



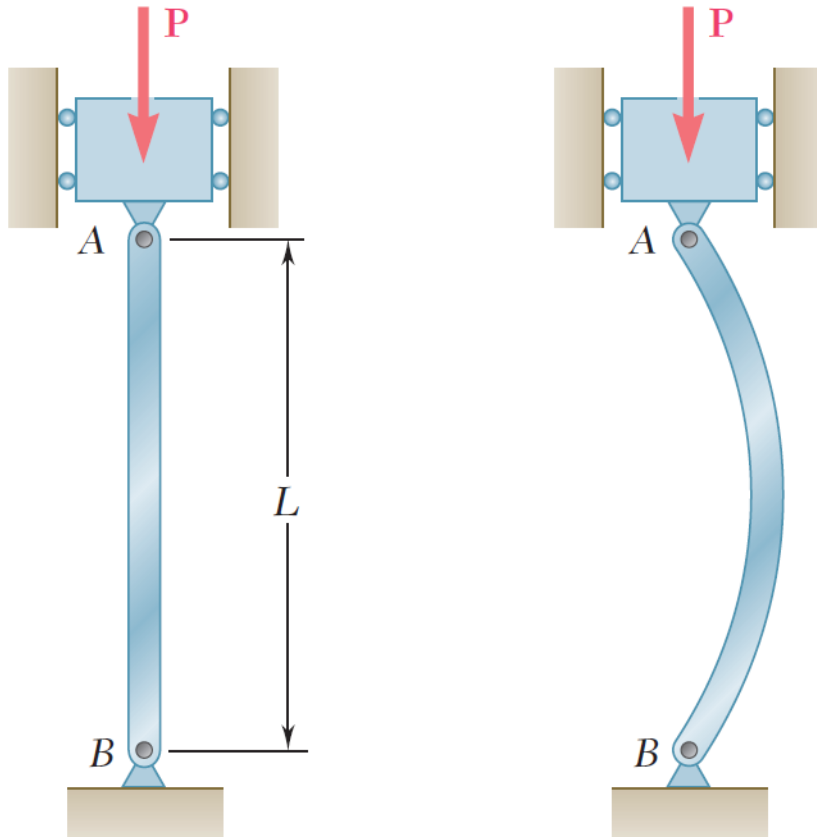
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Λυγισμός

Δρ. Δημήτριος ΣΑΒΒΑΣ

Λυγισμός Υποστυλώματος



(α)

Αμφιαρθρωτό υποστύλωμα AB υπό θλιπτικό αξονικό φορτίο α) ευσταθής κατάσταση, β) ασταθής κατάσταση

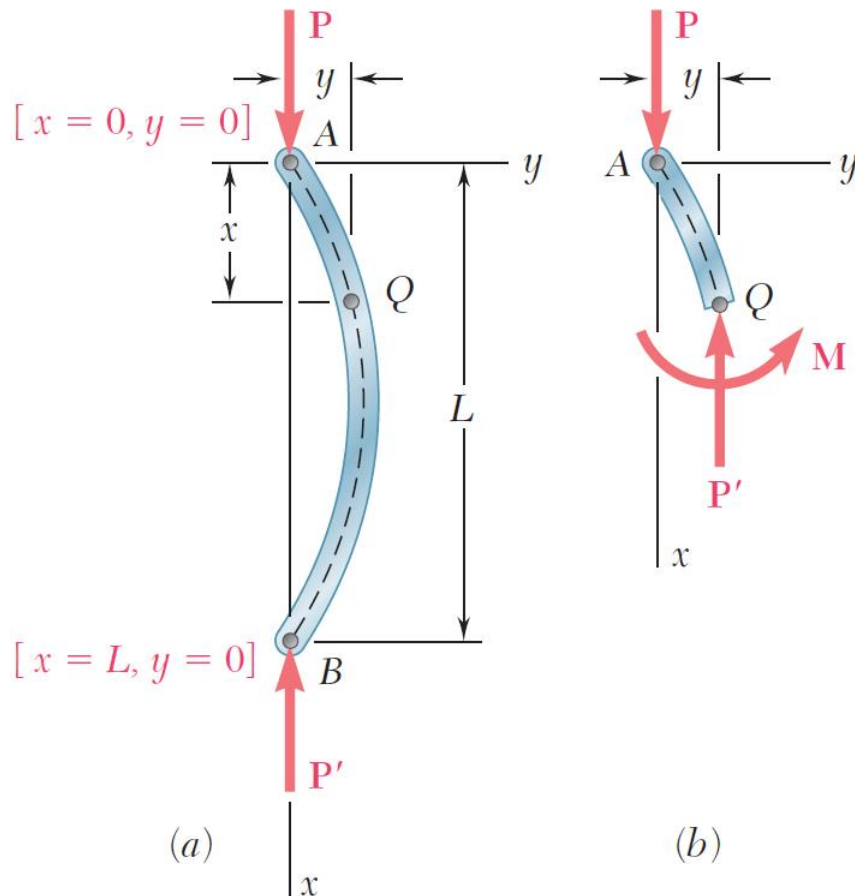
(β)

Υποστύλωμα ή στύλος καλείται μια λεπτή δοκός μεγάλου μήκους η οποία καταπονείται από αξονικά θλιπτικά φορτία.

