $x$  και η κατανομή της θερμοκρασίας  $T(x,t)$  εξελίσσεται ως εξής:



Τελικά καθώς  $t \rightarrow \infty$  η κατανομή της θερμοκρασίας καταλήγει στη σταθερή κατανομή  $T(x)$ .

Η **ροή θερμότητας**,  $q_x$ , σε μόνιμη κατάσταση δίνεται από τη σχέση:

$$q_x = -k \frac{\Delta T}{\Delta x} = -k \frac{T_1 - T_0}{b} \left[ \frac{W}{m^2} \right]$$

όπου:

$$k \left[ \frac{W}{m \cdot K} \right] \text{ ή } \left[ \frac{Joule}{m \cdot s \cdot K} \right] \text{ ή } \left[ \frac{cal}{cm \cdot s \cdot ^\circ C} \right] \text{ ή } \left[ \frac{Btu}{ft \cdot hr \cdot ^\circ F} \right]$$

είναι ο **συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας** και εξαρτάται μόνο από το υλικό και τη μέση θερμοκρασία του τοιχώματος.

Ο **Νόμος του Fourier σε διαφορική μορφή** γράφεται:

$$q_x = -k \frac{dT}{dx}$$

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (\text{σε τρεις διαστάσεις})$$

## Ο Νόμος του Fourier σε διάφορα συστήματα συντεταγμένων

### Καρτεσιανό

$$q_x = -k \frac{dT}{dx}$$

$$q_y = -k \frac{dT}{dy}$$

$$q_z = -k \frac{dT}{dz}$$

### Κυλινδρικό

$$q_r = -k \frac{dT}{dr}$$

$$q_\theta = -k \frac{1}{r} \frac{dT}{d\theta}$$

$$q_z = -k \frac{dT}{dz}$$

### Σφαιρικό

$$q_r = -k \frac{dT}{dr}$$

$$q_\theta = -k \frac{1}{r} \frac{dT}{d\theta}$$

$$q_\phi = -k \frac{1}{r \sin \theta} \frac{dT}{d\phi}$$

Για ανισότροπα υλικά ο **Νόμος του Fourier** γενικεύεται ως εξής:

$$\mathbf{q} = -\underline{\mathbf{k}} \cdot \nabla T$$

Όπου  $\underline{\mathbf{k}}$  είναι ένας τανυστής δεύτερης τάξης:

$$\underline{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{pmatrix}$$

Ο **ρυθμός μεταφοράς θερμότητας** ορίζεται ως το σύνολο της θερμότητας που μεταφέρεται ανά μονάδα χρόνου και συνολική επιφάνεια A:

$$Q_x = q_x A = -Ak \frac{dT}{dx} \quad [W] \quad \text{ή} \quad \left[ \frac{J}{s} \right]$$

## Μεταφορά με συναγωγή

Μεταφορά θερμότητας με μηχανισμό συναγωγής εμφανίζεται όταν η **θερμική ενέργεια μεταδίδεται λόγω ροής**. Όταν η ταχύτητα ροής είναι ουσιαστική, η μεταφορά θερμότητας στην κατεύθυνση ροής λόγω συναγωγής είναι πολύ πιο αποτελεσματική από την αγωγή αν συνυπάρχει. Όταν το ρευστό κινείται λόγω επιβολής εξωτερικών αιτιών (π.χ. με μια αντλία), τότε υπάρχει **εξαναγκασμένη συναγωγή**. Αν η κίνηση του ρευστού οφείλεται αποκλειστικά σε διαφορά πυκνότητας ανάμεσα σε περιοχές διαφορετικής θερμοκρασίας με αποτέλεσμα την ύπαρξη άνωσης, τότε έχουμε **ελεύθερη ή φυσική συναγωγή**.

Ο μηχανισμός της συναγωγής είναι **σημαντικός** και ο μηχανισμός αγωγής **αμελητέος** κατά τη διεύθυνση στρωτής ροής (εκτός αν το ρευστό είναι μεταλλικό) ενώ εγκάρσια της κατεύθυνσης ροής ο κυρίαρχος μηχανισμός μεταφοράς θερμότητας είναι η αγωγή. Βέβαια, σε τυρβώδη ροή υπάρχει έντονη ανάμιξη τόσο στην κατεύθυνση ροής όσο και κάθετα προς τη μέση κίνηση, με αποτέλεσμα ο μηχανισμός συναγωγής να είναι κυρίαρχος σε όλες τις κατευθύνσεις.

## Νόμος ψύξης του Newton

Ο **ρυθμός μεταφοράς θερμότητας με συναγωγή** μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της διαφοράς θερμοκρασίας:

$$q = h(T_s - T_\infty) \left[ \frac{W}{m^2} \right]$$

όπου  $T_s$  = θερμοκρασία επιφάνειας

$T_\infty$  = θερμοκρασία ρευστού

$h$  = συντελεστής συναγωγής  $\left[ \frac{W}{m^2 K} \right]$

Ο **συνολικός ρυθμός μεταφοράς θερμότητας** από επιφάνεια εμβαδού  $A$  στο ρευστό υπολογίζεται από:

$$Q = hA(T_s - T_\infty) \quad [W]$$

## Μεταφορά με ακτινοβολία

Η ακτινοβολία διαφέρει ριζικά από την αγωγή και συναγωγή γιατί δεν απαιτεί τη μεσολάβηση ύλης. Αντίθετα, η ακτινοβολία παρεμποδίζεται μέσα σε ύλη, και είναι πλέον αποτελεσματική στο απόλυτο κενό. Θερμική ακτινοβολία εκπέμπεται και απορροφάται από όλα τα στερεά σώματα (επίσης υγρά και ορισμένα αέρια), σε όποια θερμοκρασία κι αν βρίσκονται. Η ενέργεια του ήλιου φτάνει στη γη μέσω ακτινοβολίας.

Η **μέγιστη θερμική ισχύς** που είναι δυνατό να ακτινοβολεί ένα σώμα ανά μονάδα επιφάνειας δίνεται από το **νόμο των Stefan-Boltzmann**:

$$q_b = \sigma T^4 \left[ \frac{W}{m^2} \right]$$

και η **ολική θερμική ισχύς** που εκπέμπει μια επιφάνεια με εμβαδόν Α είναι:

$$Q_b = A \sigma T^4 \quad [W]$$

όπου  $\sigma$  είναι η σταθερά των **Stefan-Boltzmann**:

$$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

Ένα σώμα που εκπέμπει τη μέγιστη δυνατή θερμική ισχύ ονομάζεται **μέλαν σώμα** και συμβολίζεται με τον δείκτη “b”.

Συνήθως, η θερμική ισχύς που ακτινοβολεί μια επιφάνεια είναι μικρότερη από αυτή του μέλανος σώματος και δίνεται από τη σχέση:

$$q_{rad} = \varepsilon \sigma T^4 \left[ \frac{W}{m^2} \right]$$

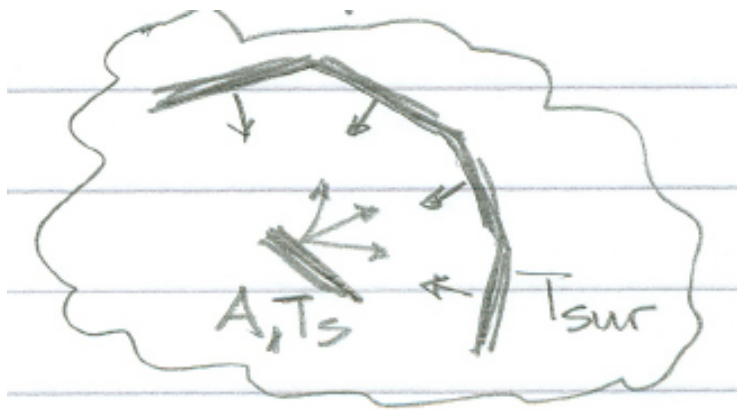
όπου  $0 < \varepsilon < 1$  είναι ο **συντελεστής εκπομπής**, και εκφράζει την απόδοση σε θερμική εκπομπή της επιφάνειας σε σχέση με την εκπομπή του μέλανος σώματος:

$$\varepsilon = \frac{q}{q_{rad}}$$

Σε **πρακτικές εφαρμογές** το ζητούμενο είναι η διαφορά μεταξύ της ακτινοβολίας που εκπέμπει ένα σώμα και εκείνης που απορροφά:

$$Q_{rad} = A\sigma(T_s^4 - T_{sur}^4) \quad [W]$$

όπου  $T_{sur}$  είναι η θερμοκρασία του περιβάλλοντος χώρου.



