
ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΜΑΖΑΣ (Εξεταστική 13-9-2016)

Δεν επιτρέπονται βιβλία. Επιτρέπεται μόνο ένα φύλλο Α4 με προσωπικές σημειώσεις και στις δύο όψεις.

Διάρκεια γραπτής εξέτασης: 2.0 ώρες

Θέμα 1 (20%)

Αν ο συντελεστής μοριακής διάχυσης της φθορίζουσας ουσίας uranine ($C_{20}H_{10}O_5Na_2$, $m_w=376,28$ g/mol, $\rho=1,56$ g/cm³) σε νερό στους 25 °C είναι $D_{AB}=6,24 \times 10^{-10}$ m²/s, να βρεθεί ο αντίστοιχος συντελεστής στους 50 °C. Δίνεται: $\mu_{H_2O} = 8,90 \times 10^{-4}$ N·s/m² στους 25 °C και $\mu_{H_2O} = 5,47 \times 10^{-4}$ N·s/m² στους 50 °C.

Λύση

Η επίδραση της θερμοκρασίας στο συντελεστή διάχυσης περιγράφεται με τη σχέση:

$$(D_{AB})_{50^\circ C} = (D_{AB})_{25^\circ C} \left[\frac{T_{50} / (\mu_B)_{50^\circ C}}{T_{25} / (\mu_B)_{25^\circ C}} \right]$$

$$T_{25}=273,15+25=298,15 \text{ K}$$

$$T_{50}=273,15+50=323,15 \text{ K}$$

$$\Rightarrow (D_{AB})_{50^\circ C} = \left(6,24 \times 10^{-10} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right)_{25^\circ C} \left[\frac{323,17 \text{ K} / 5,47 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2}{298,17 \text{ K} / 8,90 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2} \right]$$

$$\Rightarrow (D_{AB})_{50^\circ C} = 11,00 \times 10^{-10} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad \bullet$$

Θέμα 2 (20%)

Αρχίζοντας με το ισοζύγιο μάζας, να βρείτε την εξίσωση που περιγράφει τη συγκέντρωση συναρτήσει του χρόνου σε αντιδραστήρα πλήρους ανάμιξης ασυνεχούς τροφοδοσίας (CMBR), αν το συστατικό Α αντιδρά βάσει μονόδρομης αντίδρασης πρώτης τάξης ($A \rightarrow B$) με ρυθμό $r_A = -k_1 C_A$, η αρχική συγκέντρωση του Α ($t=0$) είναι C_{A0} και η τελική του συγκέντρωση ($t=t_f$) είναι C_{Af} .

Λύση

Το ισοζύγιο μάζας για ένα αντιδραστήρα πλήρους ανάμιξης ασυνεχούς τροφοδοσίας (CMBR) είναι:

Εισροή-Εκροή+Παραγωγή=Συσσώρευση

$$0 - 0 + V r_A(C_A) = V \frac{dC_A}{dt} \Rightarrow r_A(C_A) = \frac{dC_A}{dt}$$

Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες:

$$C_A(t=0) = C_{A0}$$

$$C_A(t=t_f) = C_{A_f}$$

ο χρόνος που χρειάζεται για να επιτευχθεί η επιθυμητή συγκέντρωση, C_{A_f} , βρίσκεται ολοκληρώνοντας την παραπάνω διαφορική εξίσωση ως εξής:

$$\int_{C_{A_0}}^{C_{A_f}} \frac{dC_A}{r(C_A)} = \int_0^{t_f} dt \Rightarrow t_f = \int_{C_{A_0}}^{C_{A_f}} \frac{dC_A}{r(C_A)}$$

και αντικαθιστώντας το ρυθμό αντίδρασης

$$-r(C_A) = k_1 C_A$$

προκύπτει:

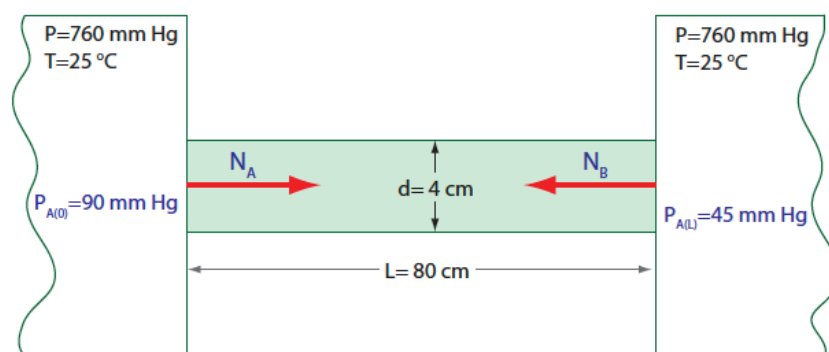
$$t_f = \int_{C_{A_0}}^{C_{A_f}} \frac{dC_A}{-k_1 C_A} = \frac{1}{-k_1} \{ \ln[C_{A_f}] - \ln[C_{A_0}] \} = \frac{1}{k_1} \ln \left[\frac{C_{A_0}}{C_{A_f}} \right]$$

$$\Rightarrow C_{A_f} = C_{A_0} \exp[-k_1 t_f] \quad \bullet$$

Θέμα 3 (20%)

Διοξείδιο του άνθρακα ($\text{CO}_2=\text{A}$) και άζωτο ($\text{N}_2=\text{B}$) βρίσκονται σε ισογραμμομοριακή αντιδιάχυση σε κυλινδρικό σωλήνα με μήκος $L=80 \text{ cm}$ και διάμετρο $d=4 \text{ cm}$. Το σύστημα βρίσκεται σε θερμοκρασία $T=25^\circ \text{C}$ και πίεση $P=1 \text{ atm}$. Τα δύο άκρα του σωλήνα συνδέουν δύο μεγάλες δεξαμενές όπου οι συγκεντρώσεις των αέριων παραμένουν σταθερές. Η μερική πίεση του CO_2 στο ένα άκρο του σωλήνα είναι 90 mm Hg και στο άλλο 45 mm Hg . Να βρεθεί ο ρυθμός μεταφοράς μάζας του CO_2 διαμέσου του σωλήνα αν ο συντελεστής μοριακής διάχυσης είναι $D_{AB}=0,16 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$.

Λύση



Ο συνολικός γραμμομοριακός ρυθμός μεταφοράς μάζας σε ισογραμμομοριακή αντιδιάχυση δίνεται από τη σχέση:

$$W_A = S D_{AB} \frac{(C_{A(0)} - C_{A(L)})}{\delta}$$

$$T = 273 + 25 = 298 \text{ K}$$

$$C_{A(0)} = \frac{P_{A(0)}}{RT} = \frac{90 \text{ mm Hg}}{\left[\left(0,08205 \frac{\text{atm} \cdot \text{m}^3}{\text{kmol} \cdot \text{K}} \right) \left(\frac{760 \text{ mm Hg}}{\text{atm}} \right) \right] (298 \text{ K})} = 4,84 \times 10^{-3} \frac{\text{kmol}}{\text{m}^3}$$

$$C_{A(L)} = \frac{P_{A(L)}}{RT} = \frac{45 \text{ mm Hg}}{\left[\left(0,08205 \frac{\text{atm} \cdot \text{m}^3}{\text{kmol} \cdot \text{K}} \right) \left(\frac{760 \text{ mm Hg}}{\text{atm}} \right) \right] (298 \text{ K})} = 2,42 \times 10^{-3} \frac{\text{kmol}}{\text{m}^3}$$

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (0,004 \text{ m})^2}{4} = 1,26 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

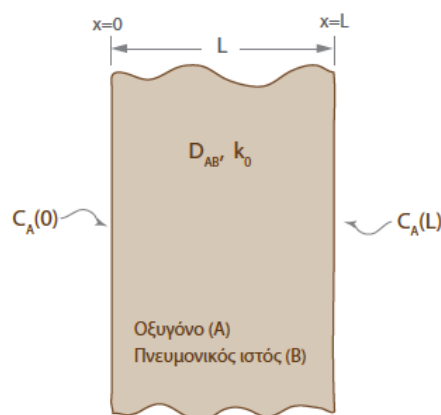
$$\Rightarrow W_A = \left(1,26 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \right) \left(0,16 \times 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right) \frac{(4,84 - 2,42) \times 10^{-3} \text{ kmol} / \text{m}^3}{0,80 \text{ m}} = 6,098 \times 10^{-11} \frac{\text{kmol}}{\text{s}}$$