Λυγισμός καλείται το φαινόμενο ελαστικής ευστάθειας του στύλου. Το επιπλέον του οριακού θλιπτικού φορτίου οδηγεί τον στύλο σε ασταθή κατάσταση δημιουργώντας μεγάλα βέλη κάμψης.

**Το φαινόμενο του λυγισμού εξαρτάται εκτός από το φορτίο, από το σχήμα της διατομής, τις ελαστικές ιδιότητες του υλικού και τον τρόπο στήριξης του στύλου.*

Τύπος του Euler για αμφιαρθρωτά υποστυλώματα



Εξίσωση ισορροπίας:

$$\sum M_Q = 0 \Rightarrow Py + M = 0 \Rightarrow M = -Py$$

Εκφράσεις καμπυλότητας:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{dy^2}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \approx \frac{dy^2}{dx^2}, \quad \kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

Γραμμική διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης:

$$\Rightarrow \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI} y$$

$$\Rightarrow \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{P}{EI} y = 0 \quad (1)$$

Επίλυση γραμμικής, ομογενής, διαφορικής εξίσωσης 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές:

$$\text{Θέτουμε: } p^2 = \frac{P}{EI} : (1) \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} + p^2 y = 0$$

Γενική λύση:

$$y = A \sin px + B \cos px \quad (2)$$

Οριακές συνθήκες:

α) για $x=0$, $y=0$ και β) για $x=L$, $y=0$

$$\stackrel{(a)}{(2)} \Rightarrow A \sin 0 + B \cos 0 = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\stackrel{(b)}{(2)} \Rightarrow A \sin pL = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \Rightarrow y = 0, \text{ ευθύγραμμο υποστύλωμα} \\ \sin pL = 0 \Rightarrow pL = n\pi \Rightarrow P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \end{cases}$$

τύπος του Euler:

$$\text{για } n=1: \boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}} \quad (3) \quad \begin{array}{l} \text{κρίσιμο θλιπτικό φορτίο λυγισμού} \\ \text{αμφιαρθρωτού υποστυλώματος} \end{array}$$

Κρίσιμη τάση και λόγος λυγηρότητας υποστυλώματος

Κρίσιμη τάση:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2}$$

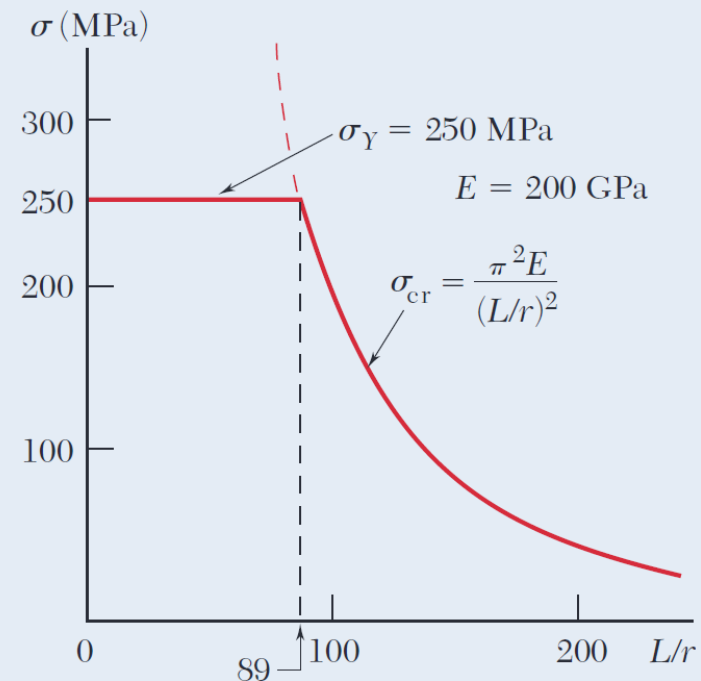
όπου $I = Ar^2$, r η ακτίνα αδρανείας

$$\Rightarrow \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EAr^2}{AL^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \quad (4)$$