Η ίδια επιφάνεια μπορεί ταυτόχρονα να ανταλλάσσει θερμότητα και με μηχανισμό συναγωγής. Τότε οι μηχανισμοί μεταφοράς με **συναγωγή και ακτινοβολία** δρουν παράλληλα:

$$Q = Q_{rad} + Q_{conv} = A\sigma(T_s^4 - T_{sur}^4) + hA(T_s - T_{\infty})$$

$$= h_r A(T_s - T_{sur}) + hA(T_s - T_{\infty})$$

όπου

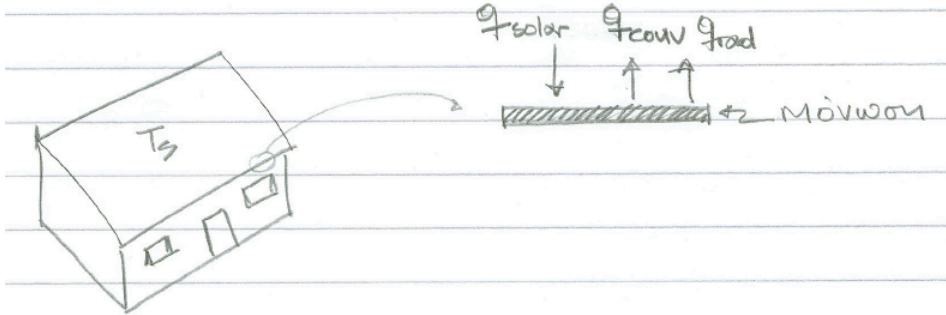
$$h_r \equiv \sigma(T_s^2 + T_{sur}^2)(T_s + T_{sur})$$

είναι ένας **πλασματικός συντελεστής μεταφοράς με ακτινοβολία**, αντίστοιχος του συντελεστή συναγωγής  $h$ .

### Παράδειγμα:

Ένα κτήριο έχει μια μαύρη οριζόντια οροφή με μονωμένη την εσωτερική της επιφάνεια. Η εξωτερική επιφάνεια εκτίθεται σε αέρα θερμοκρασίας  $T_\alpha=25^\circ\text{C}$  και **συντελεστή συναγωγής**  $h=10\text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ . Ζητείται η θερμοκρασία της οροφής  $T_s$ , για: (α) μια ηλιόλουστη ημέρα χωρίς σύννεφα όπου η **προσπίπτουσα ηλιακή ακτινοβολία** είναι  $q_{\text{solar}}=300\text{ W}/\text{m}^2$  και η **θερμοκρασία του ουρανού** είναι  $T_{\text{sky}}=15^\circ\text{C}$ , (β) μια νύχτα χωρίς σύννεφα όπου  $T_{\text{sky}}=15^\circ\text{C}$ .

### Λύση:



$$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4}$$

Ισοζύγιο ενέργειας:

| Ηλιακή               | Συναγωγή            | Ακτινοβολία      |
|----------------------|---------------------|------------------|
| $Q_{\text{solar}} =$ | $Q_{\text{conv}} +$ | $Q_{\text{rad}}$ |

$$\Rightarrow q_{\text{solar}}A = q_{\text{conv}}A + q_{\text{rad}}A$$

$$\Rightarrow q_{\text{solar}} = h(T_s - T_\infty) + \sigma(T_s^4 - T_{\text{sky}}^4)$$

$$(\alpha) 300 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} (T_s - (273 + 25))\text{K} + 5,67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4} (T_s^4 - (273 + 15)^4)$$

$$\Rightarrow T_s = 312,9\text{K} \Rightarrow T_s = 39,9^\circ\text{C}$$

(β) Κατά τη διάρκεια της νύκτας  $q_{\text{solar}} = 0$

$$0 = 10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} (T_s - (273 + 25))\text{K} + 5,67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4} (T_s^4 - (273 + 15)^4)$$

$$\Rightarrow T_s = 294,6\text{K} \Rightarrow T_s = 21,6^\circ\text{C}$$

Η θερμοκρασία τη νύχτα είναι μικρότερη αυτής του αέρα, άρα θερμότητα μεταφέρεται με συναγωγή από τον αέρα στην οροφή.

## Μονοδιάστατη Αγωγή σε Μόνιμη Κατάσταση

Η **εξίσωση διατήρησης της ενέργειας** σε μόνιμη κατάσταση και δίχως παραγωγή θερμότητας, απλοποιείται στη μορφή εξίσωσης **Laplace**:

Καρτεσιανές συντεταγμένες:  
(αγωγή κατά  $x$ )

$$\nabla^2 T = 0$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

Κυλινδρικές συντεταγμένες:  
(αγωγή κατά  $r$ )

$$\frac{d}{dr} r \frac{dT}{dr} = 0$$

Σφαιρικές συντεταγμένες:  
(αγωγή κατά  $r$ )

$$\frac{d}{dr} r^2 \frac{dT}{dr} = 0$$

Επίλυση των παραπάνω εξισώσεων με τις κατάλληλες οριακές συνθήκες δίνει την κατανομή της θερμοκρασίας στον εξεταζόμενο όγκο ελέγχου. Η **ροή** και ο **ρυθμός μεταφοράς** θερμότητας υπολογίζονται από το **νόμο του Fourier**:

Καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$q = -k \frac{dT}{dx}$$

$$Q = -kA \frac{dT}{dx}$$

Κυλινδρικές ή σφαιρικές συντεταγμένες:

$$q = -k \frac{dT}{dr}$$

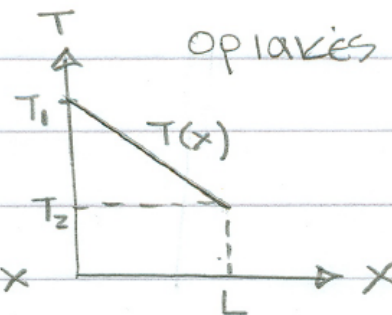
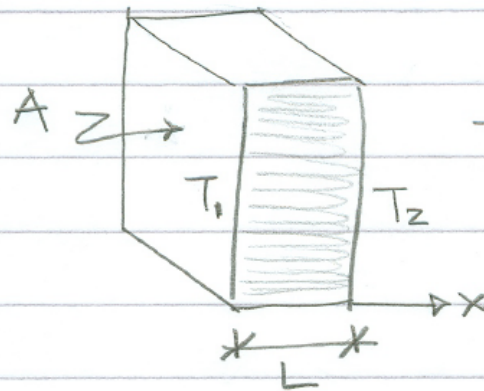
$$Q = -kA \frac{dT}{dr}$$

Ροή  $\left[ \frac{W}{m^2} \right]$

Ρυθμός μεταφοράς  $[W]$  ή  $\left[ \frac{J}{s} \right]$

## Αγωγή σε επίπεδο τοίχωμα

$$(1) \Rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = C_1 \Rightarrow T(x) = C_1 x + C_2$$



οριακές συνθήκες:  $T(0) = T_1$

$$T(L) = T_2$$

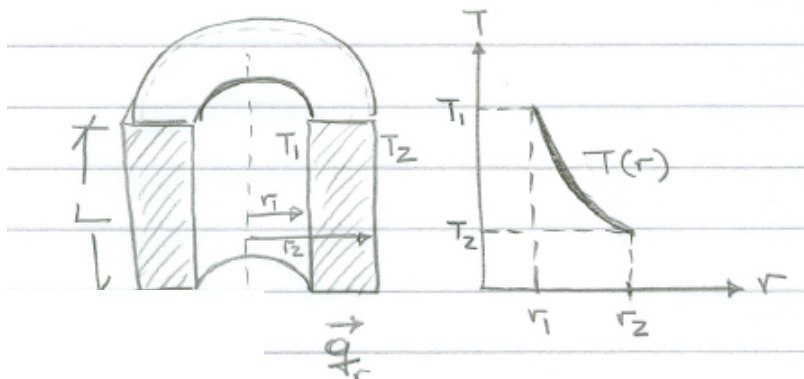
$$C_2 = T_1$$

$$C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

$$\therefore \boxed{T(x) = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{x}{L}}$$

$$Q = -kA \frac{dT}{dx} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{dT}{dx} = \frac{T_1 - T_2}{L} \end{array} \right\} \boxed{Q = kA \frac{(T_1 - T_2)}{L}}$$

## Αγωγή σε κυλινδρικό τοίχωμα



$$\frac{d}{dr} r \frac{dT}{dr} = 0 \Rightarrow r \frac{dT}{dr} = C_1$$

$$\Rightarrow T(r) = C_1 \ln(r) + C_2 \quad (1)$$

Οριακές συνθήκες:

$$T(r_1) = T_1 \quad (2)$$

$$T(r_2) = T_2 \quad (3)$$

$$2) \rightarrow (1) \quad T_1 = C_1 \ln(r_1) + C_2 \Rightarrow C_2 = T_1 - C_1 \ln(r_1) \quad (4)$$

$$3) \rightarrow (1) \quad T_2 = C_1 \ln(r_2) + C_2 \Rightarrow T_2 = C_1 \ln(r_2) + T_1 - C_1 \ln(r_1) \Rightarrow C_1 (\ln(r_2) - \ln(r_1)) = T_2 - T_1$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{T_2 - T_1}{\ln(r_2 / r_1)} \quad (5)$$

$$(5) \rightarrow (4) \quad C_2 = T_1 - \frac{T_2 - T_1}{\ln(r_2 / r_1)} \ln(r_1) \quad (6)$$

$$(5) \& (6) \rightarrow (1) \quad T(r) = -\frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2 / r_1)} \ln(r) + T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2 / r_1)} \ln(r_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{T(r) = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{\ln(r / r_1)}{\ln(r_2 / r_1)}} \quad (7)$$