Ο συνολικός ρυθμός μεταφοράς μάζας είναι:

$$\Rightarrow W_A = \left(6,098 \times 10^{-11} \frac{\text{kmol}}{\text{s}} \right) \left(44 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} \right) = 2,68 \times 10^{-9} \frac{\text{kg}}{\text{s}} \quad \bullet$$

Θέμα 4 (20%)

Το πρόβλημα της μεταφοράς οξυγόνου από την εσωτερική πνευμονική κοιλότητα, διαμέσου του πνευμονικού ιστού, στο δίκτυο των αιμοφόρων αγγείων στην απέναντι πλευρά μπορεί να απλουστευτεί ως εξής. Ο πνευμονικός ιστός (είδος B) μπορεί να προσεγγιστεί ως ένας επίπεδος τοίχος πάχους L. Η διαδικασία της εισπνοής μπορεί να θεωρηθεί ότι διατηρεί μια σταθερή μοριακή συγκέντρωση $C_A(0)$ του οξυγόνου (είδος A) στον ιστό από την εσωτερική επιφάνεια ($x=0$), και η αφομοίωση του οξυγόνου από το αίμα μπορεί να θεωρηθεί ότι διατηρεί μια σταθερή συγκέντρωση $C_A(L)$ του οξυγόνου στον ιστό στην εξωτερική επιφάνεια ($x=L$). Υπάρχει κατανάλωση οξυγόνου στον ιστό λόγω μεταβολικών διεργασιών, και η αντίδραση είναι μηδενικής τάξης, με ρυθμό $r_A = -k_0$. Να αναπτύξετε εκφράσεις για την κατανομή της συγκέντρωσης οξυγόνου στον ιστό και για το ποσοστό της αφομοίωσης του οξυγόνου από το αίμα ανά μονάδα επιφάνειας ιστού.



Λύση

Ισοζύγιο μάζας: Είσοδος – Έξοδος + Παραγωγή = Συσσώρευση

$$\left. \begin{aligned} N_A|_{x=0} S - N_A|_{x+\Delta x=L} S + r_A V &= 0 \\ r_A &= -k_0 \\ V &= S \Delta x \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\Delta x \frac{(N_A|_{x+\Delta x=L} - N_A|_{x=0}) S}{\Delta x} - k_0 S \Delta x = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \lim \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{dN_A}{dx} + k_0 &= 0 \\ N_A = J_A = -D_{AB} \frac{dC_A}{dx} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -D_{AB} \frac{d^2 C_A}{dx^2} + k_0 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 C_A}{dx^2} - \frac{k_0}{D_{AB}} = 0 \Rightarrow \frac{dC_A}{dx} = \left(\frac{k_0}{D_{AB}} \right) x + c_1 \Rightarrow C_A = \left(\frac{k_0}{2D_{AB}} \right) x^2 + c_1 x + c_2 \quad (1)$$

Οι σταθερές c_1 και c_2 βρίσκονται με την εφαρμογή των οριακών συνθηκών:

$$C_A = C_A(0), \quad x = 0 \quad (2)$$

$$C_A = C_A(L), \quad x = L \quad (3)$$

$$(2) \rightarrow (1) \Rightarrow c_2 = C_A(0) \quad (4)$$

$$(3) \& (4) \rightarrow (1) \Rightarrow C_A(L) = \left(\frac{k_0}{2D_{AB}} \right) L^2 + c_1 L + C_A(0) \Rightarrow c_1 = \frac{C_A(L) - C_A(0)}{L} - \frac{k_0 L}{2D_{AB}} \quad (5)$$

Επομένως η κατανομή της συγκέντρωσης οξυγόνου στον ιστό δίνεται από τη σχέση:

$$(4) \& (5) \rightarrow (1) \Rightarrow C_A(x) = \left(\frac{k_0}{2D_{AB}} \right) x^2 + \left[\frac{C_A(L) - C_A(0)}{L} - \frac{k_0 L}{2D_{AB}} \right] x + C_A(0)$$

$$\Rightarrow C_A(x) = \left(\frac{k_0}{2D_{AB}} \right) x(x-L) + \left[C_A(L) - C_A(0) \right] \frac{x}{L} + C_A(0) \quad \bullet$$