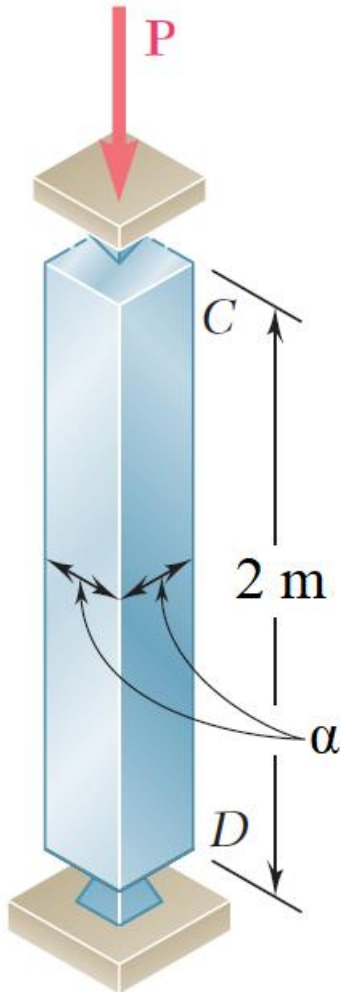
Όπου L/r ο λόγος λυγηρότητας του υποστυλώματος

$$\sigma_{cr} = \begin{cases} \sigma_Y = 250 \text{ MPa} & \text{για } L/r \leq 89 \\ \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} & \text{για } L/r > 89 \end{cases}$$



Διάγραμμα $\sigma_{cr}(L/r)$ για χάλυβα με $E=200$ GPa και $\sigma_Y=250$ Mpa.

Εφαρμογή 1



Έστω αμφιαρθρωτό υποστύλωμα μήκους 2 m, τετραγωνικής εγκάρσιας διατομής αα, κατασκευασμένο από υλικό με $E=13 \text{ GPa}$, $\sigma_{all}=12 \text{ MPa}$ το οποίο θέλουμε να φέρει με συντελεστή ασφαλείας 2.5 έναντι λυγισμού ένα θλιπτικό φορτίο α) $P=100 \text{ kN}$ και β) $P=200 \text{ kN}$. Πόση πρέπει να είναι η διάσταση της διατομής α σε κάθε περίπτωση;

Εφαρμογή 1

α) Για το φορτίο των 100 kN:

- Με βάση το δεδομένο συντελεστή ασφαλείας το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι: $P_{cr} = 2.5 \cdot 100kN = 250kN$

- Υπολογίζουμε τη ροπή αδρανείας από τον τύπο του Euler:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow I = \frac{P_{cr} L^2}{\pi^2 E} = \frac{(250 \times 10^3 \text{ N})(2\text{m})^2}{\pi^2 (13 \times 10^9 \text{ Pa})} = 7.794 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

- Για τετραγωνική διατομή η ροπή αδρανείας είναι: $I = \frac{1}{12} \alpha^4$

$$\Rightarrow \frac{1}{12} \alpha^4 = 7.794 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \Rightarrow \alpha = 98.3 \text{ mm} \Rightarrow A = (98.3 \text{ mm})^2$$

- Ελέγχουμε την τιμή της ορθής τάσης στο υποστύλωμα:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{100kN}{(0.0983\text{m})^2} \approx 10349kPa = 10.349MPa < \sigma_{all} = 12MPa$$

Συνεπώς αποδεκτή διάσταση $\alpha = 98.3 \text{ mm}$

β) Για το φορτίο των 200 kN:

$$P_{cr} = 2.5 \cdot 200kN = 500kN$$

$$I = \frac{P_{cr} L^2}{\pi^2 E} = \frac{(500 \times 10^3 N)(2m)^2}{\pi^2 (13 \times 10^9 Pa)} = 15.588 \times 10^{-6} m^4$$

$$I = \frac{1}{12} \alpha^4 = 15.588 \times 10^{-6} m^4 \Rightarrow \alpha = 116.95mm \Rightarrow A = (116.95mm)^2$$

- Ελέγχουμε την τιμή της ορθής τάσης στο υποστύλωμα:

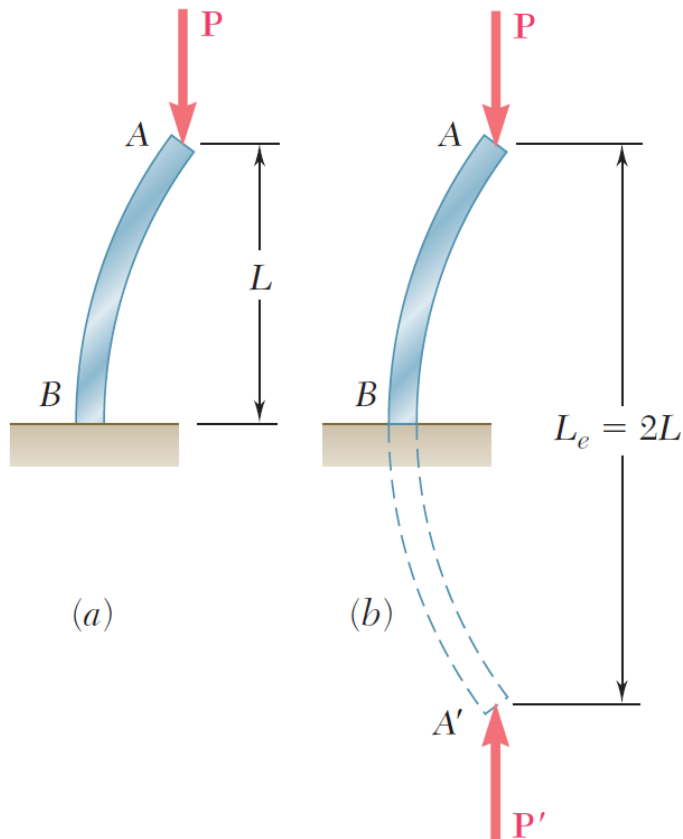
$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{200kN}{(0.11695m)^2} \approx 14.62MPa > \sigma_{all} = 12MPa \quad \text{Μη αποδεκτή διατομή}$$

- Επομένως επιλέγουμε διάσταση με βάση την αντίσταση σε θλίψη:

$$A = \frac{P}{\sigma_{all}} = \frac{200kN}{12MPa} \approx 16.67 \times 10^{-3} m^2 \Rightarrow a^2 = 16.67 \times 10^{-3} m^2 \Rightarrow a = 129.1 mm$$

Γενικοί τύποι του Euler για λυγισμό υποστυλωμάτων για διαφορετικές συνθήκες στήριξης των άκρων

Μονόπακτο υποστύλωμα (ένα ελεύθερο και ένα πακτωμένο άκρο):



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_e / r)^2}$$

Όπου:

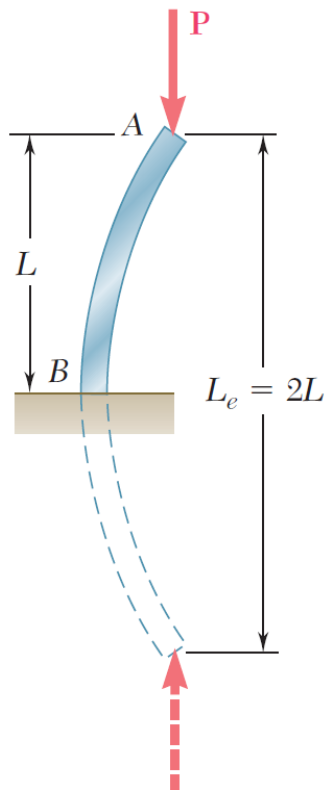
- $L_e = 2L$ το ισοδύναμο μήκος λυγισμού (effective length) και
- L_e / r ο ισοδύναμος λόγος λυγηρότητας

***Μορφή λυγισμού μονόπακτου στύλου ισοδύναμη με αυτή του μισού αμφιαρθρωτού.**

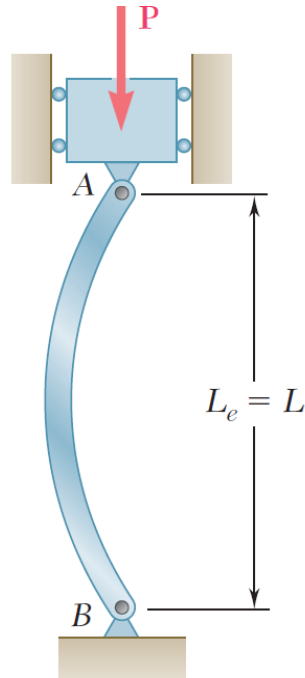


Γενικοί τύποι του Euler για λυγισμό υποστυλωμάτων για διαφορετικές συνθήκες στήριξης των άκρων

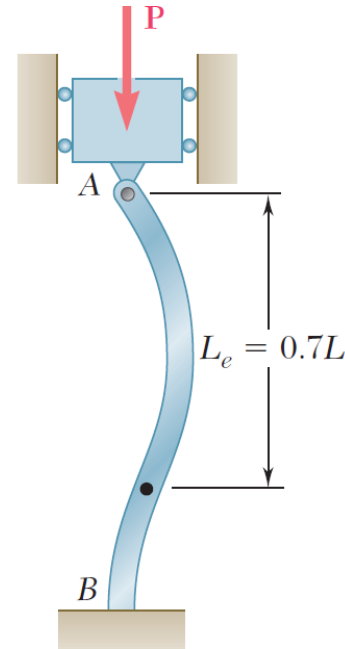
Ισοδύναμο μήκος λυγισμού L_e για τέσσερις περιπτώσεις στήριξης:



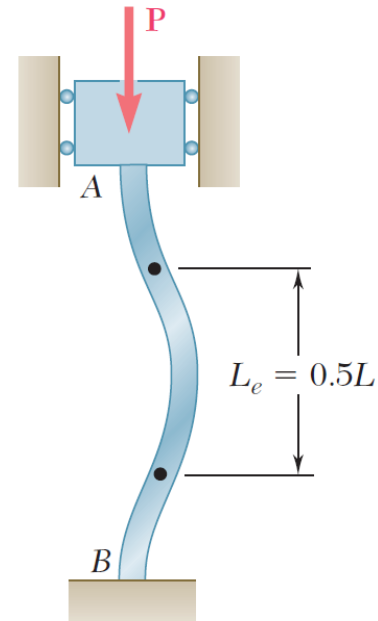
α) Μονόπακτος
στήλος
 $L_e = 2L$



β) Αμφιαρθρωτός
στήλος
 $L_e = L$



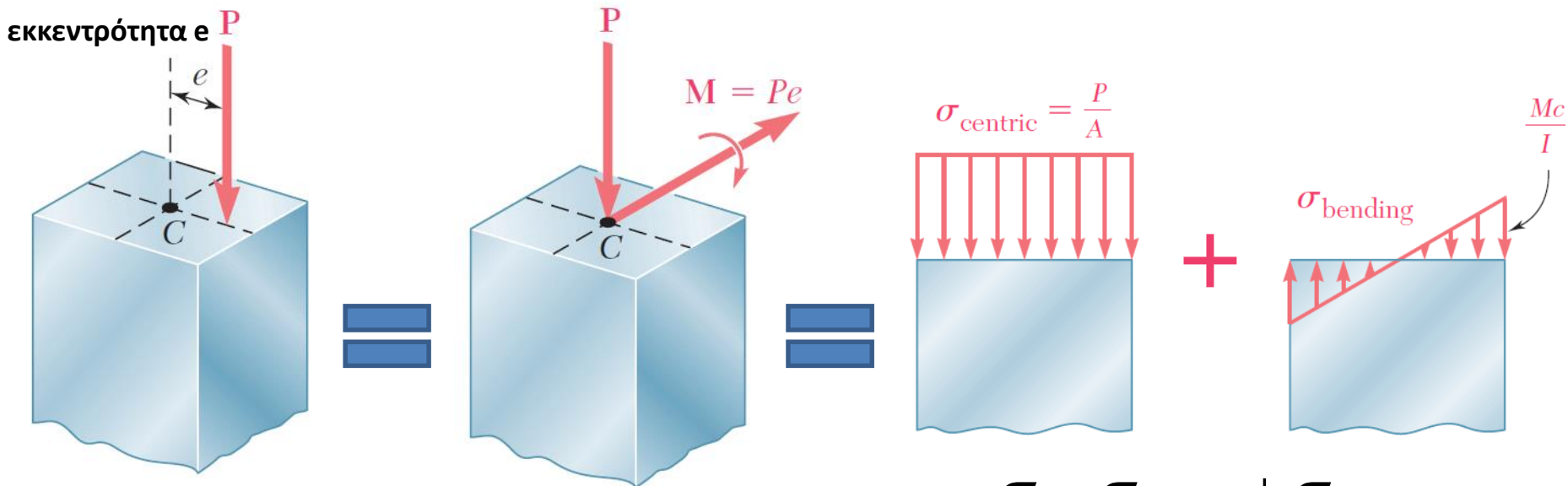
γ) Στύλος με άρθρωση
και πάκτωση
 $L_e = 0.7L$



δ) Αμφίπακτος
στήλος
 $L_e = 0.5L$



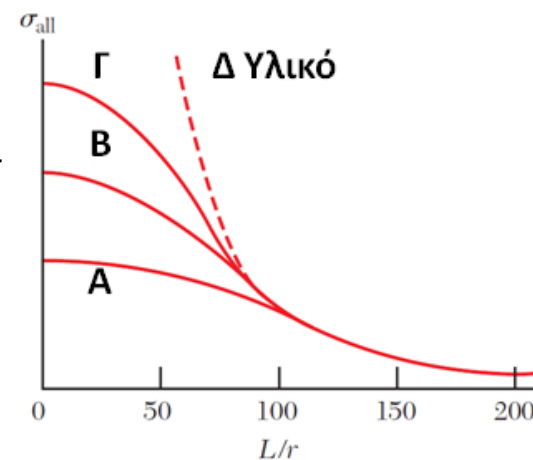
Σχεδιασμός υποστυλωμάτων υπό ένα έκκεντρο φορτίο