Η ροή θερμότητας βρίσκεται ως εξής:

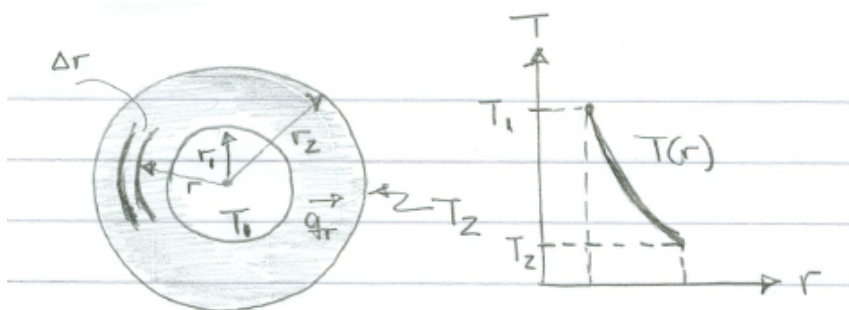
$$q = -k \frac{dT}{dr} \quad (7) \rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{(T_1 - T_2)}{(r / r_1)} \frac{(1 / r_1)}{\ln(r_2 / r_1)} = -\frac{(T_1 - T_2)}{r \ln(r_2 / r_1)}$$

$$\left. \vphantom{\frac{dT}{dr}} \right\} \boxed{q = + \frac{k(T_1 - T_2)}{r \ln(r_2 / r_1)}}$$

και ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας:

$$Q = Aq = +(2\pi r L) \frac{k(T_1 - T_2)}{r \ln(r_2 / r_1)} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{2\pi L k (T_1 - T_2)}{\ln(r_2 / r_1)}}$$

## Αγωγή σε σφαιρικό τοίχωμα



**Εναλλακτική ανάλυση αγωγής:** όση ενέργεια εισέρχεται με αγωγή στη θέση  $r$ , τόση εξέρχεται με αγωγή στη θέση  $r+\Delta r$  για συνθήκες μόνιμης κατάστασης, δίχως παραγωγή θερμότητας και σταθερό  $k$ .

**Ισοζύγιο ενέργειας:**  $Q_r|_r - Q_r|_{r+\Delta r} = 0 \quad \forall r_1 \leq r \leq r_2$

$$(1) \rightarrow Q_r \int_{r_1}^r \frac{dr}{r^2} = - \int_{T_1}^T 4\pi k dT \Rightarrow Q_r \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) = -4\pi k (T - T_1) \Rightarrow T(r) = T_1 - \frac{Q_r}{4\pi k} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} Q_r = -kA \frac{dT}{dr} \\ A = 4\pi r^2 \end{array} \right\} \quad Q_r = -k4\pi r^2 \frac{dT}{dr} \quad (1)$$

$$T(r_1) = T_1$$

$$T(r_2) = T_2$$

$$(2) \rightarrow (3) \Rightarrow T(r) = T_1 - \frac{(T_1 - T_2)}{\left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right)$$

$$(1) \rightarrow Q_r \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = - \int_{T_1}^{T_2} 4\pi k dT \Rightarrow Q_r \left( -\frac{1}{r^2} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = -4\pi k (T_2 - T_1)$$

**Κατανομή  
Θερμοκρασίας:**

$\Rightarrow$

$$T(r) = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{\left( 1 - \frac{r_1}{r} \right)}{\left( 1 - \frac{r_1}{r_2} \right)}$$

**Ρυθμός  
μεταφοράς  
ενέργειας:**

$\Rightarrow$

$$Q_r = \frac{4\pi k (T_1 - T_2)}{\left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \quad (2)$$

$$q_r = \frac{Q_r}{A} = \frac{4\pi k (T_1 - T_2)}{\left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \frac{1}{4\pi r^2} \Rightarrow$$

$$q_r = \frac{k (T_1 - T_2)}{r^2 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}$$

**Ροή  
Θερμότητας:**

## Στερεό μεταβαλλόμενης αγωγιμότητας

Ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας μεταβάλλεται σχεδόν πάντοτε με τη θερμοκρασία.

Όταν οι θερμοκρασιακές μεταβολές είναι μικρές, τότε το  $k$  μπορεί να θεωρηθεί σταθερό. Αν οι διαφορές είναι σημαντικές τότε το  $k$  προσεγγίζεται από ένα πολυώνυμο (1<sup>ου</sup> ή 2<sup>ου</sup> βαθμού):

$$k(T) = k_0(1 + \alpha T + \beta T^2)$$

$$\left. \begin{array}{l} Q_x = -kA \frac{dT}{dx} = \text{σταθερό} \\ T(x_1) = T_1 \\ T(x_2) = T_2 \end{array} \right\} \quad Q_x \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{A} = - \int_{T_1}^{T_2} k(T) dT$$

$$\Rightarrow Q_x \left( \frac{x_2 - x_1}{A} \right) = - \int_{T_1}^{T_2} k_0(1 + \alpha T + \beta T^2) dT$$

$$\Rightarrow \boxed{Q_x = \frac{Ak_0}{x_2 - x_1} \left[ T_1 - T_2 + \alpha \frac{T_1^2 - T_2^2}{2} + \beta \frac{T_1^3 - T_2^3}{3} \right]} \quad (1)$$

Μέση τιμή του  $k$

$$\bar{k} = \frac{\int_{T_1}^{T_2} k(T) dT}{T_2 - T_1} = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} k_0(1 + \alpha T + \beta T^2) dT$$

$$\Rightarrow \bar{k} = \frac{k_0}{T_2 - T_1} \left[ T_2 - T_1 + \alpha \frac{T_2^2 - T_1^2}{2} + \beta \frac{T_2^3 - T_1^3}{3} \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{k} = k_0 \left[ 1 + \frac{\alpha}{2}(T_1 + T_2) + \frac{\beta}{3}(T_1^2 + T_1 T_2 + T_2^2) \right]}$$

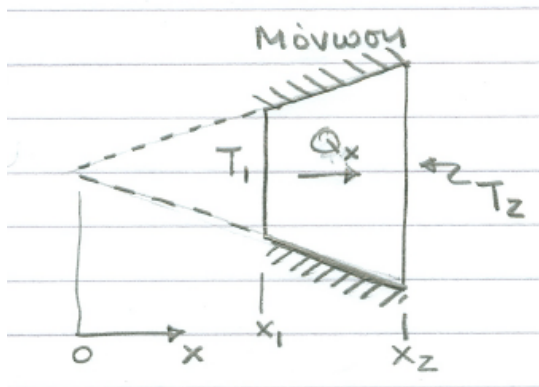
Οπότε αντί της (1) μπορεί να χρησιμοποιηθεί η:

$$\boxed{Q_x = \bar{k} A \frac{T_1 - T_2}{x_2 - x_1}}$$

## Στερεό μεταβαλλόμενης διατομής

Όταν η διαδρομή μέσω της οποίας μεταφέρεται η θερμότητα δεν είναι σταθερή, ίσως να είναι δυνατόν να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα.

Για παράδειγμα θεωρήστε ένα κωνικό μεταλλικό αντικείμενο που έχει μονωμένη την πλευρική του επιφάνεια ενώ η διάμετρος  $d$  της κυκλικής επιφάνειας μεταβάλλεται γραμμικά με το  $x$ .



