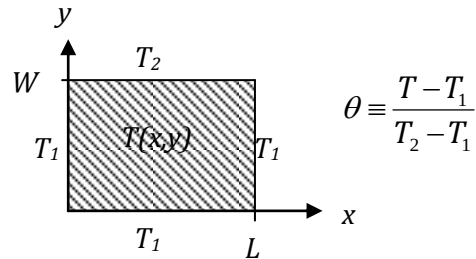


Πολυδιάστατη Αγωγή Θερμότητας

Η αγωγή θερμότητας στο χώρο, σε μόνιμη κατάσταση, χωρίς παραγωγή θερμότητας και για σταθερό συντελεστή αγωγιμότητας περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση Laplace.

$$\nabla^2 \theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad (1) \quad \text{για 2-D αγωγή \& καρτεσιανές συντεταγμένες}$$



Η αναλυτική λύση της εξίσωσης αυτής μπορεί να βρεθεί εύκολα με τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών. Θεωρούμε ότι υπάρχει μια λύση με τη μορφή:

$$\theta = X(x)Y(y) \quad (2)$$

$$(2) \rightarrow (1) \quad Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε πλευρά της παραπάνω εξίσωσης είναι συνάρτηση μόνο μιας μεταβλητής, επομένως τα δύο σκέλη της εξίσωσης είναι ίσα με μια σταθερά λ^2 .

$$\Rightarrow -\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \lambda^2 \Rightarrow \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \Rightarrow \boxed{X = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \lambda^2 \Rightarrow \frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \Rightarrow \boxed{Y = c_3 e^{-\lambda y} + c_4 e^{+\lambda y}} \quad (4)$$

όπου οι σταθερές c_1, c_2, c_3 & c_4 προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες:

$$\theta(0, y) = 0 \quad \theta(x, 0) = 0 \quad (5a, b)$$

$$\theta(L, y) = 0 \quad \theta(x, W) = 1 \quad (6a, b)$$

Έχουμε δύο οριακές συνθήκες για κάθε συντεταγμένη γιατί η μερική διαφορική είναι δεύτερης τάξης ως προς το x και το y .

$$(3) \& (4) \rightarrow (2) \quad \theta(x, y) = (c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x)(c_3 e^{-\lambda y} + c_4 e^{+\lambda y}) \quad (7)$$

$$(5a) \rightarrow (7) \quad c_1(c_3 e^{-\lambda y} + c_4 e^{+\lambda y}) = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0} \quad (8)$$

$$(5b) \& (8) \rightarrow (7) \quad c_2 \sin \lambda x (c_3 + c_4) = 0 \Rightarrow \boxed{c_3 = -c_4} \quad (9)$$

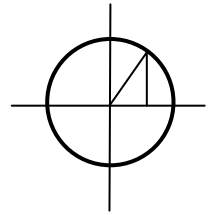
Η παραπάνω συνθήκη ικανοποιείται και με $c_2 = 0$, αλλά αυτή η περίπτωση δεν είναι επιθυμητή γιατί εξουδετερώνει την εξάρτηση της λύσης από τη συντεταγμένη x .

$$(6a), (8) \& (9) \rightarrow (7) \quad c_2 c_4 (\sin \lambda L)(e^{+\lambda y} - e^{-\lambda y}) = 0$$

Η συνθήκη αυτή ικανοποιείται μόνο για τις τιμές της λ όπου:

$$\sin \lambda L = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L} \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Το $n=0$ δεν συμπεριλαμβάνεται γιατί μηδενίζει τη λύση (7) $\theta(x, y) = 0$. Οι τιμές λ ονομάζονται «ιδιοτιμές» του προβλήματος και συμβολίζονται με τον κάτω δείκτη « n » ως εξής: $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$. Για κάθε ιδιοτιμή λ_n έχουμε μια «ιδιοσυνάρτηση» θ_n :



$$\left. \begin{aligned} \theta_n(x, y) &= c_2 c_4 \sin \frac{n\pi x}{L} \left(e^{+\frac{n\pi y}{L}} - e^{-\frac{n\pi y}{L}} \right) \\ &= 2 \sinh \frac{n\pi y}{L} = e^{+\frac{n\pi y}{L}} - e^{-\frac{n\pi y}{L}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_n(x, y) = c_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi y}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι κρατάμε μόνο τις θετικές τιμές του n , γιατί οι ιδιοσυναρτήσεις θ_n στην προκειμένη περίπτωση είναι ίδιες για $+n$ και $-n$. Κάθε μία από τις ιδιοσυναρτήσεις ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση (1) καθώς και τις οριακές συνθήκες (5α), (5β) και (6α). Γι' αυτό το λόγο η σταθερά c_n εξαρτάται από την ιδιοτιμή n . Επομένως, υπάρχει ένας άπειρος αριθμός λύσεων που ικανοποιεί την εξίσωση (1). Επειδή το πρόβλημα είναι γραμμικό, ο γραμμικός συνδυασμός (superposition) των ιδιοσυναρτήσεων επίσης ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση (1) και τις τρεις πρώτες οριακές συνθήκες:

$$\theta_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi y}{L} \quad (11)$$

Για τον υπολογισμό των συντελεστών c_n χρησιμοποιούμε την (6b)

$$\left. \begin{aligned} \theta_n(x, W) = 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi W}{L} \\ \text{ορίζουμε } A_n &= c_n \sinh \frac{n\pi W}{L} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (13)$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω εξίσωση με $\sin \frac{m\pi x}{L}$ και ολοκληρώνοντας από το 0 στο L προκύπτει:

$$\int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (14)$$

Δεδομένου ότι οι όροι $\sin \frac{n\pi x}{L}$ $n = 1, 2, 3, \dots$ είναι ορθογώνιοι μεταξύ τους, ισχύει η σχέση

$$\int_a^b \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0 \quad m \neq n$$

Άρα το δεξί σκέλος της (13) δεν είναι μηδενικός όρος για την περίπτωση που $m = n$

$$\Rightarrow \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx = A_n \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A_n &= \frac{\int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx}{\int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx} = \frac{-\frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L}}{\frac{x}{2} - \frac{\sin \frac{2n\pi x}{L}}{4n\pi}} \bigg|_0^L = \frac{-\frac{L}{n\pi} \left[\cos \frac{n\pi}{L} - 1 \right]}{\frac{L}{2} - 0 - \left[\frac{L}{4n\pi} - \frac{L}{4n\pi} \right]} = \frac{-\frac{L}{n\pi} [(-1)^n - 1]}{\frac{L}{2}} \\ &= -\frac{2}{n\pi} [(-1)^n - 1] = \frac{2}{n\pi} [(-1)^{n+1} + 1] \end{aligned} \quad (15)$$

$$(15) \rightarrow (12) \quad \frac{2}{n\pi} [(-1)^{n+1} + 1] = c_n \sinh \frac{n\pi W}{L} \quad \Rightarrow \quad c_n = \frac{\frac{2}{n\pi} [(-1)^{n+1} + 1]}{\sinh \frac{n\pi W}{L}} \quad (16)$$

Επομένως η λύση θα είναι ως εξής:

$$(16) \rightarrow (11) \rightarrow \boxed{\theta_n(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L} \frac{\sinh \frac{n\pi y}{L}}{\sinh \frac{n\pi W}{L}}}$$