Σχεδιασμός με βάση τη μέθοδο της επιτρεπόμενης τάσης:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \leq \sigma_{\text{all}}$$

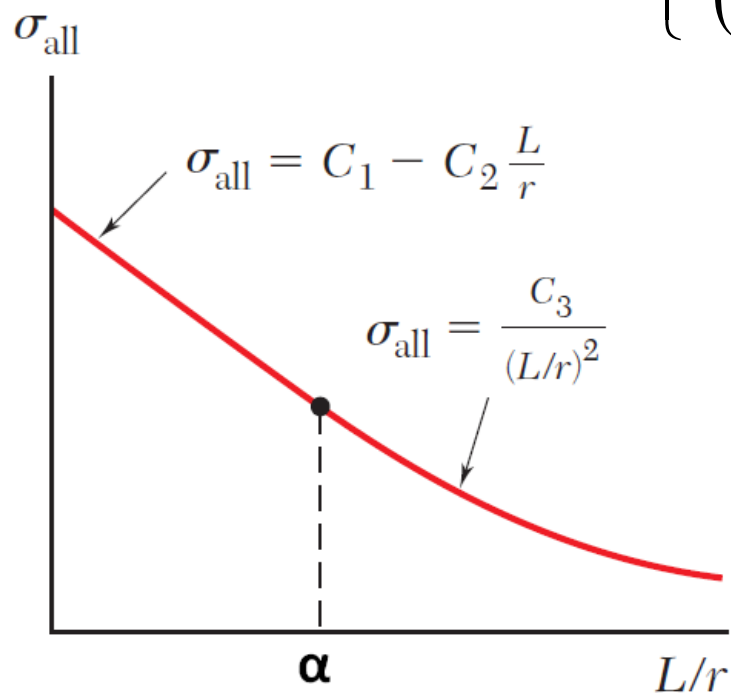
*Η επιτρεπόμενη τάση σ_{all} δίνεται σε σχέση με τη λυγηρότητα L_e/r από διαγράμματα που προκύπτουν μετά από πειράματα λυγισμού σε υποστυλώματα διαφορετικών υλικών.





Επιτρεπόμενη τάση σχεδιασμού αλουμινίου

$$\sigma_{all} = \begin{cases} C_1 - C_2 \frac{L}{r} & , \text{για } \frac{L}{r} \leq a \\ \frac{C_3}{(L/r)^2} & , \text{για } \frac{L}{r} > a \end{cases}$$



- **Κράμα Al 6061-T6:**

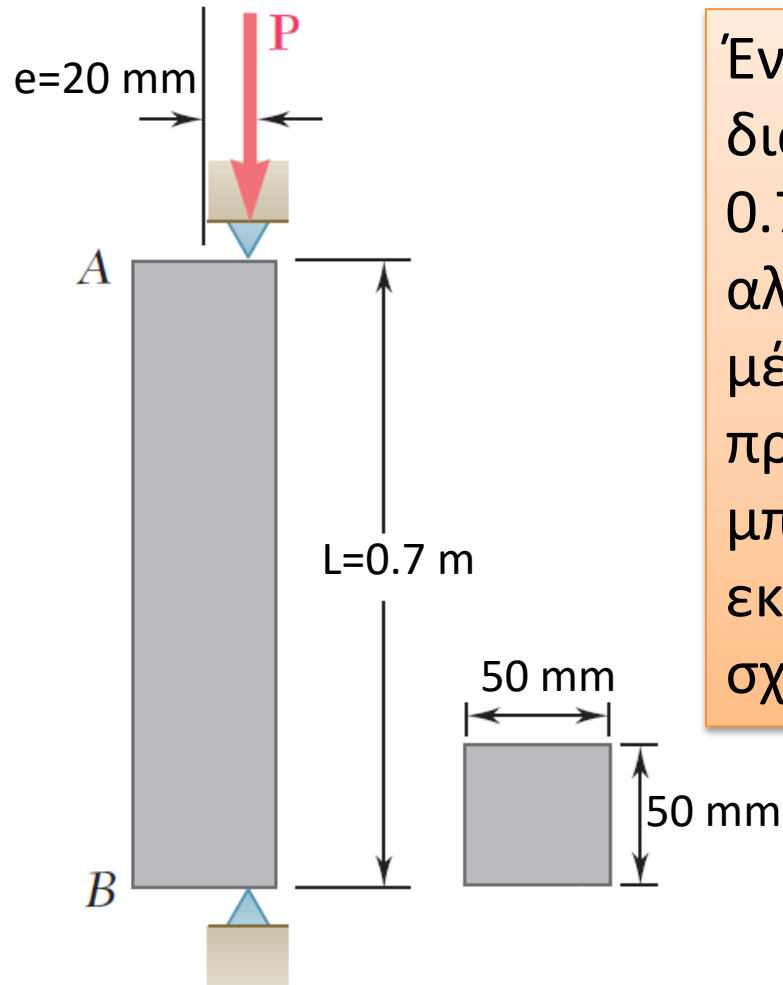
$\alpha=66, C_1=140, C_2=0.874, C_3=354 \times 10^3$