$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -kA(x) \frac{dT}{dx} \\ A(x) &= \frac{\pi d(x)^2}{4} \\ \text{διάμετρος: } d(x) &= ax \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow Q_x = -k \frac{\pi (ax)^2}{4} \frac{dT}{dx}$$

$$\Rightarrow Q_x \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^2} = -k \frac{\pi a^2}{4} \int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$\Rightarrow Q_x \left( -\frac{1}{x} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} = -k \frac{\pi a^2}{4} (T_2 - T_1)$$

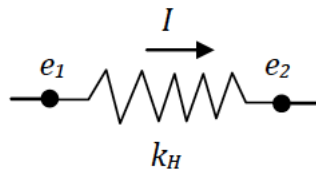
$$\Rightarrow Q_x \left( \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) = Q_x \left( \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \right) = -k \frac{\pi a^2}{4} (T_2 - T_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{Q_x = + \frac{k \pi a^2}{4} \frac{x_1 x_2}{x_2 - x_1} (T_1 - T_2)}$$

## Θερμικές αντιστάσεις & κυκλώματα

Για τη **ροή ηλεκτρικού ρεύματος** μέσα από αντίσταση  $R_H$  ισχύει ο **νόμος του Ohm**:

$$I = \frac{e_1 - e_2}{R_H}$$



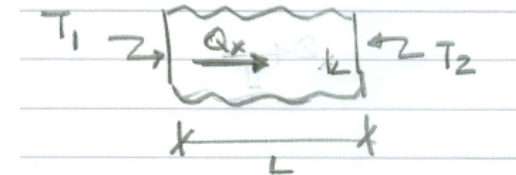
$I$ : ένταση ηλεκτρικού ρεύματος [Ampere]

$e_1 - e_2$ : διαφορά τάσης [Volt]

$R_H$ : ηλεκτρική αντίσταση [ $\Omega$ ]

$k_H$ : ηλεκτρική αγωγιμότητα [ $S = \Omega^{-1}$ ]

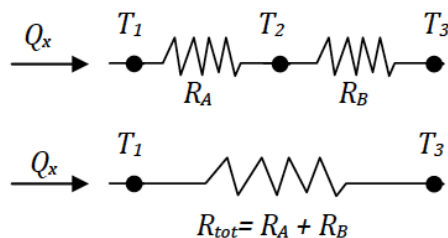
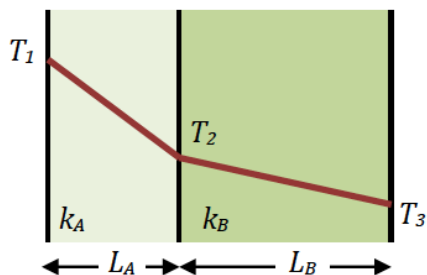
Αντίστοιχα στην αγωγή θερμότητας:



$$Q_x = \frac{T_1 - T_2}{R_{\Theta}}$$

όπου  $R_{\Theta} = \frac{L}{kA}$  η θερμική αντίσταση

## Άθροιση αντιστάσεων αγωγής σε σειρά

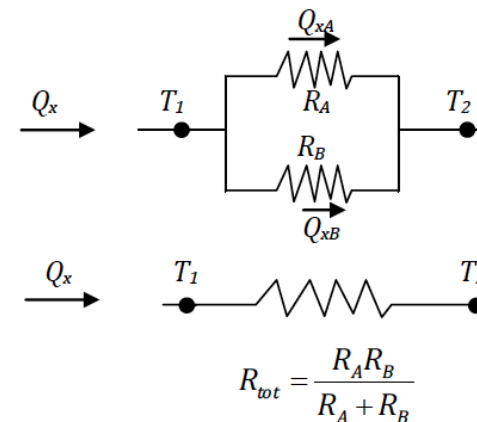
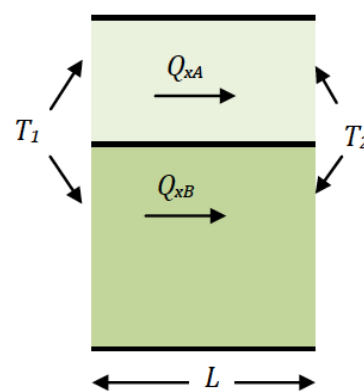


$$Q_x = kA \frac{T_1 - T_2}{L_A} = \frac{T_1 - T_2}{R_A} \Rightarrow T_1 - T_2 = Q_x R_A \quad (1)$$

$$Q_x = kA \frac{T_2 - T_3}{L_B} = \frac{T_2 - T_3}{R_B} \Rightarrow T_2 - T_3 = Q_x R_B \quad (2)$$

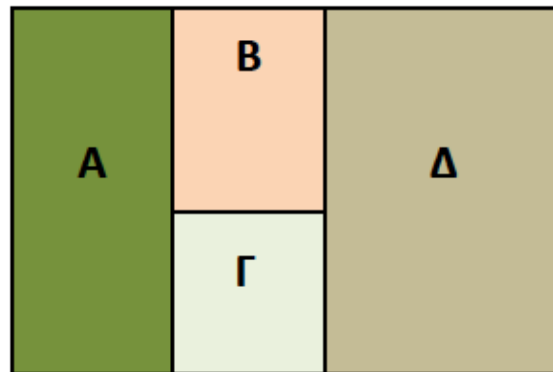
$$(1)+(2) \quad \left. \begin{array}{l} T_1 - T_3 = Q_x (R_A + R_B) \\ R_{tot} = R_A + R_B \end{array} \right\} \quad \boxed{Q_x = \frac{T_1 - T_3}{R_{tot}}}$$

## Άθροιση αντιστάσεων αγωγής σε παράλληλη διάταξη



$$Q_x = Q_{xA} + Q_{xB} = \frac{T_1 - T_2}{R_A} + \frac{T_1 - T_2}{R_B} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{R_A R_B}{R_A + R_B}} \quad \left. \begin{array}{l} R_{tot} = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B} \Rightarrow R_{tot} = \left[ \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} \right]^{-1} \end{array} \right\} \quad Q_x = \frac{T_1 - T_2}{R_{tot}}$$

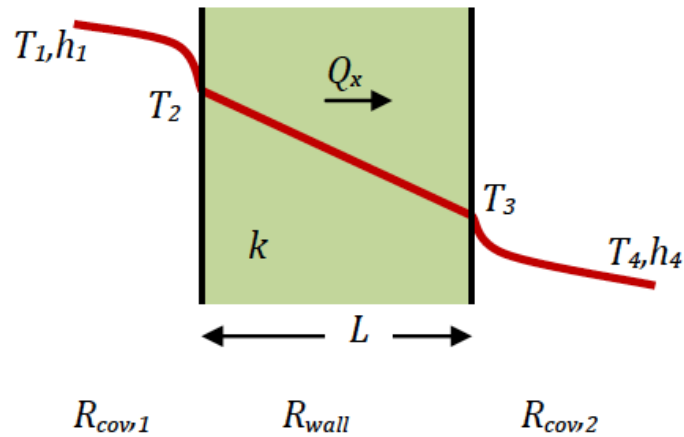
## Παράδειγμα



$$R_{tot} = R_A + R_{B,\Gamma} + R_\Delta$$

$$R_{B,\Gamma} = \left[ \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_\Gamma} \right]^{-1}$$

## Άθροιση αντιστάσεων αγωγής και συναγωγής σε σειρά



$k$  συντελεστής  
θερμικής αγωγιμότητας  $\left[ \frac{W}{m \cdot K} \right]$

$h$  συντελεστής συναγωγής  $\left[ \frac{W}{m^2 K} \right]$

$$Q_x = h_1 A (T_1 - T_2) = \frac{kA}{L} (T_2 - T_3) = h_2 A (T_3 - T_4)$$

$$T_1 - T_2 = \frac{Q_x}{h_1 A}$$

$$T_2 - T_3 = \frac{Q_x L}{kA}$$

$$T_3 - T_4 = \frac{Q_x}{h_2 A}$$

---

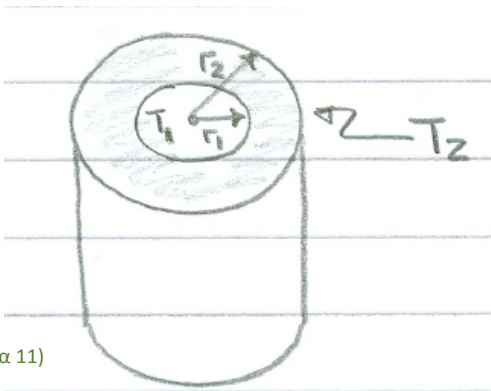

$$+ T_1 - T_4 = Q_x \left[ \frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{kA} + \frac{1}{h_2 A} \right]$$

$$\Rightarrow T_1 - T_4 = Q_x R_{tot}$$

$$R_{tot} = \left[ \frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{kA} + \frac{1}{h_2 A} \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow T_1 - T_4 = Q_x R_{tot} \\ R_{tot} = \left[ \frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{kA} + \frac{1}{h_2 A} \right] \end{array} \right\} \Rightarrow Q_x = \frac{T_1 - T_4}{R_{tot}}$$