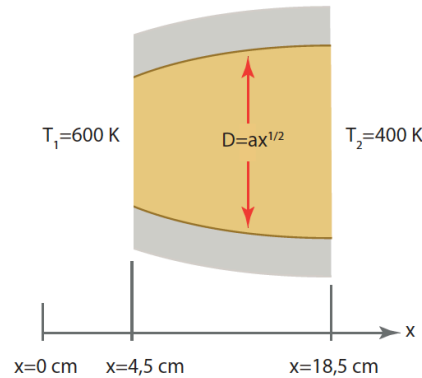
Η αφομοίωση του οξυγόνου από το αίμα ανά μονάδα επιφάνειας ιστού:

$$\left. \begin{aligned} N_A|_{x=L} = J_A|_{x=L} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dx} \Big|_{x=L} \\ \frac{dC_A}{dx} \Big|_{x=L} = \frac{k_0 L}{2D_{AB}} + \left[C_A(L) - C_A(0) \right] \frac{1}{L} \end{aligned} \right\} \Rightarrow N_A|_{x=L} = -D_{AB} \left\{ \frac{k_0 L}{2D_{AB}} + \left[C_A(L) - C_A(0) \right] \frac{1}{L} \right\}$$

$$\Rightarrow N_A|_{x=L} = -\frac{k_0 L}{2} - \frac{D_{AB}}{L} [C_A(L) - C_A(0)] \quad \bullet$$

Θέμα 5 (20%)

Το παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζει μία κωνική ράβδο κατασκευασμένη από καθαρό αλουμίνιο με συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας $k=236 \text{ W/m}\cdot\text{K}$, στους 500 K . Η ράβδος είναι κυκλικής διατομής με διάμετρο $D=ax^{1/2}$, όπου $a=0,4 \text{ m}^{1/2}$. Το μικρό άκρο βρίσκεται στο $x_1=4,5 \text{ cm}$ και το μεγάλο άκρο βρίσκεται στο $x_2=18,5 \text{ cm}$. Οι θερμοκρασίες στα άκρα της ράβδου είναι $T_1=600 \text{ K}$ και $T_2=400 \text{ K}$, ενώ η πλευρική επιφάνεια της ράβδου είναι καλά μονωμένη. (α) Να αναπτύξετε μια αναλυτική έκφραση για την κατανομή της θερμοκρασίας στην ράβδο, $T(x)=f(x, x_1, x_2, T_1, T_2)$, θεωρώντας ότι η ράβδος είναι μονοδιάστατη. (β) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταφοράς θερμότητας, Q_x .

**Λύση**

Από το νόμο του Fourier γνωρίζουμε ότι ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας ορίζεται:

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -Ak \frac{dT}{dx} \\ A &= \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi (ax^{1/2})^2}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q_x = -\left(\frac{\pi a^2 x}{4}\right) k \frac{dT}{dx} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{4Q_x}{\pi a^2 k} \int_{x_1}^x \frac{dx}{x} = -\int_{T_1}^T dT$$

Ολοκληρώνοντας και λύνοντας ως προς $T(x)$, προκύπτει:

$$\frac{4Q_x}{\pi a^2 k} (\ln x - \ln x_1) = -(T - T_1) \Rightarrow T(x) = T_1 - \frac{4Q_x}{\pi a^2 k} \ln \left[\frac{x}{x_1} \right] \quad (2)$$

και για $T(x)=T_2$ έχουμε

$$\Rightarrow T_2 = T_1 - \frac{4Q_x}{\pi a^2 k} \ln \left[\frac{x_2}{x_1} \right] \Rightarrow Q_x = (T_1 - T_2) \frac{\pi a^2 k}{4 \ln [x_2 / x_1]} \quad (3)$$

$$(3) \rightarrow (2) \Rightarrow T(x) = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{\ln [x / x_1]}{\ln [x_2 / x_1]} \quad \bullet \quad (4)$$

$$(3) \Rightarrow Q_x = (600 \text{ K} - 400 \text{ K}) \frac{\pi (0,4 \text{ m}^{1/2})^2 (236 \text{ W/m} \cdot \text{K})}{4 \ln[18,5 \text{ cm} / 4,5 \text{ cm}]}$$

$$\Rightarrow Q_x = 2247,52 \text{ W} = 2,25 \text{ kW} \quad \bullet$$

----- Χρήσιμες πληροφορίες -----
 Παγκόσμια σταθερά αέριων:
 $R = 0,08205 \frac{\text{atm} \cdot \text{m}^3}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$