- **Κράμα Al 2014-T6:**

$\alpha=55, C_1=213, C_2=1.557, C_3=383 \times 10^3$

*προκύπτει σ_{all} σε MPa

Εφαρμογή 2



Ένα υποστύλωμα με τετραγωνική διατομή 50 mm και ισοδύναμο μήκος 0.7 m είναι κατασκευασμένο από κράμα αλουμίνιο 2014-T6. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της επιτρεπόμενης τάσης, προσδιορίστε το μέγιστο φορτίο P που μπορεί να εφαρμοστεί με ασφάλεια με εκκεντρότητα 20 mm όπως φαίνεται στο σχήμα.

Εφαρμογή 2

Υπολογισμός ακτίνας αδρανείας:

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{520833mm^4}{2500mm^2}} = 14.43mm \quad \text{όπου} \quad \begin{cases} A = (50mm)^2 = 2500mm^2 \\ I = \frac{1}{12}(50mm)^4 = 520833mm^4 \end{cases}$$

Ισοδύναμη λυγηρότητα: $\frac{L}{r} = \frac{700mm}{14.43mm} = 48.5$

Εύρεση σ_{all} για κράμα Al 2014-T6:

$$L/r < 55 \Rightarrow \sigma_{all} = [213 - 1.577 \cdot 48.5] = 136.5MPa$$

κριτήριο σχεδιασμού: $\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \leq \sigma_{all}$

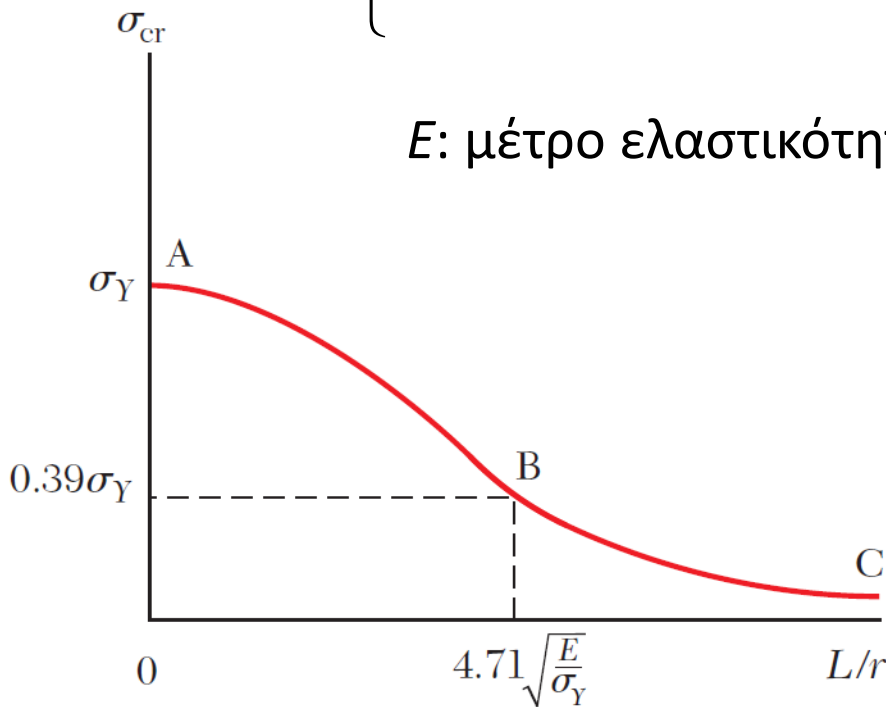
$$\Rightarrow \frac{P}{A} + \frac{(P \cdot e) \cdot c}{I} \leq \sigma_{all} \Rightarrow \frac{P}{2500mm^2} + \frac{P(20mm)(25mm)}{520833mm^4} \leq 136.5MPa$$

$$\Rightarrow P \leq 100.4kN$$

Επιτρεπόμενη τάση σχεδιασμού δομικού χάλυβα

$$\sigma_{cr} = \begin{cases} \left[0.658^{(\sigma_Y / \sigma_e)} \right] \sigma_Y & , \text{ για AB όπου } \frac{L}{r} \leq 4.71 \sqrt{\frac{E}{\sigma_Y}} \\ 0.877 \sigma_e & , \text{ για BC όπου } \frac{L}{r} > 4.71 \sqrt{\frac{E}{\sigma_Y}} \end{cases}$$