## Θερμική αντίσταση σε κυλινδρικό τοίχωμα

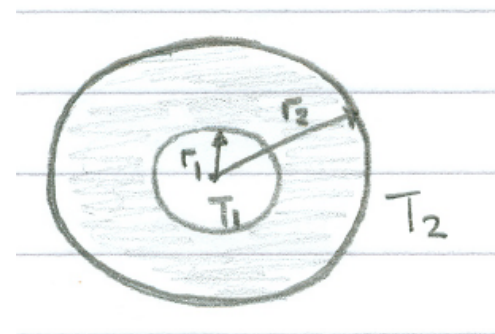


(από διαφάνεια 11)

$$Q_r = \frac{2\pi r L k (T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \Rightarrow Q_r = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{cyl}}$$

$$R_{cyl} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi r L k}$$

## Θερμική αντίσταση σε σφαιρικό τοίχωμα

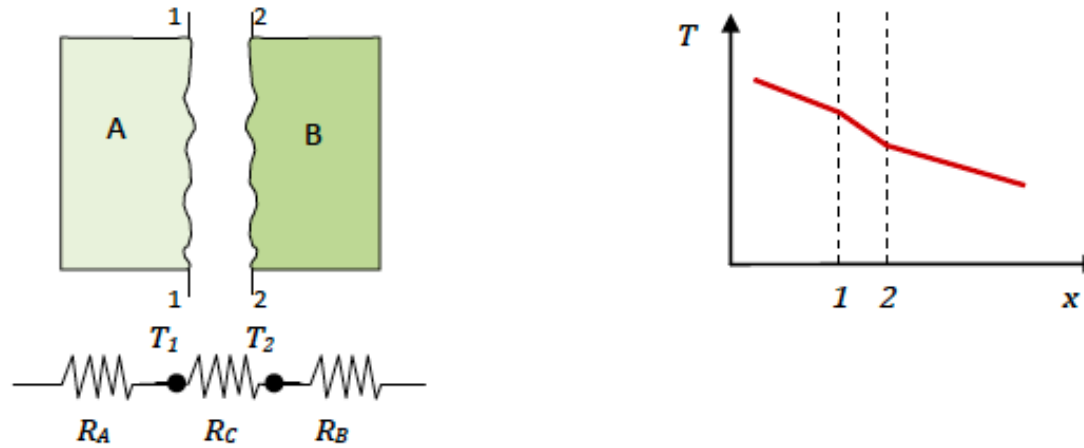


(από διαφάνεια 12)

$$Q_r = \frac{4\pi k (T_1 - T_2)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \Rightarrow Q_r = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{sph}}$$

$$R_{sph} = \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{4\pi k}$$

## Αντίσταση επαφής



Σε ένα σύνθετο τοίχωμα στο σημείο επαφής δύο υλικών, εμφανίζεται μια **πρόσθετη αντίσταση** επειδή η επαφή των δύο επιφανειών δεν είναι ποτέ τέλεια. Δημιουργούνται διάκενα μεταξύ των δύο επιφανειών, όπου υπάρχει αέρας ή άλλο ρευστό με μικρή αγωγιμότητα, με αποτέλεσμα να εμποδίζεται η αγωγή θερμότητας.

## Αγωγή με Σύγχρονη Παραγωγή

Ισοζύγιο ενέργειας:  $k \nabla^2 T + \dot{q}^M = 0$

όπου  $\dot{q}^M$  ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας στη μονάδα όγκου του υλικού  $\left[ \frac{W}{m^3} \right]$

και  $k$  η θερμική αγωγιμότητα  $\left[ \frac{W}{m \cdot K} \right]$

$$\Rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{\dot{q}^M}{k}$$

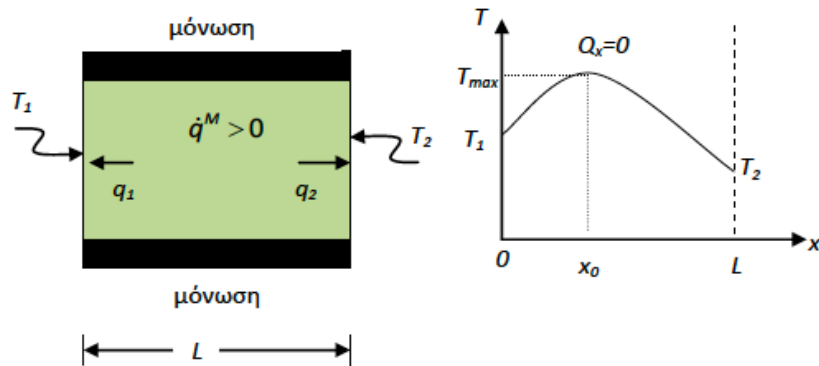
$$\Rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}^M}{k}x + C_1$$

$$\Rightarrow T(x) = -\frac{\dot{q}^M}{2k}x^2 + C_1x + C_2 \quad (1) \quad (*)$$

$$T(0) = T_1 \quad (2)$$

$$T(L) = T_2 \quad (3)$$

## Επίπεδο τοίχωμα



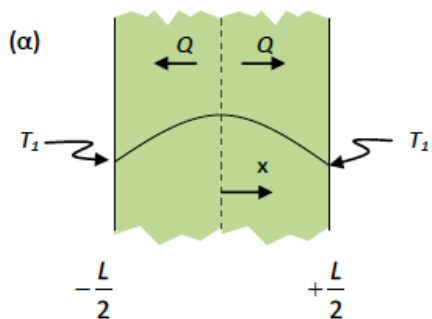
$$(2) \rightarrow (1) \quad C_2 = T_1 \quad (4)$$

$$(3) \& (4) \rightarrow (1) \quad T_2 = -\frac{\dot{q}^M}{2k}L^2 + C_1L + T_1 \Rightarrow T_2 - T_1 + \frac{\dot{q}^M L^2}{2k} = C_1L \Rightarrow C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{\dot{q}^M L}{2k} \quad (5)$$

$$(4) \& (5) \rightarrow (1) \quad T(x) = -\frac{\dot{q}^M}{2k}x^2 + \frac{T_2 - T_1}{L}x + \frac{\dot{q}^M L}{2k}x + T_1$$

$$\Rightarrow T(x) = T_1 + (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + \frac{\dot{q}^M L^2}{2k} \left[ \frac{x}{L} - \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

## Οριακές Συνθήκες

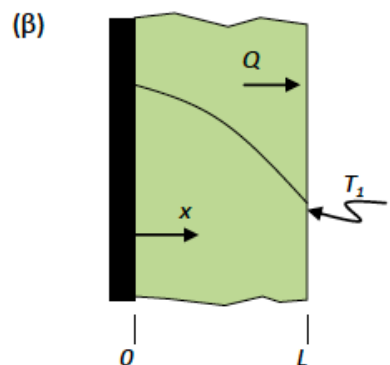


Συμμετρία με δεδομένη θερμοκρασία τοιχώματος

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$T\left(\frac{L}{2}\right) = T_1 \rightarrow C_2 = T_1 + \frac{\dot{q}''' L^2}{8k}$$

$$(1) \rightarrow T(x) = T_1 + \frac{\dot{q}''' L^2}{8k} \left[ 1 - \left( \frac{2x}{L} \right)^2 \right] \quad (**)$$



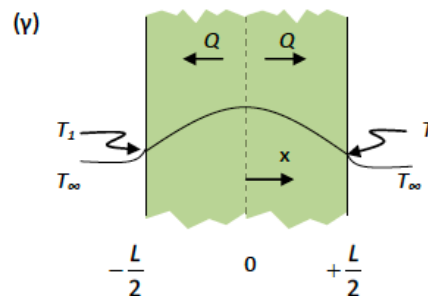
Μόνωση στη μία πλευρά

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$T(L) = T_1 \rightarrow C_2 = T_1 + \frac{\dot{q}''' L^2}{2k}$$

$$(1) \rightarrow T(x) = T_1 + \frac{\dot{q}''' L^2}{2k} \left[ 1 - \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right] \quad (***)$$

(1β)



Μεταφορά με συναγωγή στο περιβάλλον (Η θερμότητα που φτάνει στην επιφάνεια με αγωγή είναι ίση με τη θερμότητα που απομακρύνεται με συναγωγή).

$$@ x = \frac{L}{2} \quad q_x = -k \frac{dT}{dx} = h(T - T_\infty)$$

Οριακές συνθήκες:

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} @ x = \frac{L}{2} \quad -k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L/2} &= h(T_{L/2} - T_\infty) \\ (1\beta) \rightarrow \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L/2} &= \frac{\dot{q}''' L}{k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{q}''' \frac{L}{2} = h(T_{L/2} - T_\infty) \Rightarrow T_{L/2} = T_\infty + \frac{\dot{q}''' L}{2h}$$

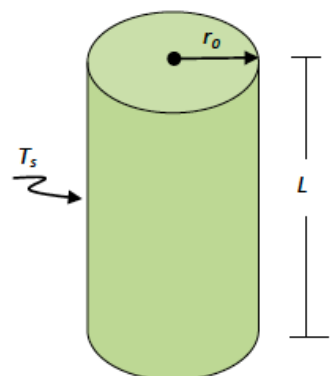
$$\therefore C_1 = 0$$

$$C_2 = T_\infty + \frac{\dot{q}''' L}{2h} + \frac{\dot{q}''' L^2}{8k}$$

$$(1) \rightarrow T(x) = T_\infty + \frac{\dot{q}''' L}{2h} + \frac{\dot{q}''' L^2}{8k} \left[ 1 - \left( \frac{2x}{L} \right)^2 \right] \quad (****)$$