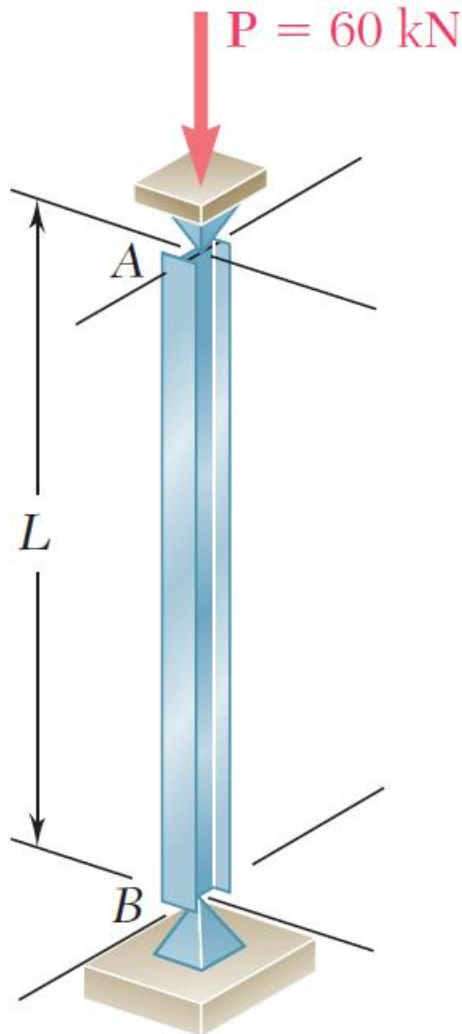
E : μέτρο ελαστικότητας, σ_Y : τάση διαρροής, $\sigma_e = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$



Χρήση συντελεστή ασφαλείας 1.67:

$$\sigma_{all} = \frac{\sigma_{cr}}{1.67}$$

Εφαρμογή 3



Προσδιορίστε το μέγιστο αστήρικτο μήκος L για το οποίο το θλιβόμενο μέλος AB διατομής $S100 \times 11.5$ ελατού χάλυβα μπορεί με ασφάλεια να φέρει κεντρικό φορτίο $P=60 \text{ kN}$. Υποθέστε ότι $\sigma_y=250 \text{ MPa}$ και $E=200 \text{ GPa}$.

***Σημείωση:** Η διατομή $S100 \times 11.5$ έχει εμβαδόν $A=1460 \text{ mm}^2$ και ακτίνες αδρανείας $r_x=41.7 \text{ mm}$, $r_y=14.6 \text{ mm}$.

Εφαρμογή 3

Υποθέτουμε ότι : $\frac{L}{r} > 4.71 \sqrt{\frac{E}{\sigma_Y}} \Rightarrow \sigma_{cr} = 0.877 \sigma_e$

$$\Rightarrow \sigma_{cr} = 0.877 \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} = 0.877 \frac{\pi^2 (200 \times 10^9 Pa)}{(L/r)^2} = \frac{1.731 \times 10^{12} Pa}{(L/r)^2}$$

Χρήση συντελεστή ασφαλείας: $\sigma_{all} = \frac{\sigma_{cr}}{1.67} = \frac{1.037 \times 10^{12} Pa}{(L/r)^2} \quad (\alpha)$

Η ορθή τάση λόγω του θλιπτικού φορτίου P είναι :

$$\sigma_{all} = \frac{P}{A} = \frac{60 \times 10^3 N}{1460 \times 10^{-6} m^2} = 41.1 \times 10^6 Pa \quad (\beta)$$

Ισχύει $\sigma_{all} < \sigma_Y$

Εφαρμογή 3

Εξισώνοντας τις (α) και (β):

$$\frac{1.037 \times 10^{12} \text{ Pa}}{(L/r)^2} = 41.1 \times 10^6 \text{ Pa} \Rightarrow \frac{L}{r} = 158.8$$

Το όριο λυγηρότητας στο σημείο B στο διάγραμμα του χάλυβα είναι:

$$4.71 \sqrt{\frac{E}{\sigma_Y}} = 4.71 \sqrt{\frac{200 \times 10^9 \text{ Pa}}{250 \times 10^6 \text{ Pa}}} = 133.2 < \frac{L}{r} = 158.8 \quad \text{*Συνεπώς είναι ορθή η αρχική μας υπόθεση}$$

Επιλέγουμε τη μικρότερη από τις δύο ακτίνες αδρανείας:

$$\frac{L}{r_y} = \frac{L}{14.6 \times 10^{-3} \text{ m}} = 158.8 \Rightarrow L = 2.32 \text{ m}$$