## Παραγωγή θερμότητας σε κυλινδρικό τοίχωμα

Ισοζύγιο ενέργειας σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Θεωρούμε ότι η θερμότητα παράγεται ομοιόμορφα σε όλο τον όγκο του στερεού.



$$k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) + \dot{q}^M = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{q}^M}{k} r = 0$$

$$\text{ολοκλ.} \Rightarrow r \frac{dT}{dr} + \frac{\dot{q}^M}{2k} r^2 = C_1 \Rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}^M}{2k} r + \frac{C_1}{r}$$

$$\text{ολοκλ.} \Rightarrow T(r) = -\frac{\dot{q}^M}{4k} r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (1)$$

Οριακές συνθήκες:

$$T(r_0) = T_s \quad (2)$$

λόγω συμμετρίας:  $\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (3)$

$$\therefore C_1 = 0 \quad \text{γιατί} \quad \frac{C_1}{r} \rightarrow \infty \quad @ \quad r \rightarrow 0 \quad (4)$$

$$C_2 = T_s + \frac{\dot{q}^M r_0^2}{4k} \quad (5)$$

$$(4) \& (5) \rightarrow (1)$$

$$T(x) = T_s + \frac{\dot{q}^M r_0^2}{4k} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \quad (6)$$

Η μέγιστη θερμοκρασία αναπτύσσεται στον άξονα  $r=0$

$$(6) \quad @ \quad r=0 \quad T(0) = T_{\max} = T_s + \frac{\dot{q}^M r_0^2}{4k} \Rightarrow T(0) - T_s = \frac{\dot{q}^M r_0^2}{4k} \quad (7)$$

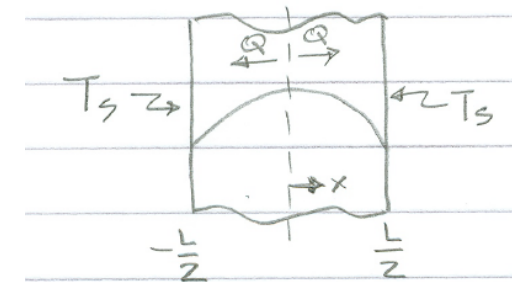
$$(7) \rightarrow (6) \quad \frac{T(r) - T_s}{T(0) - T_s} = 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2$$

## Μεταβλητός ρυθμός παραγωγής θερμότητας

Ο ρυθμός παραγωγής συνήθως εξαρτάται από τη θερμοκρασία.

Έστω  $\dot{q}^M = \dot{q}_0^M (1 + aT)$

Ισοζύγιο:  $\left. \begin{aligned} \frac{d^2 T}{dx^2} &= -\frac{\dot{q}^M}{k} \end{aligned} \right\} \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{q}_0^M}{k} aT + \frac{\dot{q}_0^M}{k} = 0 \quad (1)$



λόγω συμμετρίας:

Οριακές συνθήκες:

$$T\left(\frac{L}{2}\right) = T_s \quad (2)$$

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (3)$$

Θέτουμε:  $m = \sqrt{\frac{\dot{q}_0^M a}{k}}$

(1)  $\frac{d^2 T}{dx^2} + m^2 T + \frac{\dot{q}_0^M}{k} = 0$  Μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση με γενική λύση

$T(x) = T_h + T_p \quad (4)$

Η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι:

$$\frac{d^2 T_h}{dx^2} + m^2 T_h = 0 \Rightarrow T_h = \Omega_1 \cos mx + \Omega_2 \sin mx \quad (5)$$

Η μερική λύση της (1) είναι:

$$T_p = C_1 \quad (6)$$

$$(6) \rightarrow (1) \quad \left. \begin{aligned} 0 + m^2 C_1 + \frac{\dot{q}_0^M}{k} &= 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{\dot{q}_0^M}{k} \frac{1}{m^2} \\ m &= \sqrt{\frac{\dot{q}_0^M a}{k}} \end{aligned} \right\} C_1 = \boxed{-\frac{1}{a} = T_p} \quad (7)$$

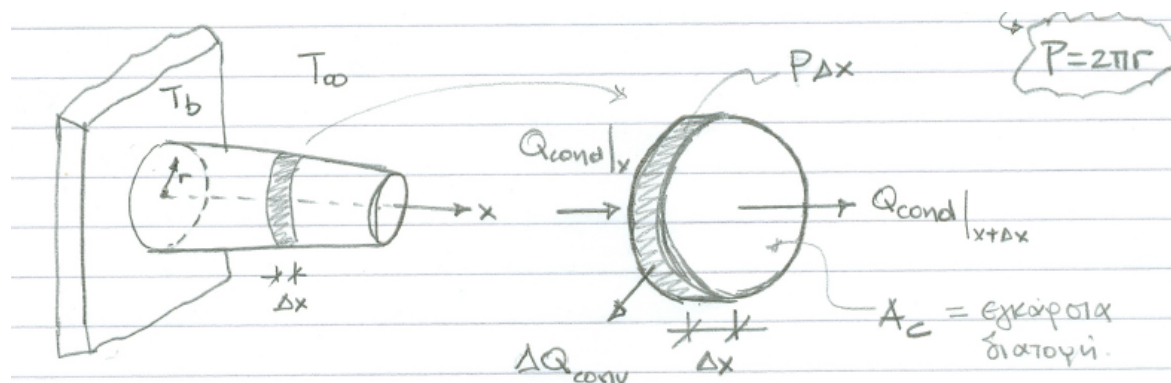
$$(5) \& (7) \rightarrow (4) \quad T(x) = \Omega_1 \cos mx + \Omega_2 \sin mx - \frac{1}{a} \quad (8)$$

$$(3) \rightarrow (8) \quad 0 = -m\Omega_1 \sin(0) + m\Omega_2 \cos(0) - 0 \Rightarrow \Omega_2 = 0 \quad (9)$$

$$(2) \& (9) \rightarrow (8) \quad T_s = \Omega_1 \cos\left(m\frac{L}{2}\right) - \frac{1}{a} \Rightarrow \Omega_1 = \frac{T_s + \frac{1}{a}}{\cos\left(m\frac{L}{2}\right)} \quad (10)$$

$$(9) \& (10) \rightarrow (8) \quad \boxed{T(x) = \left(T_s + \frac{1}{a}\right) \frac{\cos(mx)}{\cos(mL/2)} - \frac{1}{a}}$$

## Μεταφορά θερμότητας σε εκτεινόμενες επιφάνειες (περύγιο)



Το περύγιο βρίσκεται σε επαφή με θερμό τοίχωμα με σταθερή θερμοκρασία  $T_b$ . Η θερμοκρασία περιβάλλοντος είναι  $T_\infty$ .

Ισοζύγιο:  $Q_{cond,x} = Q_{cond,x+\Delta x} + \Delta Q_{conv}$

$$\Rightarrow -kA_c \frac{dT}{dx} \Big|_x = -kA_c \frac{dT}{dx} \Big|_{x+\Delta x} + h(P\Delta x)(T - T_\infty)$$

$$\Rightarrow + \frac{d}{dx} \left( kA_c \frac{dT}{dx} \right) dx = h(Pdx)(T - T_\infty)$$

$$\Rightarrow + \frac{d}{dx} \left( kA_c \frac{dT}{dx} \right) = hP(T - T_\infty)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} kA_c \frac{d^2 T}{dx^2} + k \frac{dA_c}{dx} \frac{dT}{dx} &= hP(T - T_\infty) \\ \Theta &= T - T_\infty \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 \Theta}{dx^2} + \frac{1}{A_c} \frac{dA_c}{dx} \frac{d\Theta}{dx} - \frac{hP}{kA_c} \Theta = 0} \quad (I) \quad \text{Εξίσωση περυγίου}$$

## Πτερύγια σταθερής εγκάρσιας διατομής

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_c}{dx} = 0 & \rightarrow (I) \rightarrow \frac{d^2\Theta}{dx^2} - m^2\Theta = 0 \\ m &= \sqrt{\frac{hP}{kA_c}} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Theta(x) = C_1 e^{-mx} + C_2 e^{+mx}} \quad (II)$$

$$\left. \begin{aligned} T(L) = T_\infty \quad \text{ή} \quad \Theta(L) = 0 \\ L \rightarrow \infty \\ T(0) = T_b \quad \text{ή} \quad \Theta = \Theta_b = T_b - T_\infty \end{aligned} \right\} \quad (II) \rightarrow \boxed{\Theta(x) = \Theta_b e^{-mx}}$$

(β) Πτερύγιο μονωμένο στο άκρο ( $x=L$ )

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT(L)}{dx} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{d\Theta(L)}{dx} = 0 \\ T(0) = T_b \quad \text{ή} \quad \Theta(0) = \Theta_b \end{aligned} \right\} \quad (II) \rightarrow \boxed{\Theta(x) = \Theta_b \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)}}$$

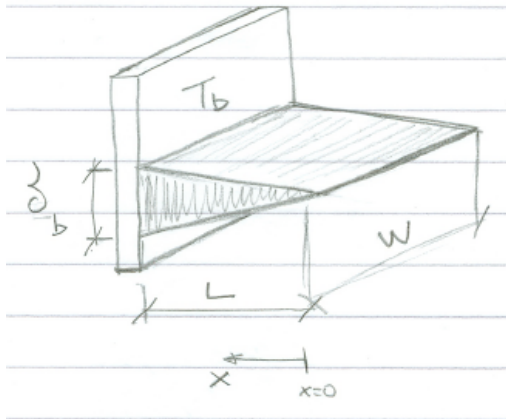
(γ) Μεταφορά με συναγωγή από το άκρο του πτερυγίου ( $x=L$ )

$$\left. \begin{aligned} -k \frac{dT(L)}{dx} = h(T - T_\infty) \quad \text{ή} \quad k \frac{d\Theta(L)}{dx} = h\Theta_L \\ T(0) = T_b \quad \text{ή} \quad \Theta(0) = \Theta_b \end{aligned} \right\} \quad (II) \rightarrow \boxed{\Theta(x) = \Theta_b \frac{\cosh[m(L-x)] + \frac{h}{km} \sinh[m(L-x)]}{\cosh(mL) + \frac{h}{km} \sinh(mL)}}$$

(δ) Δεδομένη θερμοκρασία στο άκρο του πτερυγίου ( $x=L$ )

$$\left. \begin{aligned} T(L) = T_L \quad \text{ή} \quad \Theta(L) = \Theta_L \\ T(0) = T_b \quad \text{ή} \quad \Theta(0) = \Theta_b \end{aligned} \right\} \quad (II) \rightarrow \boxed{\Theta(x) = \frac{\Theta_L \sinh(mx) + \Theta_b \sinh[m(L-x)]}{\sinh(mL)}}$$

## Πτερύγια μεταβλητής διατομής (τριγωνικό πτερύγιο)



$$(I) \rightarrow \frac{d^2 \Theta}{dx^2} + \frac{1}{A_c} \frac{dA_c}{dx} \frac{d\Theta}{dx} - \frac{hP}{kA_c} \Theta = 0$$

$$A_c(x) = \left( \frac{\delta_b}{L} x \right) W$$

$$\frac{dA_c}{dx} = \left( \frac{\delta_b}{L} \right) W$$

$$\frac{1}{A_c} \frac{dA_c}{dx} = \frac{1}{\left( \frac{\delta_b}{L} x \right) W} \left( \frac{\delta_b}{L} \right) W = \frac{1}{x}$$

Θεωρούμε ότι  $W \gg \delta_b$  άρα  $P=2W$

$$\frac{hP}{kA_c} = \frac{h(2W)}{k \left( \frac{\delta_b}{L} x \right) W} = \frac{2hL}{\delta_b k x}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{d^2 \Theta}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\Theta}{dx} - \frac{1}{x} m^2 \Theta &= 0 \\ \text{όπου } m^2 &= \frac{2hL}{\delta_b k} \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Ορίζουμε } z = 2m\sqrt{x} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{m}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$\frac{d\Theta}{dx} = \frac{d\Theta}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{m}{\sqrt{x}} \frac{d\Theta}{dz} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Theta}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{d\Theta}{dz} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{m}{\sqrt{x}} \frac{d\Theta}{dz} \right) = \frac{m}{\sqrt{x}} \frac{d}{dx} \left( \frac{d\Theta}{dz} \right) - \frac{m}{2x^{3/2}} \frac{d\Theta}{dz} \\ &= \frac{m}{\sqrt{x}} \frac{d}{dz} \left( \frac{d\Theta}{dz} \right) \frac{dz}{dx} - \frac{m}{2x^{3/2}} \frac{d\Theta}{dz} \\ &= \frac{m^2}{x} \frac{d^2 \Theta}{dz^2} - \frac{m}{2x^{3/2}} \frac{d\Theta}{dz} \end{aligned}$$

$$(2) \& (3) \& (4) \rightarrow (1) \quad \left[ \frac{m^2}{x} \frac{d^2 \Theta}{dz^2} - \frac{m}{2x^{3/2}} \frac{d\Theta}{dz} \right] + \frac{1}{x} \frac{m}{\sqrt{x}} \frac{d\Theta}{dz} - \frac{1}{x} m^2 \Theta = 0$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{m^2}{x} \frac{d^2 \Theta}{dz^2} + \frac{m}{2x^{3/2}} \frac{d\Theta}{dz} - \frac{m^2}{x} \Theta &= 0 \\ x = \frac{z^2}{4m^2} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{z}{2m} \Rightarrow x^{3/2} = \frac{z^3}{8m^3} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{m^2}{z^2 / (4m^2)} \frac{d^2 \Theta}{dz^2} + \frac{m}{2z^3 / (8m^3)} \frac{d\Theta}{dz} - \frac{m^2}{z^2 / (4m^2)} \Theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4m^4}{z^2} \frac{d^2 \Theta}{dz^2} + \frac{4m^4}{z^3} \frac{d\Theta}{dz} - \frac{4m^4}{z^2} \Theta = 0$$

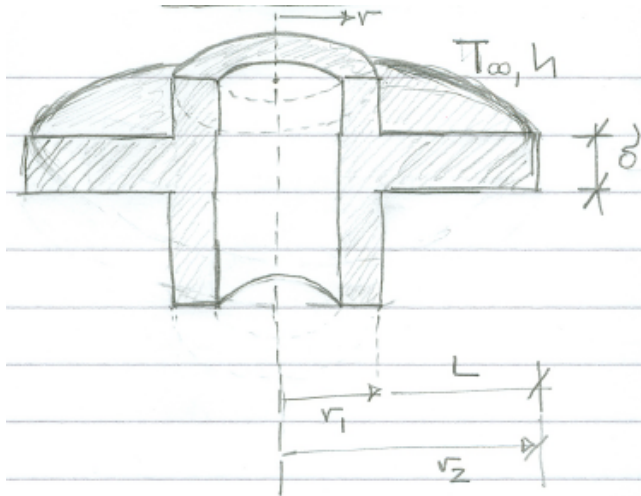
$$\Rightarrow z^2 \frac{d^2 \Theta}{dz^2} + z \frac{d\Theta}{dz} - (z^2 - 0) \Theta = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι η τροποποιημένη εξίσωση Bessel μηδενικής τάξης, που έχει λύση:

$$\left. \begin{aligned} \Theta(z) &= C_1 I_0(z) + C_2 K_0(z) \\ z &= 2m\sqrt{x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\Theta(x) = C_1 I_0(2m\sqrt{x}) + C_2 K_0(2m\sqrt{x})} \quad m = \sqrt{\frac{2hL}{\delta_b k}}$$

όπου  $I_0$  και  $K_0$  είναι συναρτήσεις Bessel μηδενικής τάξης, πρώτου και δευτέρου είδους αντίστοιχα.

## Δακτυλιοειδές πτερύγιο



$$(I) \rightarrow \frac{d^2 \Theta}{dr^2} + \frac{1}{A_c} \frac{dA_c}{dr} \frac{d\Theta}{dr} - \frac{hP}{kA_c} \Theta = 0$$

$$A_c = (2\pi r) \delta \quad \text{εγκάρσια διατομή}$$

$$P(r) = 2(2\pi r) = 4\pi r \quad L \gg \delta \text{ περίμετρος}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \Theta}{dr^2} + \frac{1}{2\pi r \delta} (2\pi \delta) \frac{d\Theta}{dr} - \frac{h(4\pi r)}{k(2\pi r) \delta} \Theta = 0$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{d^2 \Theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Theta}{dr} - m^2 \Theta &= 0 \\ m^2 &= \frac{2h}{k\delta} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\text{ορίζουμε} \quad z = mr \Rightarrow \frac{dz}{dr} = m \quad (2)$$

$$\frac{d\Theta}{dr} = \frac{d\Theta}{dz} \frac{dz}{dr} = m \frac{d\Theta}{dz} \quad (3)$$

$$\frac{d^2 \Theta}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left( \frac{d\Theta}{dr} \right) = \frac{d}{dr} \left( m \frac{d\Theta}{dz} \right) = m \frac{d}{dr} \left( \frac{d\Theta}{dz} \right) = m \frac{d}{dz} \left( \frac{d\Theta}{dz} \right) \frac{dz}{dr} = m^2 \frac{d^2 \Theta}{dz^2} \quad (4)$$

$$(2) \& (3) \& (4) \rightarrow (1) \quad m^2 \frac{d^2 \Theta}{dz^2} + \left( \frac{m}{z} \right) m \frac{d\Theta}{dz} - m^2 \Theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \Theta}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\Theta}{dz} - \Theta = 0$$

$$\Rightarrow z^2 \frac{d^2 \Theta}{dz^2} + z \frac{d\Theta}{dz} - (z^2 - 0) \Theta = 0 \quad \text{τροποποιημένη εξ. Bessel μηδενικής τάξης}$$

Επομένως η λύση είναι:

$$\Theta(z) = C_1 I_0(z) + C_2 K_0(z) \quad z = mr$$

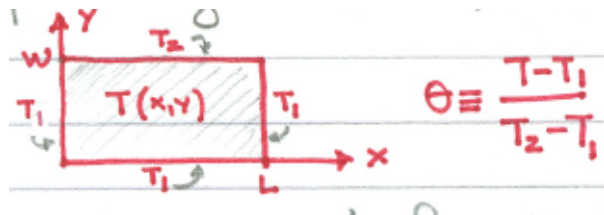
$\therefore$

$$\boxed{\begin{aligned} \Theta(r) &= C_1 I_0(mr) + C_2 K_0(mr) \\ m &= \frac{2h}{k\delta} \end{aligned}}$$

όπου  $I_0$  και  $K_0$  είναι συναρτήσεις Bessel μηδενικής τάξης, πρώτου και δευτέρου είδους αντίστοιχα.

# Πολυδιάστατη Αγωγή Θερμότητας

Η αγωγή θερμότητας στο χώρο, σε μόνιμη κατάσταση, χωρίς παραγωγή θερμότητας και για σταθερό συντελεστή αγωγιμότητας περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση Laplace.



$$\nabla^2 \theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad (1) \quad \text{για 2-D αγωγή \& καρτεσιανές}$$

συντεταγμένες

Η αναλυτική λύση της εξίσωσης αυτής μπορεί να βρεθεί εύκολα με τη μέθοδο **χωρισμού μεταβλητών**. Θεωρούμε ότι υπάρχει μια λύση με τη μορφή:

$$\theta = X(x)Y(y) \quad (2)$$

$$(2) \rightarrow (1) \quad Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε πλευρά της παραπάνω εξίσωσης είναι συνάρτηση μόνο μιας μεταβλητής, επομένως τα δύο σκέλη της εξίσωσης είναι ίσα με μια σταθερά  $\lambda^2$ .

$$\Rightarrow -\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \lambda^2 \Rightarrow \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \Rightarrow \boxed{X = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \lambda^2 \Rightarrow \frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \Rightarrow \boxed{Y = c_3 e^{-\lambda y} + c_4 e^{+\lambda y}} \quad (4)$$

όπου οι σταθερές  $c_1, c_2, c_3$ , και  $c_4$  προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες:

$$\theta(0, y) = 0 \quad \theta(x, 0) = 0 \quad (5a, b)$$

$$\theta(L, y) = 0 \quad \theta(x, W) = 1 \quad (6a, b)$$

Έχουμε δύο οριακές συνθήκες για κάθε συντεταγμένη γιατί η μερική διαφορική είναι δεύτερης τάξης ως προς το  $x$  και το  $y$ .

$$(3) \& (4) \rightarrow (2) \quad \theta(x, y) = (c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x)(c_3 e^{-\lambda y} + c_4 e^{+\lambda y}) \quad (7)$$

$$(5a) \rightarrow (7) \quad c_1(c_3 e^{-\lambda y} + c_4 e^{+\lambda y}) = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0} \quad (8)$$

$$(5b) \& (8) \rightarrow (7) \quad c_2 \sin \lambda x (c_3 + c_4) = 0 \Rightarrow \boxed{c_3 = -c_4} \quad (9)$$

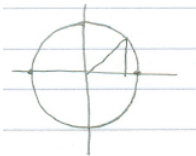
Η παραπάνω συνθήκη ικανοποιείται και με  $c_2=0$ , αλλά αυτή η περίπτωση δεν είναι επιθυμητή γιατί εξουδετερώνει την εξάρτηση της λύσης από τη συντεταγμένη  $x$ .

$$(6a),(8)\&(9)\rightarrow(7) \quad c_2 c_4 (\sin \lambda L)(e^{+\lambda y} - e^{-\lambda y}) = 0$$

Η συνθήκη αυτή ικανοποιείται μόνο για τις τιμές της  $\lambda$  όπου:

$$\sin \lambda L = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L} \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Το  $n=0$  δεν συμπεριλαμβάνεται γιατί μηδενίζει τη λύση (7)  $\theta(x,y)=0$ . Οι τιμές  $\lambda$  ονομάζονται **ιδιοτιμές** του προβλήματος και συμβολίζονται με τον κάτω δείκτη « $n$ » ως εξής:  $\lambda_n = n\pi/L$ . Για κάθε ιδιοτιμή  $\lambda_n$  έχουμε μια **ιδιοσυνάρτηση**  $\theta_n$ :

$$\left. \begin{aligned} \theta_n(x,y) &= c_2 c_4 \sin \frac{n\pi x}{L} \left( e^{+\frac{n\pi y}{L}} - e^{-\frac{n\pi y}{L}} \right) \\ 2 \sinh \frac{n\pi y}{L} &= e^{+\frac{n\pi y}{L}} - e^{-\frac{n\pi y}{L}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Rightarrow \theta_n(x,y) = c_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi y}{L} \quad n=1,2,3,\dots \quad (10)$$


Κρατάμε μόνο τις θετικές τιμές του  $n$ , γιατί οι ιδιοσυναρτήσεις  $\theta_n$  στην προκειμένη περίπτωση είναι ίδιες για  $+n$  και  $-n$ . Κάθε μία από τις ιδιοσυναρτήσεις ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση (1) καθώς και τις οριακές συνθήκες (5α), (5β) και (6α). Γι' αυτό το λόγο η σταθερά  $c_n$  εξαρτάται από την ιδιοτιμή  $n$ . Επομένως, υπάρχει ένας άπειρος αριθμός λύσεων που ικανοποιεί την εξίσωση (1). Επειδή το πρόβλημα είναι γραμμικό, ο γραμμικός συνδυασμός (superposition) των ιδιοσυναρτήσεων επίσης ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση (1) και τις τρεις πρώτες οριακές συνθήκες:

$$\theta_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi y}{L} \quad (11)$$

Για τον υπολογισμό των συντελεστών  $c_n$  χρησιμοποιούμε την (6b)

$$\left. \begin{aligned} \theta_n(x,W) &= 1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi W}{L} \\ \text{ορίζουμε } A_n &= c_n \sinh \frac{n\pi W}{L} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (13)$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω εξίσωση με  $\sin(m\pi x/L)$  και ολοκληρώνοντας από το 0 στο  $L$  προκύπτει:

$$\int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (14)$$

Δεδομένου ότι οι όροι  $\sin(n\pi x/L)$   $n=1,2,3,\dots$  είναι ορθογώνιοι μεταξύ τους, ισχύει η σχέση:

$$\int_a^b \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0 \quad m \neq n$$

Άρα το δεξί σκέλος της (14) δεν είναι μηδενικός όρος για την περίπτωση που  $m=n$ :

$$\Rightarrow \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx = A_n \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A_n &= \frac{\int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx}{\int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx} = \frac{-\frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L}}{\frac{x}{2} - \frac{\sin \frac{2n\pi x}{L}}{4n\pi}} \bigg|_0^L = \frac{-\frac{L}{n\pi} \left[ \cos \frac{n\pi}{L} - 1 \right]}{\frac{L}{2} - 0 - \left[ \frac{L}{4n\pi} - \frac{L}{4n\pi} \right]} = \frac{-\frac{L}{n\pi} [(-1)^n - 1]}{\frac{L}{2}} \\ &= -\frac{2}{n\pi} [(-1)^n - 1] = \frac{2}{n\pi} [(-1)^{n+1} + 1] \end{aligned} \quad (15)$$

$$(15) \rightarrow (12) \quad \frac{2}{n\pi} [(-1)^{n+1} + 1] = c_n \sinh \frac{n\pi W}{L} \quad \Rightarrow \quad c_n = \frac{\frac{2}{n\pi} [(-1)^{n+1} + 1]}{\sinh \frac{n\pi W}{L}} \quad (16)$$

Επομένως η λύση θα είναι ως εξής:

$$(16) \rightarrow (11) \rightarrow \boxed{\theta_n(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L} \frac{\sinh \frac{n\pi y}{L}}{\sinh \frac{n\pi W}{L}}}$$